Esame di Matematica Computazionale

a.a. 2009/2010

Esercizio

Si consideri il problema dell'interpolazione di una funzione in N dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, mediante un polinomio di grado $M = N - 1$

$$y_i = \sum_{j=0}^{M} a_j x_i^j,$$

$i = 1, \ldots, N$, $y_i = f(x_i)$. In forma matriciale

$$\underline{y} = X\underline{a}, \tag{1}$$

con $\underline{y} \equiv (y_1, \ldots, y_N)^T$, $\underline{a} \equiv (a_0, \ldots, a_M)$,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^M \end{bmatrix}$$

(metodo dei coefficienti indeterminati. Si risolva il problema di interpolazione mediante il metodo dei coefficienti indeterminati (cioé risolvendo il sistema (1)) nel caso in cui $f(x) = \sin 2\pi x$; $N = 5, 10, 20, 50$; $x_i = (i-1)/(N-1)$. Risolvere il sistema di equazioni lineari mediante la fattorizzazione LU. Stimare l'indice di condizionamento della matrice X.

Si risolva lo stesso problema scrivendo le equazoni normali del metodo dei minimi quadrati. Si ricorda che le equazioni normali danno origine al seguente sistema di equazioni:

$$H\underline{a} = \underline{b}, \tag{2}$$

dove $\underline{b} \equiv (\sum_i y_i, \sum_i x_i y_i, \sum_i x_i^2 y_i, \ldots, \sum_i x_i^M y_i)$ e

$$H = \begin{pmatrix} N & \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \cdots & \sum_i x_i^M \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \cdots & \sum_i x_i^{M+1} \\ \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^4 & \cdots & \sum_i x_i^{M+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i x_i^M & \sum_i x_i^{M+1} & \sum_i x_i^{M+2} & \cdots & \sum_i x_i^{2M} \end{pmatrix}.$$

Si risolva il sistema di equazioni (2) scegliendo un medoto di fattorizzazione. Si stimi l'indice di condizionamento della matrice H.

Confrontare i risultati ottenuti con le due metodologie. Disegnare il grafico dei polinomi con sovrapposti i punti di interpolazione in entrambi i casi.