

Esame di Matematica Computazionale a.a. 2002-2003
Esercizio N. 2

Calcolare la trasformata discreta di Fourier (mediante FFT) del vettore di dati

$$y_i = \exp(-(x_i - 0.5)^2) + \frac{\cos 100\pi x_i}{500(x_i - 0.5)^2 + 1}, \quad 0 \leq i < N,$$

dove $x_i = i/N$ e $N = 2^8, N = 2^9, N = 2^{10}, N = 2^{11}, N = 2^{12}, N = 2^{13}, N = 2^{14}$.

Fare un grafico del vettore di dati e della parte reale ed immaginaria della trasformata. Verificare inoltre, in base al tempo di esecuzione di tutti i casi, T_N , che il costo computazionale dell'algoritmo è dell'ordine di $N \log N$; a tale scopo ricavare la migliore retta (nel senso dei minimi quadrati) che approssima le coppie di punti $(N \log N, T_N)$.

Nota: Se il compilatore non consente il calcolo della trasformata per N troppo grande, fermarsi al valore massimo consentito. Se il tempo di esecuzione non è significativo per qualche N (cioè avviene per N piccolo), eseguire in un loop diverse volte la stessa trasformata e stimare il tempo richiesto per una singola trasformata mediando il tempo totale ottenuto.

Consideriamo poi il caso $N = 2^{13}$. Sia \underline{Y} il vettore (complesso) che indica la trasformata di Fourier discreta di \underline{y} e sia \underline{Z} la parte reale di \underline{Y} :

$$Z_k = \operatorname{Re}(Y_k), \quad 0 \leq k < N.$$

Calcolare il vettore \underline{H}^t come

$$H_k^t = \begin{cases} Z_k & \text{se } |Z_k| \geq t; \\ 0 & \text{se } |Z_k| < t. \end{cases}$$

Il vettore \underline{H}^t dipende dal parametro $t \geq 0$.

Calcolare quindi al variare di t le seguenti quantità:

- Fattore di compressione ρ^t come

$$\rho^t := \frac{N}{\#\{H_k^t \geq t\}},$$

dove $\#\{S\}$ è il numero di elementi di un generico insieme S ;

- Errore della compressione E^t come

$$E^t := \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (H_k^t - H_k^0)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} (H_k^0)^2}}.$$

dove \underline{H}^0 è il vettore \underline{H}^t corrispondente al parametro $t = 0$.

Fare un grafico di ρ^t e di E^t (ambedue in funzione di t) e un grafico di ρ in funzione di E (ricordare che ρ ed E sono espressi in forma parametrica in funzione di t).

Infine per i valori di t corrispondenti ad un fattore di compressione ρ circa uguale a 1.1, 2, 10, 40, 100 fare il grafico della trasformata inversa discreta di \underline{H}^t (mostrare solo la parte reale).