ALGORITMO DI CHOLESKI

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$$

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2} \quad j = 1, \dots, i-1$$

TRAMITE LA FATT. LU POSSO CALCOLARE L'INVERSA DI A

$PA = LU \qquad P^{-1} = P$

$A = PLU$

$I = A^{-1} PLU$

$U^{-1} = A^{-1} PL \qquad U^{-1} L^{-1} = A^{-1} P \qquad U^{-1} L^{-1} P^{-1} = A^{-1} \qquad A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P$

03/03/08

CALCOLO DI AUTOVALORI

$Ax = \lambda x$ CERCO $\lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ $\exists\ n$ AUTOVALORI

~~$x \neq 0$~~ E n CORRISPONDENTI AUTOVETTORI $(A - \lambda I)x = 0$ DEVE AMMETTERE SOLUZIONI $\neq$ DA QUELLA BANALE $(x = 0)$, QUESTO ACCADE SE $\det(A - \lambda I) = 0$; $\det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$ È UN POLINOMIO (POL. CARATTERISTICO DI GRADO n IN λ)

CI SONO MOLTI METODI PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E AUTOVETTORI (È RICHIESTO L'AUTOVALORE DI MAX MODULO O IL PIÙ PICCOLO E SONO RICHIESTI TUTTI, LA MATRICE HA PARTICOLARI PROPRIETÀ ...)

TEOREMA DI GERSCHGORIN (LOCALIZZAZIONE DEGLI AUTOVALORI)

$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$

$c_j = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n$

OGNI AUTOVALORE $\in$ ALL'INSIEME $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ CON

$R_i = \{ z : |z - a_{ii}| \leq r_i \}$

$C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j, \quad C_j = \{ z_j : |z - a_{jj}| \leq c_j \}$

OGNI AUTOVALORE $\in R \cap C$

ES. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1/2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $R_1 = \{|z-1| \leq 0\} \Rightarrow \lambda_1 = 1$ | $C_1 = \{|z-1| \leq \frac{1}{2}\}$

$R_2 = \{|z-2| \leq 7\}$ | $C_2 = \{|z-2| \leq 0\} \Rightarrow \lambda_2 = 2$

$R_3 = \{|z-4| \leq \frac{1}{2}\}$ | $C_3 = \{|z-4| \leq 7\}$

$\lambda \in R \cap C$

METODO DELLE POTENZE (TROVA AUTOV. MAX MODULO SE SO CHE È UNICO) 1ª IPOTESI

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots |\lambda_n|$

POICHÉ È UNICO, λ_1 È REALE (PERCHÉ SE FOSSE COMPLESSO, AVREI 2 AUTOVALORI CON MAX MODULO)

$x_1 \dots x_n$ n AUTOVETTORI LINEARI INDIPENDENTI 2ª IPOTESI

$v_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$

$v_1 = A v_0 = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \dots + \alpha_n A x_n =$

$= \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n =$

$= \lambda_1 \left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n\right)$

$v_2 = A v_1 = \alpha_1 \lambda_1 A x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n A x_n =$

$= \alpha_1 \lambda_1^2 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^2 x_n = \lambda_1^2 \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} x_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2} x_n\right]$

$v_3 = A v_2 = \lambda_1^3 \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^3}{\lambda_1^3} x_2 + \dots + \alpha_n x_n \frac{\lambda_n^3}{\lambda_1^3}\right]$

$v_m = \lambda_1^m \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} + \dots + \alpha_n x_n \frac{\lambda_n^m}{\lambda_1^m}\right]$

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(v_{m+1})_k}{(v_m)_k} = \lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_1^{m+1} \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \frac{\lambda_2^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}} + \dots + \alpha_n x_n \frac{\lambda_n^{m+1}}{\lambda_1^{m+1}}\right]_k}{\lambda_1^m \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} + \dots + \alpha_n x_n \frac{\lambda_n^m}{\lambda_1^m}\right]_k} =$$

$$\lim_{m\to\infty} = \lambda_1 \frac{[\alpha_1 x_1]_k}{[\alpha_1 x_1]_k} = *$$ CON $m \to \infty$ $\frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} \to 0$ $* = \lambda_1$

