Trasformata wavelet

1 Introduzione

AL pari della trasforamta di Fourier veloce (FFT), la trasformata wavelet discreta (DWT) è un'operazione veloce e lineare che opera su un vettore di dati di lunghezza pari ad una potenza di 2 e lo trasforma in un vettore di pari lunghezza numericamente differente. Come la FFT, la trasformata wavelet è invertibile (di fatto ortogonale), cosicché la trasformata wavelet (vista come una grande matrice) è banalmente la trasposta della trasformata. Pertanto entrambe la FFT e la DWT possono essere considerate come una trasformazione dal dominio originario (tempo) ad un dominio differente: per la FFT questo nuovo dominio contiene funzioni di base date da seni e coseni. Nel dominio wavelet le funzioni di base sono alquanto più complicate ed assumono nomi pittoreschi di *funzioni madre* o *padre*.

Le basi wavelet risultano interessanti perché al contrario dei seni e coseni le singole funzioni wavelet sono abbastanza localizzate nello spazio; allo stesso modo, al pari dei seni e coseni, esse risultano anche alquanto localizzate in frequenza (o più esattamente in scala caratteristica).

Al contrario della base trigonometrica, che definisce un'unica trasformata di Fourier, esistono infinite possibili basi wavelet. Grosso modo esse differiscono per il compromesso che raggiungono tra la localizzazione nel dominio del tempo e la loro regolarità.

2 Filtri wavelet di Daubechies

Una particolare base wavelet viene individuata da un particolare insieme di numeri, detti *coefficienti del filtro wavelet*, **h**. Noi considereremo i filtri della classe Daubechies, che include membri che spaziano da wavelets fortemente localizzate a wavelets fortemente regolari. Un filtro è individuato da L coefficienti, $h_0, \ldots, h_{L-1}$.

Consideriamo ad esempio la famiglia Daubechies di lunghezza $L = 4$, $h_0, \ldots, h_3$. Allora il primo passo della trasformata wavelet discreta può essere formalizzato mediante il prodotto

$$\mathbf{w}^{J-1} = W^J \mathbf{x}$$

dove $\mathbf{x} \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ è il vettore di $N = 2^J$ dati di cui bisogna calcolare la trasformata wavelet e $\mathbf{w}^{J-1}$ rappresenta il vettore trasformata wavelet (di pari lunghezza L) dopo un passo della trasformata stessa; W^J è la matrice di trasformazione wavelet di ordine N, data da

$$W^J = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & & & & & \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & & & & & & & \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & & & \\ & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ & & & & & & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_2 & h_3 & & & & & & & & h_0 & h_1 \\ g_2 & g_3 & & & & & & & & g_0 & g_1 \end{pmatrix}.$$

Gli elementi in bianco significano zero. È importante osservare la struttura della matrice. La prima riga genera il primo elemento della convoluzione tra il vettore di dati $\mathbf{x}$ ed il filtro $\mathbf{h}$. Analogamente la terza, quinta, ..., e in generale le righe dispari della matrice generano rispettivamente il terzo, quinto, ..., elemento della convoluzione. Le righe pari generano lo stesso tipo di convoluzione ma con il filtro $\mathbf{g}$ anziché $\mathbf{h}$. $\mathbf{g}$ è chiamato filtro coniugato di $\mathbf{h}$ e rappresenta un filtro passaalto. Esso è univocamente determinato da $\mathbf{h}$ secondo la relazione

$$g_k = (-1)^k h_{L-k-1}, \qquad k = 0, \ldots, L-1.$$

$\mathbf{h}$ e $\mathbf{g}$ sono chiamati *quadrature mirror filters* (QMF). $\mathbf{g}$ è tale da restituire valori nulli se il vettore di cui calcolare la trasformata è sufficientemente regolare: in pratica i coefficienti g_k hanno $p = L/2$ momenti nulli (vedremo in seguito come si esplicita tale condizione, detta di approssimazione di ordine p). Pertanto l'output del filtro $\mathbf{h}$ è il vettore $\mathbf{x}$ rappresentato in forma più *grezza*, mentre l'output del filtro $\mathbf{g}$ rappresenta il *dettaglio* che manca all'informazione grezza per ricostruire quella di partenza.

