• Algoritmo di Horner (relativo alla ricerca di zeri di funzione)

$$p_N(x) = x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1} x + a_N$$

se $r = \max |a_i| \Rightarrow$ radici di $p_N \in C := \{ z \in C / |z| < 1 + r \}$

calcolo di p_N in x : costo N addizioni, $2N-2$ moltiplicazioni

→ costo quasi dimezzato N addiz., $\underline{\underline{N-1}}$ moltiplicazioni

$$p_0 = 1$$
$$p_k = p_{k-1} x + a_k, \quad k = 1, 2, \dots N$$
$$p_N = p_N(x)$$

esempio:

$$p_3(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = a_3 + x \underbrace{\left(a_2 + x \left(\underbrace{a_1 + x 1} \right) \right)}$$

$$p_0 = 1$$
$$p_1 = x + a_1$$
$$p_2 = (x + a_1) x + a_2$$
$$p_3 = p_2 x + a_3 = x \left((x + a_1) x + a_2 \right) + a_3$$

$$p'_N(x_i) = \left. \frac{p_N(x) - p_N(x)}{x - x_i} \right|_{x = x_i} = q_{N-1}(x_i)$$

polinomio di grado $N-\underline{1}$

$$q_{N-1}(x) = \frac{p_N(x) - p_N(x_i)}{x - x_i} = x^{N-1} + b_1 x^{N-2} + \dots + b_{N-2} x + b_{N-1}$$

per calcolare i b_i a partire dagli a_i

$$b_0 = 1$$
$$b_k = b_{k-1} x_i + a_k, \quad k = 1, 2, \dots N-1$$

$x_1^{(0)}$ approssim. per x_1 (radice di p_N)
valuto x_1 usando Newton (richiede innesco)

$p_N(x_1^{(m)})$ e $p'_N(x_1^{(m)})$ ← HORNER

trovata la radice x_1
costruisco
$$q_{N-1}(x) = \frac{p_N(x) - p_N(x_1)}{x - x_1}$$
radici $x_2 \dots x_m$
calcolo x_2 con Newton

riapplico il procedimento.
$$t_{N-2}(x) = \frac{q_{N-1}(x) - q_{N-1}(x_2)}{x - x_2}$$

posso trovare usando il discriminante, le soluzioni (zeri) di un polinomio di grado 2

- Svantaggio: introduco errori
  - max precisione possibile
  - valutazione delle radici in ordine decrescente
    $|x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq \dots$
  - valori trovati raffinati (punto di input Newton)