METODO DELLE POTENZE INVERSE (SERVE PER RAFFINARE UN'APPROSSIMAZ. GROSSOLANA DI UN AUTOVALORE

SIA p UN'APPROSSIMAZIONE DELL'AUTOVALORE DI A

PROPRIETÀ

SE λ AUTOVALORE PER $A \Rightarrow \lambda^{-1}$ AUTOVALORE PER A

DIM.

$$Ax = \lambda x \qquad A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \qquad x = \lambda A^{-1}x$$

$$\lambda^{-1}x = A^{-1}x$$

$$(A - pI)x = Ax - px = \lambda x - px = (\lambda - p)x$$

$$(A - pI)x = (\lambda - p)x$$ $\lambda - p$ È UN AUTOVALORE PER $(A - pI)$

PER LA $\boxed{\text{PROPR}}$ $(\lambda - p)^{-1}$ AUTOV. $(A - pI)^{-1}$

$\mu = \frac{1}{\lambda - p}$ SE $\lambda \simeq p$ (APPROSSIMA BENE) ALLORA $\frac{1}{\lambda - p}$ GRANDE (POSSO USARE METODO DELLE POTENZE PER CALCOLARE μ)

$$\lambda = \frac{1}{\mu} + p$$

EQ. NON LINEARI

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x\cos x + \lg(x^2+1) + 7x^{0.1} + \operatorname{arctg} x = 0$$

DATA $f(x)$ NON LINEARE, IL CALCOLO NUMERICO FORNISCE DEGLI STRUMENTI, CHIAMATI ~~METODI~~ PROCEDIMENTI ITERATIVI IN MODO CHE PARTENDO DA UN VALORE INIZIALE x_0 POSSO COSTRUIRE UNA SEQUENZA

$$x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \rightarrow \bar{x} \rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

DATO x_0 $\quad x_{n+1} = g(x_n)$ $\quad g$ FUNZ DI ITERAZIONE

NEWTON - RAPHSON, METODO DELLE TANGENTI (PER TROVARE g) (HA CONVERGENZA 2)

CONDIZIONE $f' \neq 0$ E L'INTERVALLO CHE CONSIDERO DEVE ESSERE PICCOLO

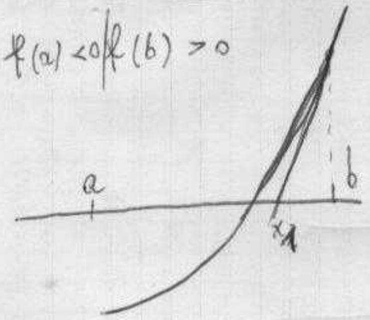
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

f CONTINUA

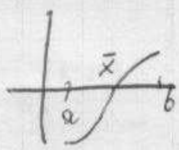
$[a,b]$ $f(a)f(b) < 0$

PROPR. CHE DEVONO ESSERE SODDISFATTE DA f PER QUALSIASI METODO ITERATIVO

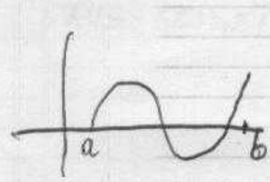
$f(a) < 0$ $f(b) > 0$



CIOÈ



INOLTRE $f'' \neq 0$ PER EVITARE



$x_0 = b$

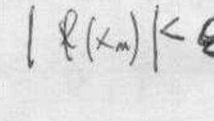
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

x_{n+1} SARÀ L'ASCISSA DELL'INTERSEZIONE CON L'ASSE DELLE X DELLA TANGENTE DELLA f IN $(x_n, f(x_n))$

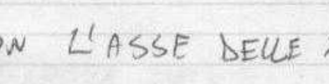
CRITERI DI STOP

$$|f(x_n)| < \varepsilon$$

PER FUNZIONI CHE CRESCONO MOLTO RAPIDAMENTE O MOLTO LENTAMENTE QUESTO CRITERIO NON FUNZIONA



$f(x_n)$ NON È $< \varepsilon$ MA È UNA BUONA APPROSSIMAZIONE



$f(x_n) < \varepsilon$ MA NON È UNA BUONA APPROSSIMAZIONE