La seconda osservazione riguarda le ultime 2 righe della matrice, dove alla prima e seconda colonna sono presenti i coefficienti h_2 e h_3 (e i corrispondenti g_2 e g_3 per il filtro passaalto). La loro presenza è dovuta alle condizioni di periodicità imposte al vettore $\mathbf{x}$.

3 Trasormata inversa

Perché la trasformata wavelet sia utile, deve essere possibile ricostruire il vettore originario di dati $\mathbf{x}$ di lunghezza N a partire dai vettori di lunghezza $N/2$ costituiti dall'output della convoluzione con il filtro passabasso $\mathbf{h}$ ed il filtro passaalto $\mathbf{g}$ in modo semplice. Il caso più semplice di trasformata inversa si verifica quando la matrice W^J è ortogonale; allora la trasformazione inversa si ottiene mediante la matrice $IW^J = W^{-J} = (W^J)^T$, vale a dire la matrice della trasformazione inversa è data dalla trasposta della matrice della trasformazione diretta:

$$W^{-J} = \begin{pmatrix} h_0 & g_0 & & & & & & & h_2 & g_2 \\ h_1 & g_1 & & & & & & & h_3 & g_3 \\ h_2 & g_2 & h_0 & g_0 & & & & & & \\ h_3 & g_3 & h_1 & g_1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & h_0 & g_0 & & \\ & & & & & & h_1 & g_1 & & \\ & & & & & & h_2 & g_2 & h_0 & g_0 \\ & & & & & & h_3 & g_3 & h_1 & g_1 \end{pmatrix}.$$

In effetti il valore degli elementi del vettore filtro $\mathbf{h}$ possono proprio essere ottenuti imponendo le condizioni di ortonormalità per la matrice W^J:

$$\begin{aligned} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 &= 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 &= 0 \end{aligned}$$

e la condizione di approssimazione di ordine $p = L/2 = 2$:

$$\begin{aligned} g_0 + g_1 + g_2 + g_3 &= 0 \\ 0g_0 + 1g_1 + 2g_2 + 3g_3 &= 0 \end{aligned}$$

Nel caso $L = 4$ la soluzione delle equazioni è data da

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ h_1 &= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ h_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ h_3 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Per altri valori di L le soluzioni vengono in genere tabulate.

4 Trasformata wavelet discreta

Quella descritta nel precedente paragrafo non è ancora la trasformata wavelet discreta, ma è molto vicina: la trasformata wavelet discreta (DWT) consiste nell'applicare la matrice W^j in modo gerarchico prima al vettore di dati $\mathbf{x}$ (W^J) di lunghezza $N = 2^J$, poi al vettore "grezzo" ottenuto dalla convoluzione di $\mathbf{x}$ col filtro passabasso $\mathbf{h}$ (di lunghezza $N/2 = 2^{J-1}$, con matrice W^{J-1}), quindi ancora al vettore di lunghezza $N/4$ risultante dalla successiva convoluzione col filtro $\mathbf{h}$, e così via fino ad un livello fissato J_0 oppure fino a che la convoluzione con il filtro passabasso non fornisca un solo elemento. La procedura prende il nome di algoritmo *piramidale* per ovvi motivi.

Per chiarire la procedura consideriamo il caso di $N = 16 = 2^4$ dati. Allora la procedura si scrive come

