16 NOVEMBRE 2006

JPEG basato sull'analisi di Fourier

1,3 megapixel

1280 x 960

inviare l'immagine 56 KB/s

colori RGB: ciascuno valore tra 0 e 1

per ogni pixel, 3 informazioni : 1 byte per ogni componente

$2^{8 \times 8}$ = 16 mln di colori

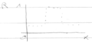
32 megabits   3,9 megabyte

$\frac{32 \cdot 10^6 \text{ bits}}{56 \cdot 10^2 \text{ bits/secondo}} \sim 0,5 \ 10^4$ sec $\rightarrow$ 1 h

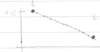
sistema di equazioni che richiede $O(n^3)$ operazioni   es: • 7 mp ≈ 350 · 10^{18} operazioni O(

otteniamo la soluzione analitica, richiede $O(n^2)$ • 〃 50 · 10^{12} operazioni O(10

algoritmo FFT $O(n \log n)$ • 10 · 7 · 10^6 operazioni O(10



1° metodo: salvare pixel x pixel le informa



bastano 2 punti

$y = \underline{a}x + \underline{b}$

$y = a + bx + cx^2$

in generale, aumentiamo il grado del polinomio → aumenta

il numero

detto

$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots$

Non si usano i polinomi :

$$y = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots$$

$\varphi_0(x) = 1$

$\varphi_1(x) = x$

$\varphi_2(x) = x^2$

$\varphi_i(x) = x^i$

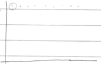
1° ind. $$y_1 = a_0 \underbrace{\varphi_0(x_1)} + a_1 \underbrace{\varphi_1(x_1)} + a_2 \underbrace{\varphi_2(x_1)} + \dots$$

possiamo calcolarli

2° ind. $$y_2 = a_0 \varphi_0(x_2) + a_1 \varphi_1(x_2) + a_2 \varphi_2(x_2) + \dots$$

$\vdots$

$$y_n = a_0 \varphi_0(x_n) + a_1 \varphi_1(x_n) + a_2 \varphi_2(x_n) + \dots + a_{n-1} \varphi_{n-1}(x_n)$$

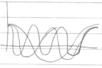


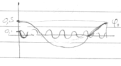
Rappresentazione tramite numero di parametri

RAPPRESENTAZIONE FISICA: valori della funzione.

Non ci sono possibilità di comprimere

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos 2\pi x + a_2 \cos 4\pi x + a_3 \cos 6\pi x + \dots + b_1 \sin 2\pi x + b_2 \sin 4\pi x + b_3 \sin 6\pi x + \dots$$





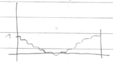
$a_0 = 0,5$

$a_1 = 0,5$

$a_{10} = 0,1$

sovrapposizione

$\Downarrow$



con Fourier bastano 3 componenti per rappresentarla

22 NOVEMBRE 2006

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

regolano
fenomeni evolutivi
(trasmissione calore lungo una barra, trasporto inquinante nell'atmosfera, evoluzione di un'epidemia in una popolazione)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

, f nota

con condizione iniziale

$x \in [a, b]$

dice dallo stato di partenza quanto vale la funzione incognita

y - incognita?

x_0 è l'estremo inferiore dell'intervallo

ESEMPIO

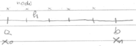
$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$y'(x) = e^x = y(x)$
$y(0) = e^0 = 1$

SOL: $y(x) = e^x$

Tranne casi particolari (f semplici) l'analisi classica non riesce a risolvere il problema

Analisi numerica: trovare la soluzione approssimata in x_i equidistanti in $[a, b]$



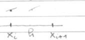
h passo di integrazione $h = x_{i+1} - x_i$

NOTAZIONE: $y_i = y(x_i)$

EULERO

Approssimazione:
sostituisco la derivata in questo con la derivata in x_i

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'(\xi) \qquad \xi \in (x_i, x_{i+1})$$



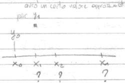
$$y'(x_i) = y'_i$$

$y'(x) = f(x, y(x))$

$y'_i = y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'_i = f(x_i, y_i) =$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$



$i = 0, \dots, n-1$

per $i=0$ $\quad y_1 = \underbrace{y_0}_{\text{noti}} + h f(\underbrace{x_0, y_0})$

per $i=1$ $\quad y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$

$i=2$ $\quad y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2)$

$\vdots$

$y_n = y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1})$

ACCUMULAZIONE DELL'ERRORE — Si basa su l'approssimazione (*), inoltre lavora su valori approssimati

