

Esame di Matematica Computazionale a.a. 2002-2003
Esercizio N. 1

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.3 \\ 20x - 6, & 0.3 \leq x \leq 0.35 \\ 1, & 0.35 < x < 0.65 \\ 14 - 20x, & 0.65 \leq x \leq 0.7 \\ 0, & 0.7 < x \leq 1. \end{cases}$$

Consideriamo i due insiemi di nodi

1. $x_i = i/N$, $i = 0, \dots, N$, $N = 15$; siano poi f_i i valori della funzione f nei punti x_i , cioè $f_i = f(x_i)$
2. $\xi_k = k/G$, $k = 0, \dots, G$, $G = 200$.

Per $n = 1, \dots, N$

1. costruire il polinomio $P_n(x)$ di grado n approssimante f nel senso dei minimi quadrati a partire dalle coppie (x_i, f_i) , $i = 0, \dots, N$;
2. valutare il polinomio $P_n(x)$ nei nodi ξ_k e calcolare l'errore di approssimazione E_n come

$$E_n = \sqrt{\frac{1}{G} \sum_{k=0}^G (P_n(\xi_k) - f(\xi_k))^2}$$

Fare una grafico di E^n in funzione di n ed individuare il valore (ottimale) di n che minimizza l'errore di approssimazione; fornire alcune rappresentazioni grafiche significative dei polinomi approssimanti.

Nel metodo dei minimi quadrati si utilizzi la fattorizzazione LU per la risoluzione del sistema di equazioni e si stimi il condizionamento della matrice.

Si commentino i risultati ottenuti