$$
\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{W}^4}
\begin{pmatrix} c_0^{(3)} \\ d_0^{(3)} \\ c_1^{(3)} \\ d_1^{(3)} \\ c_2^{(3)} \\ d_2^{(3)} \\ c_3^{(3)} \\ d_3^{(3)} \\ c_4^{(3)} \\ d_4^{(3)} \\ c_5^{(3)} \\ d_5^{(3)} \\ c_6^{(3)} \\ d_6^{(3)} \\ c_7^{(3)} \\ d_7^{(3)} \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{P}}
\begin{pmatrix} c_0^{(3)} \\ c_1^{(3)} \\ c_2^{(3)} \\ c_3^{(3)} \\ c_4^{(3)} \\ c_5^{(3)} \\ c_6^{(3)} \\ c_7^{(3)} \\ d_0^{(3)} \\ d_1^{(3)} \\ d_2^{(3)} \\ d_3^{(3)} \\ d_4^{(3)} \\ d_5^{(3)} \\ d_6^{(3)} \\ d_7^{(3)} \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{W}^3}
\begin{pmatrix} c_0^{(2)} \\ d_0^{(2)} \\ c_1^{(2)} \\ d_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ c_3^{(2)} \\ d_3^{(2)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{P}}
\begin{pmatrix} c_0^{(2)} \\ c_1^{(2)} \\ c_2^{(2)} \\ c_3^{(2)} \\ d_0^{(2)} \\ d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{W}^2}
\begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ d_0^{(1)} \\ c_1^{(1)} \\ d_1^{(1)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{P}}
\begin{pmatrix} c_0^{(1)} \\ c_1^{(1)} \\ d_0^{(1)} \\ d_1^{(1)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}
\xrightarrow{\mathrm{W}^1}
\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ d_0^{(0)} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}
$$

dove P indica una matrice di permutazione degli elementi del vettore che ordini prima tutti i coefficienti di tipo "c" (cioé *coarse*, risultato della convoluzione con il filtro passabasso) e dopo i i coefficienti di tipo "d" (cioé *detail*, risultato della convoluzione con il filtro passaalto). In pratica la matrice W^j di ordine j agisce solo sui coefficienti di tipo *coarse* al livello j, mentre i coefficienti *detail* allo stesso livello rimangono immutati. Pertanto alla fine il vettore trasformata wavelet sarà formato dagli elementi

$$\begin{pmatrix} c_0^{(0)} \\ d_0^{(0)} \\ d_0^{(1)} \\ d_1^{(1)} \\ d_0^{(2)} \\ d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \\ d_0^{(3)} \\ d_1^{(3)} \\ d_2^{(3)} \\ d_3^{(3)} \\ d_4^{(3)} \\ d_5^{(3)} \\ d_6^{(3)} \\ d_7^{(3)} \end{pmatrix}$$

vale a dire il coefficiente *coarse* $c_0^{(0)}$ ottenuto al quarto passo della trasformata, il coefficiente *detail* $d_0^{(0)}$ ottenuto nello stesso passo, i coefficienti *detail* $d_0^{(1)}$, $d_1^{(1)}$ ottenuti al terzo passo della trasformata, i coefficienti *detail* $d_k^{(2)}$, $k = 0, \ldots, 3$, ottenuti al secondo passo della trasformata ed infine i coefficienti *detail* $d_k^{(1)}$, $k = 0, \ldots, 7$, ottenuti al primo passo della trasformata.

Poichè la procedura è composta di operazioni lineari ortogonali, altrettanto sarà l'intera trasformata wavelet.

Per calcolare la trasformata inversa, sarà sufficiente ripetere i passi della trasformata nell'ordine inverso, partendo dal livello più piccolo della gerarchia (e quindi di solito i coefficienti $c_0^{(0)}$ e $d_0^{(0)}$), ottenendo i $c_k^{(1)}$, $k = 0, 1$; quindi partendo dai $c_k^{(1)}$ e $d_k^{(1)}$, $k = 0, 1$, ottenendo i $c_k^{(2)}$, $k = 0, 3$; quindi partendo dai $c_k^{(2)}$ e $d_k^{(2)}$, $k = 0, \ldots, 3$, ottenendo i $c_k^{(3)}$, $k = 0, \ldots, 7$; infine partendo dai $c_k^{(3)}$ e $d_k^{(3)}$, $k = 0, \ldots, 7$, ottenendo di nuovo gli x_k, $k = 0, \ldots, 15$. In tutti questi passi la matrice di trasformazione sarà sempre la matrice trasposta della trasformata wavelet di ordine pari al numero di elementi *coarse* che vengono via via ricostruiti.