Gli ultimi valori potrebbero risultare totalmente inaffidabili

23 NOVEMBRE 2006

$P_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + \dots$

$$\begin{cases} P_n(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + a_2\varphi_2(x_1) + \dots \\ P_n(x_2) = a_0\varphi_0(x_2) + a_1\varphi_1(x_2) + a_2\varphi_2(x_2) + \dots \\ \dots \end{cases}$$

$T_n(x) = a_0 + a_1\cos 2\pi x + a_2\cos 4\pi x + a_3\cos 6\pi x + \dots + b_1\sin 2\pi x + b_2\sin 4\pi x$

$T_n(0) = a_0 + \dots + a_n$

$T_n(1) = a_0 + a_1\cos 2\pi + a_2\cos \dots$

$T_n(1) = T_n(0)$

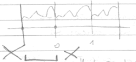
$T_n(x+1) = a_0 + a_1\cos 2\pi(x+1) + a_2\cos 4\pi(x+1) + \dots + b_1\sin 2\pi(x+1) + \dots$

$= a_0 + a_1\cos(2\pi x + 2\pi) + a_2\cos(4\pi x + 4\pi) \dots b_1\operatorname{sen}(2\pi x + 2\pi) + \dots$

$a_0 + a_1\cos 2\pi x + a_2\cos 4\pi x + \dots + b_1\operatorname{sen} 2\pi x \dots$

$T_n(x+1) = T_n(x)$ $\quad$ T_n periodica di periodo 1

PERIODICITÀ



non interessa quello che accade a destra e a sinistra dello sc...

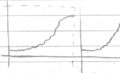
trovo il punto iniziale e il punto finale

$$\int_0^1 \cos 2k\pi x \cos 2\ell\pi x\, dx =$$

$$\int_0^1 \sin 2k\pi x \sin 2\ell\pi x\, dx = \delta_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ c & k = \ell \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos 2k\pi x \sin 2\ell\pi x\, dx = 0 \;\forall k, \ell$$

ORTOGONALITÀ



discontinuità

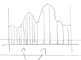
$$a_j = \int_0^1 f(x)\cos 2j\pi x\, dx$$

$$b_j = \int_0^1 f(x)\sin 2j\pi x\, dx$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\cos 2j\pi x + b_j\operatorname{sen} 2j\pi x$$

non è vero per tutte le funzioni, per esempio è v...
se la funzione ha la proprietà: $\int f^2(x)\, dx < \infty$

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\infty} \left(a_j^2 + b_j^2\right)$$ $O(N^3)$ TEOREMA di ?



diversa risoluzione, calcola meglio l'integrale

+ risoluzione
+ coeffic. ↘ 0 posso scartare quelli più piccoli
+ punti

$$f(x_K) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos 2j\pi x_K + b_j \sin 2j\pi x_K$$

$$x_K = \frac{K}{2n} \qquad 0 \leq K < 2n$$

$$\underbrace{\overset{0}{[} \qquad \overset{1}{]}}_{2n+1}$$

$2n$ l'ultimo lo scartiamo

$$f(x_K) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos \frac{2Kj\pi}{2n} + b_j \sin \frac{2Kj\pi}{2n}$$

numero incognite: $2n+2$

numero equazioni: $2n$

Però:

- $a_0 \cos \frac{2K0\pi}{2N} + \overbrace{b_0 \sin \frac{2K0\pi}{2N}}^{0}$

- $a_n \cos \frac{2Kn\pi}{2n} + b_n \sin \frac{2Kn\pi}{2n}$

$a_n \cos K\pi + b_n \operatorname{sen} K\pi$

posso diminuire due incognite: b_0, b_n

$$\begin{cases} a_j = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{K=0}^{2n-1} f(x_K) \cos \frac{2Kj\pi}{2n} \\ b_j = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{K=0}^{2n-1} f(x_K) \sin \frac{2Kj\pi}{2n} \end{cases}$$

coeffic. $4n$ operazioni x calcolare ciascun coeff.

