Esame di Metodi Numerici per le Equazioni Differenziali Ordinarie
a.a. 2010-2011
(Corso di Laurea in Matematica)
Esercizio

Si risolva numericamente la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = -y(t)\tan t + \cos^2 t,\ \ t \in [0, T]$$

con la condizione iniziale $y(0) = 2$ per $T = 4\pi$.

La soluzione analitica dell'equazione è

$$y(t) = (2 + \sin t)\cos t.$$

Implementare almeno 3 metodi numerici di cui almeno uno esplicito e almeno uno implicito; utilizzare inoltre almeno un algoritmo esterno già implementato (per esempio quelli di Matlab, Mathematica o packages disponibili nei diversi linguaggi)

Scegliere più valori del passo temporale Δt e produrre

1. grafico della soluzione e della soluzione approssimata dell'equazione differenziale per tutti i valori di Δt;

2. grafico dell'errore in funzione di t per tutti i valori di Δt;

3. grafico dell'errore massimo $E(\Delta t)$ ottenuto per ogni valore di Δt in funzione del tempo computazionale richiesto per risolvere l'equazione numericamente, dove $E(\Delta t)$ è definito come

   $$E(\Delta t) := \max_k |\tilde{y}(t_k) - y(t_k)|,$$

   e dove t_k sono i punti della griglia; $y(t_k)$ è la soluzione dell'equazione differenziale valutata nei punti della griglia e $\tilde{y}(t_k)$ è la soluzione numerica dell'equazione differenziale negli stessi punti ottenuta con i vari metodi numerici;

4. essendo la soluzione periodica di periodo 2π fare un grafico di

   $$\tilde{y}(t + 2\pi) - \tilde{y}(t)$$

   per $t \in [0, 2\pi]$

Suggerimento: osservare il comportamento della soluzione numerica per $t \simeq (k + 1/2)\pi$, $k \geq 0$; porre allora $y(t) = \cos(t)g(t)$, da cui $y'(t) = -\sin(t)g(t) + \cos(t)g'(t)$ ... e risolvere l'equazione differenziale risultante rispetto a $g(t)$.