06/03/2008

criteri di stop (legato alla lezione scorsa, serve per decidere quando terminare l'iterazione)

$|x_{n+1} - x_n| \leq x\ toll$

livello di tolleranza

$|x_{n+1} - x_n| < |x_{n+1}| \times toll$

la coppia di questi 2 test si dimostra essere un buon criterio di decisione per il num di iteraz.

— / fine

Interpolazione di Lagrange (detta anche interp. polinomiale di Lagrange)

Dati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ cerco la retta che passa tra questi due punti.

$P_1(x) = ax + b$ voglio trovare a e b.

Impongo il passaggio per P_0 e P_1

$$\left.\begin{array}{l} P_1(x) = y_0 = ax_0 + b \\ P_1(x) = y_1 = ax_1 + b \end{array}\right\} \leftarrow \text{risolvo questo sistema e trovo } a \text{ e } b.$$

Se ho 3 punti (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2)

cerco il polinomio $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ imponendo il passaggio per i tre punti $P_2(x_0) = y_0$ $P_2(x_1) = y_1$ $P_2(x_2) = y_2$

In generale se ho $(x_0, y_0) \ldots (x_n, y_n)$ cerco

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

$$\begin{cases} P_n(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ P_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Int. di Lag. significa cercare ~~trovare~~ un polinomio che passa (interpoli) in n punti ~~significa risolvere questo sistema.~~

I polinomi sono semplici da derivare e integrare, è per questo che l'oggetto più elementare per simulare un fenomeno si usa l'interp. di Lag.

funzioni (polinomiali)

Per trovare gli $a_0, a_1, \dots a_n$ usiamo il seguente metodo

Metodo dei Coefficienti indeterminati

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0$$
$$P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n$$

Ho un sistema di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite
Le incognite sono $a_0, a_1, \dots a_n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Matrice dei coefficienti, ha un nome particolare: matrice VAN DER MONDE

Si dimostra che $\det \neq 0$
Allora sappiamo che se $\det \neq 0 \Rightarrow \exists!$ soluzione

Si dimostra anche che questa matrice è Mal Condizionata (← è un problema, fornisce soluzioni affette da forti perturbazioni, cioè dà soluzioni diverse a seconda di chi la risolve, vedremo poi meglio...)

Si Usa quindi un'altra alternativa:

Metodo dei Polinomi Fondamentali di Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{K=0}^{n} l_{n,K}(x)\, y_K = l_{n,0}(x)\, y_0 + l_{n,1}(x)\, y_1 + \dots + l_{n,n}(x)\, y_n$$

Polinomi fondamentali di Lagrange

$$l_{n,K}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{K-1})(x-x_{K+1})\dots(x-x_n)}{(x_K-x_0)\dots(x_K-x_{K-1})(x_K-x_{K+1})\dots(x_K-x_n)}$$

Si dimostra che questi polinomi hanno questa proprietà:

$$l_{n,K}(x_S) = \begin{cases} 0 & K \neq S \\ 1 & K = S \end{cases}$$

Vantaggi: è comodo se molti $y_k = 0$ perché ho pochi addendi da sommare

Svantaggio: al den. ho queste differenze $(x_k - x_{k-1})$ e $(x_k - x_{k+1})$ che potrebbero essere molto piccole, che è un processo da evitare nei calcoli numerici (per questo motivo questo metodo di fitto è poco usato nella pratica.) Fenomeno della Cancellazione Numerica

Interpolazione di Lagrange mediante la rappresentazione di Newton

Data la funzione f introduciamo la differenza divisa del primo ordine su due punti

$$[a, b; f] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consideriamo la diff. div. di ordine 2 su 3 punti

$$[a, b, c; f] = \frac{[b, c; f] - [a, b; f]}{c - a}$$

diff. div. di ord. 3 su 4 punti

$$[a, b, c, d; f] = \frac{[b, c, d; f] - [a, b, c; f]}{d - a}$$

Queste diff. div. hanno senso anche se i punti sono molto vicini tra di loro, infatti in questo caso ho la derivata prima, seconda, ...

infatti

$b \to a$ f ha abbastanza derivate.

$[a, a; f] = f'(a)$

$[a, a, a; f] = \frac{f''(a)}{2}$

rappresentazione mediante le differenze divise

$$P_n(x) = L_n(f, x) = y_0 + [x_0, x_1; f](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2; f](x - x_0)(x - x_1) + \dots + [x_0, \dots, x_n; f](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Ripetiamo: ha senso anche con piccole differenze in quanto in questo caso particolare ci troviamo nel caso delle derivate (ammesso che f abbia abbastanza derivate).