$O(n)[2n+2n] = 4n^2 + 4n^2 = 8n^2$

$O(n^2)$

29 NOVEMBRE 2006

APPROSSIMAZIONE

f "complicata"

sostituire f con una funzione g più "semplice" (da derivare, integrare, studiare)
approssimo f con g

esempio:

g polinomio, trigonometrica, esponenziale, razionale

g polinomio approssimazione polinomiale

con quale criterio? Come scegliere un approssimante che simuli bene il fenomeno da studiare

Voglio misurare quanto g "si scosta" da f

$\| f-g \|$ norma uniforme o del massimo di Cebicev $= \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$

f continua in $[a,b]$

Voglio che g approssimi sempre meglio f

G_n = polinomi di grado n

$n \to \infty$, $\| g_n - f \| \overset{?}{\to} 0$

TEOREMA di WEIERSTRASS:

$\exists$ polinomi g_n $\| g_n - f \| \to 0$

POLINOMIO di MIGLIORE APPROSSIMAZIONE UNIFORME

$\exists ! \; P_n^* \quad \| f - P_n^* \| = \min\limits_{P_n \in \mathbb{P}_n} \| f - P_n \|$

il risultato è solo teorico
ma di fatto non sappiamo costruirlo

Approssimazione dei minimi quadrati

$(x_0, y_0) - - - - (x_n, y_n)$

$P_1(x) = ax + b$

$$S = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$$

rende minima la distanza tra le informazioni e la retta

problema del minimo in 2 variabili

$$a = \frac{S_0 t_1 - S_1 t_0}{S_0 S_2 - S_1^2}$$ coeff. di regressione

RETTA DI REGRESSIONE

$$b = \frac{S_2 t_0 - S_1 t_1}{S_2 S_0 - S_1^2}$$

$S_0 = n+1$

$S_1 = \sum x_i$

$S_2 = \sum x_i^2$

$t_0 = \sum y_i$

$t_1 = \sum x_i y_i$

La retta non è una buona approssimazione per dati che oscillano. Perchè non utilizzare un polinomio di grado d? (con d>1)

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - P_d(x_i))^2 = S$$

sistema di tipo mal condizionato Van der Monde

min sui $a_0 \dots a_d$

$P_d(x) = a_0 + a_1 x \dots + a_d x^d$

Approssimazione in media quadratica × funzione + generale, anche non continua

$$\int_a^b f(x)^2\,dx < \infty$$

$$\int_a^b G(x)^2\,dx < \infty$$

norma in media quadratica

$$\|f-G\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)-G(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\exists$ pol. G_n $\|f-G_n\|_2 \to 0$

EULERO-CAUCHY

$y'(x) = f(x, y(x))$

$y(x_0) = y_0$

$$\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h} = y'(\xi) \cong y'_i$$

ξ

$x_i \qquad x_{i+1}$

$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\, y'_i =$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\, f(x_i, y_i)$$

con $i=1$

$y_2 = y_0 + 2h\, f(x_1, y_1)$ PROBLEMA: non ho informazioni su y_1

METODI NON AUTOPARTENTI

30 NOVEMBRE 2006

TRASF. INVERSA (SINTESI) dominio fisico

↓↑

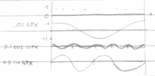
TRASFORMATA (ANALISI) dominio Fourier

$$T_{2n}(x_k) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1}\left[a_j \cos\frac{2jk\pi}{2n} + b_j \sin\frac{2jk\pi}{2n}\right] + a_n \cos\frac{2nk\pi}{2n}$$

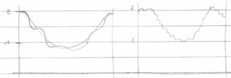
$$a_j = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f_k \cos\frac{2jk\pi}{2n} \;;$$

$$b_j = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} f_k \sin\frac{2jk\pi}{2n}$$

$$f_k := f(x_k)\,,\quad x_k = \frac{k}{2n}\,,\quad 0 \le k < 2n$$



$$f(x) = \cos 2\pi x + 0.1\cos 10\pi x + 0.5\sin 4\pi x + 1$$



$$T_n(x) = \sum_j\left[a_j \cos 2j\pi x + b_j \sin 2j\pi x\right]$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_4 = 0$

