

**Esame di Matematica Computazionale a.a. 2002-2003**  
**(Laurea quinquennale in Informatica)**  
**Esercizio N. 3**

Calcolare la trasformata discreta wavelet del vettore di dati

$$y_i = \exp(-(x_i - 0.5)^2) + \frac{\cos 100\pi x_i}{500(x_i - 0.5)^2 + 1}, \quad 0 \leq i < N,$$

dove  $x_i = i/N$  e  $N = 2^8, N = 2^9, N = 2^{10}, N = 2^{11}, N = 2^{12}, N = 2^{13}, N = 2^{14}$ .

Fare un grafico del vettore di dati e della trasformata. Verificare inoltre, in base al tempo di esecuzione di tutti i casi,  $T_N$ , che il costo computazionale dell'algoritmo è dell'ordine di  $N$ ; a tale scopo ricavare la migliore retta (nel senso dei minimi quadrati) che approssima le coppie di punti  $(N, T_N)$ .

Nota: Se il tempo di esecuzione non è significativo per qualche  $N$  (ciò avviene per  $N$  piccolo), eseguire in un loop diverse volte la stessa trasformata e stimare il tempo richiesto per una singola trasformata mediando il tempo totale ottenuto.

Consideriamo poi il caso  $N = 2^{13}$ . Sia  $\underline{Z}$  il vettore che indica la trasformata wavelet discreta di  $\underline{y}$

Calcolare il vettore  $\underline{H}^t$  come

$$H_k^t = \begin{cases} Z_k & \text{se } |Z_k| \geq t; \\ 0 & \text{se } |Z_k| < t. \end{cases}$$

Il vettore  $\underline{H}^t$  dipende dal parametro  $t \geq 0$ .

Calcolare quindi al variare di  $t$  le seguenti quantità:

- Fattore di compressione  $\rho^t$  come

$$\rho^t := \frac{N}{\#\{H_k^t \geq t\}},$$

dove  $\#\{S\}$  è il numero di elementi di un generico insieme  $S$ ;

- Errore della compressione  $E^t$  come

$$E^t := \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (H_k^t - H_k^0)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} (H_k^0)^2}}.$$

dove  $\underline{H}^0$  è il vettore  $\underline{H}^t$  corrispondente al parametro  $t = 0$ .

Fare un grafico di  $\rho^t$  e di  $E^t$  (ambedue in funzione di  $t$ ) e un grafico di  $\rho$  in funzione di  $E$  (ricordare che  $\rho$  ed  $E$  sono espressi in forma parametrica in funzione di  $t$ ).

Infine per i valori di  $t$  corrispondenti ad un fattore di compressione  $\rho$  circa uguale a 1.1, 2, 10, 40, 100 fare il grafico della trasformata inversa discreta di  $\underline{H}^t$  (mostrare solo la parte reale).

Confrontare i risultati con quelli ottenuti mediante l'analisi di Fourier (esercizio N. 2)