Si dimostra che il resto (errore) ~~[illegible]~~ è dato da:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(f, x) = \underbrace{[x, x_0 \dots x_n; f]}_{= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}} (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

ossia la funzione originaria si discosta dall'originale di al più $R_n(x)$.

Mi dice che la stima non è molto buona perché questa quantità potrebbe essere molto grande.

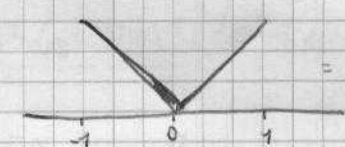
ho un caso particolare:

$$\text{se } f \in \mathcal{P}_n \Rightarrow R_n(f, x) = \emptyset \Rightarrow f(x) = L_n(f, x)$$

Polinomio di grado al più n.

La funt. coincide proprio con l'interpolante di Lagrange.

$$|R_n(f, x)| \le C\, E_n(f)\, (1 + \lambda_n)$$



$= |x|$

$E_n(f)$ = errore di migliore approssimazione uniforme

$$= \min_{P \in \mathcal{P}_n} \max_{[a,b]} |f(x) - P(x)|$$

tra tutti i polinomi scelgo quella che si discosta di meno da $f(x)$.

λ_n = costanti di lebesgue =

$$= \sum_{k=0}^{n} |l_{n,k}(x)| \ge C \lg n \quad \text{(scelta di } x_i\text{)}$$

f è costante

$f \in C^0 \Rightarrow E_n(f) \to 0$

$f \in C^1 \Rightarrow E_n(f) \sim \frac{1}{n}$

$f \in C^2 \Rightarrow E_n(f) \sim \frac{1}{n^2}$

$\boxed{\begin{array}{l} C^1 = \text{ha 1 deriv.} \\ C^2 = \text{ha 2 derivate} \end{array}}$

λ_n ~~[illegible]~~ crescono sempre, dipendono solo dalla scelta dei punti

Scelta migliore : ~~xxx~~ x_i come zeri di Cebicev $\Rightarrow \lambda_n \sim C \lg n$

" peggiore : x_i equidistanti $\Rightarrow \lambda_n \sim C e^n$

cresce molto

crescono come $\log n$ (crescono sempre, ma lentamente)

Quindi nel caso peggiore

$$|R_n(f,x)| \leq C \underbrace{E_n(f)}_{\downarrow\, 0} \underbrace{(1+e^n)}_{\downarrow\, \infty}$$

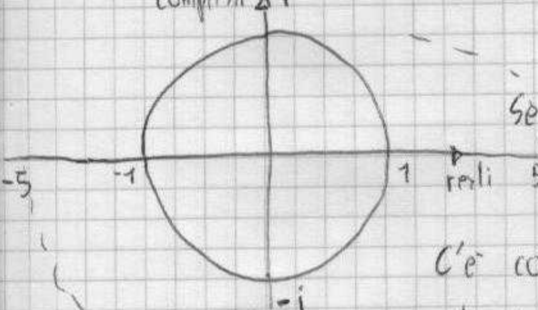
← È per questo che nel caso di $|x|$ l'int. di Lag. mi dà un ~~massimo~~ andamento ondulatorio.

Supponiamo che $f \in C^1$

$$|R_n(f,x)| \leq C E_n(f)(1+\lambda_n) = C \begin{cases} \frac{1}{n}(1+C\lg n) = \frac{1}{n} + \frac{\lg n}{n} \to 0 & \text{se } x_i = \text{zeri di Cebicev} \\ \frac{1}{n}(1+e^n) \to \text{diverge.} & \text{se } x_i \text{ equidistanti} \end{cases}$$

Fenomeno di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$



$L_n(f,x)$ nodi equidistanti in $[-5,5]$

Se estendiamo $f(x)$ nel campo dei complessi abbiamo situazioni in cui la funzione assume $\frac{1}{0}$ $\left[f(i) = \frac{1}{0}\right]$

C'è convergenza se gli x_i sono dentro il cerchio di raggio 1 perché non vado a toccare i punti singolari. Se considero ~~cerchi~~ x_i in cerchi più grandi ~~trova~~ c'è diverg. perché questi comprendono anche i punti singolari.

Quadratura Numerica

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Somma di quadratura (x_i = nodi, w_i = pesi)

metodi per la scelta degli x_i e w_i:

1) nodi equidistanti (Newton-Cotes)
2) ~~polinomi~~ zeri polinomi ortogonali (Gauss)

Continua la prox volta.