$a_5 = 0{,}1$

$b_0 = b_1 = 0$

$b_2 = 0{,}5$

$b_3 = \ldots = 0$

TRASFORMATA VELOCE di FOURIER : dati sono una potenza di 2

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \qquad e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$$

$$=$$

$$T_{2n}(x) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_j \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{2jk\pi x}{n}} + e^{-\frac{i2jk\pi}{2n}} \right) + b_j \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{i2jk\pi}{2n}} - e^{-\frac{i2jk\pi}{2n}} \right) \right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} e^{\frac{i2jk\pi}{2n}} \left(\frac{a_j}{2} + \frac{b_j}{2i} \right) + e^{-\frac{i2jk\pi}{2n}} \left(\frac{a_j}{2} - \frac{b_j}{2i} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} e^{\frac{i2jk\pi}{2n}} \left(\frac{a_j - ib_j}{2} \right) + e^{-\frac{i2jk\pi}{2n}} \left(\frac{a_j + ib_j}{2} \right)$$

$$= \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{\frac{i2jk\pi}{2n}} \longrightarrow c_j = \frac{a_j - ib_j}{2} \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}$$

$$c_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2}$$

$$T_{2n}(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{\frac{i2jk\pi}{2n}}$$

$$c_j = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f_k e^{-i\frac{2jk\pi}{2n}}$$

$$c_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-i\frac{2kj\pi}{n}}$$ $O(n^2)$ 1 sommatoria di n dati $N \cdot 2N = 2N^2$ operazioni sul numero di dati

$$c_j^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left[f_k e^{-i\frac{2kj\pi}{n}} + f_{k+\frac{n}{2}} e^{-i\frac{2(k+\frac{n}{2})j\pi}{n}}\right]$$

$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$

$$c_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k \omega^{jk}$$

$$c_j^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left[f_k\omega^{jk} + f_{k+\frac{n}{2}}\omega^{j(k+\frac{n}{2})}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left[f_k\omega^{jk} + f_{k+\frac{n}{2}}\omega^{jk}\cdot\omega^{\frac{jn}{2}}\right] = \circledast$$

$$\omega^{\frac{jn}{2}} = e^{-\frac{i2\pi}{2n}jn} = e^{-i\pi j} = \cos(-\pi j) + i\sin(-\pi j) = \cos\pi j - i\underbrace{\sin\pi j}_{0} = (-1)^j$$

$\sin\pi = 0$

$\sin 2\pi = 0$

$$\circledast = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left[f_k\omega^{jk} + (-1)^j f_{k+\frac{n}{2}}\omega^{jk}\right] =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left[f_k + (-1)^j f_{k+\frac{n}{2}}\right]\omega^{jk}$$

coeff. di ordine pari
$$c_{2m_1}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(f_k^{(0)} + f_{k+\frac{n}{2}}^{(0)}\right)\omega^{2m_1k}$$

dispari
$$c_{2m_1+1}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(f_k^{(0)} - f_{k+\frac{n}{2}}^{(0)}\right)\omega^{2m_1k}\cdot\omega^k$$

$$\Rightarrow c_{2m_1}^{(n)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n/2}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f_k^{(1)}\cdot\omega_1^{m_1k}$$ $\omega^{(2m_1+1)k} = \omega^{2m_1k}\omega^k$

$$f_k^{(1)} = f_k^{(0)} + f_{k+\frac{n}{2}}^{(0)} \qquad k=0,\dots,\frac{n}{2}-1 \qquad \omega_1 = \omega^2$$

$$f_{k+\frac{n}{2}}^{(1)} = \left(f_k^{(0)} - f_{k+\frac{n}{2}}^{(0)}\right)\omega^k$$

2 sommatorie di $n/2$ dati

$$\Rightarrow c_{2m_1+1}^{(n)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n/2}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{k+\frac{n}{2}}^{(1)}\,\omega_1^{m_1k}$$ $2\cdot\frac{n}{2}(n) = n^2$ operazioni su un numero di dati che è

Applicando lo stesso procedimento..

$C^{(n)}_{2m,1}$ — $\frac{n}{4}$ sommatorie su $\frac{n}{4}$ dati — $\frac{n}{8}$ sommatorie su $\frac{n}{8}$ dati..

"

$\frac{n}{4}$ sommatorie su $\frac{n}{4}$ dati — "

"

$\boxed{1}$

$\log_2 N \ \frac{3}{2} N$

$C^{(n)}_{2m+1}$ — $\frac{n}{4}$ sommatorie su $\frac{n}{4}$ dati — "

"

$O(n \log n)$

$\frac{n}{4}$ sommatorie su $\frac{n}{4}$ dati — "

"