

Esame di Matematica Computazionale a.a. 2007-2008
Laurea Triennale
Corso di Laurea in Informatica

Esercizio N. 1

Ricostruzione di uno spartito musicale da un tracciato audio.

Considerato il tracciato audio incluso nel file `music.inp` ricostruire la sequenza delle note (tipo e durata) eseguite.

Il tracciato audio è rappresentato nel formato ASCII come una sequenza di $N = 26000$ valori di ampiezza campionati ad una frequenza di campionamento $f_c = 2^{13}$ Hz (pertanto il periodo di campionamento del segnale risulta $T_c = 1/f_c$ sec $\simeq 0.122$ msec).

L'algoritmo dovrà includere i seguenti passi:

Passo 1. Individuare l'inizio e la durata di ogni singola nota nella sequenza. Analizzando il tracciato audio si osserva che le note sono intervallate da piccole pause in cui l'ampiezza è nulla. La stima dell'inizio e della durata può essere effettuata in maniera manuale o automatica. Nel primo caso individuare dal grafico del tracciato audio l'istante di tempo approssimativo dove comincia ciascuna nota e quello dove finisce. Nel caso automatico fissare una finestra temporale (per esempio 1 msec corrispondente a circa 5 dati consecutivi del tracciato audio); calcolare l'energia media del segnale audio nella finestra facendo la media dei quadrati delle ampiezze nella finestra temporale. Spostare la finestra nel tempo e definire l'inizio di una nota approssimativamente come l'istante in cui l'energia media nella finestra diventa maggiore di una certa soglia h e la fine della nota come l'istante in cui l'energia media nella finestra diventa minore della soglia h . Impostare la soglia, per esempio, a $h = 0.1$.

Lo studente dovrà scegliere una delle due modalità di individuazione della posizione e durata delle note (manuale o automatica)

Passo 2. Per ognuna delle note localizzate stimare la frequenza della nota (e quindi il tipo di nota) con 4 metodi diversi

Stima diretta sul tracciato audio. Individuare all'interno della sequenza del tracciato audio tutti i dati che si ripetono periodicamente (per esempio tutti i punti di massimo relativo, oppure tutti i punti di minimo relativo); siano essi i vettori (t_i, a_i) , dove t_i è l'istante di tempo e a_i è l'ampiezza corrispondente. Da ogni coppia di vettori consecutivi stimare la frequenza come $f_i = 1/T_i$, dove T_i è il periodo stimato dalla coppia, $T_i = t_{i+1} - t_i$. Stimare la frequenza della nota f come la media su tutti i valori della frequenza stimati per le coppie.

Trasformata di Fourier. Scegliere all'interno della sequenza per ciascuna nota una sottosequenza \mathbf{y} formata da un numero di dati che sia una potenza di 2 (per esempio prendere la parte centrale della sequenza di origine). Sia y_i , $i = 0, \dots, M - 1$, la sottosequenza e M il corrispondente numero di dati. Calcolare la trasformata di Fourier dei dati della sottosequenza e siano \hat{y}_i , $i = 0, \dots, M - 1$, i corrispondenti valori (complessi in generale) della trasformata. Considerare solo i primi $M/2$ valori e trascurare il primo

coefficiente di Fourier (\hat{y}_0) corrispondente alla componente costante del segnale. Mostrare il grafico dell'energia dei coefficienti e_i al variare della frequenza f_i , dove $f_i = f_c \times i/M$, $e_i = \overline{\hat{y}_i \hat{y}_i^1}$, $i = 1, \dots, M/2$. Stimare la frequenza della nota come quella per cui si presenta il primo massimo relativo dell'energia dei coefficienti di Fourier (armonica principale). Osservare e discutere la presenza di massimi relativi in corrispondenza delle armoniche secondarie a frequenze multiple dell'armonica principale.

Autocorrelazione. Considerare la stessa sottosequenza di M dati vista nel precedente metodo. Calcolare l'autocorrelazione della sequenza, \mathbf{c} , come

$$c_k = \frac{1}{M-k} \sum_{j=0}^{M-k-1} y_j y_{j+k}, \quad k = 0, \dots, M-1. \quad (1)$$

Fare un grafico dell'autocorrelazione in funzione del lag k (o del periodo T_k calcolato a partire dal lag come $T_k = k/f_c$, $k = 0, \dots, M-1$). Stimare la frequenza della nota musicale, f a partire dal primo massimo relativo (T_ℓ, c_ℓ) della funzione di autocorrelazione (escludendo quello eventualmente presente per il lag $k = 0$) come $f = 1/T_\ell$. Osservare e discutere la presenza di altri massimi.

Autocorrelazione mediante trasformata di Fourier. Ripetere la procedura del metodo "Autocorrelazione" sostituendo il calcolo diretto dei coefficienti di autocorrelazione (1) con il calcolo mediante trasformata diretta e inversa veloce di Fourier:

$$\mathbf{c} = \text{IFFT}(\hat{\mathbf{g}}), \quad \text{dove } \hat{g}_i = \overline{\hat{d}_i \hat{d}_i^1}, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad \text{e } \hat{\mathbf{d}} := \text{FFT}(\mathbf{y})$$

In tutti i metodi calcolare la nota N a partire dalla stima della frequenza f in base alla relazione

$$N = 49 + 12 \left\lceil \frac{\log(f/440)}{\log(2)} \right\rceil = 49 + 12 \left\lceil \log_2 \left(\frac{f}{440} \right) \right\rceil,$$

dove $\lceil z \rceil$ indica il numero intero più vicino a z . La corrispondenza tra il numero N ottenuto e la nota musicale è fornita dalla tabella seguente per l'ottava centrale (49 corrisponde alla nota LA):

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
DO	DO#	RE	RE#	MI	FA	FA#	SOL	SOL#	LA	LA#	SI

La sequenza di note si ripete ciclicamente a destra e a sinistra per ottave rispettivamente più alte e più basse.

Per lo svolgimento del progetto fare riferimento alle dispense disponibili alla pagina Web <http://www.na.iac.cnr.it/~bdv/mct0708.htm>.

¹ \bar{z} indica il complesso coniugato di z