Numeri complessi:

$a+ib$

$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x$

$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x \qquad \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x \qquad \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

31/03/2008

$(x_0,y_0)(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)$ punti del fenomeno dato

retta di REGRESSIONE

$ax+b=P_1(x)$ retta (polinomio di 1° grado) che si scosti il "meno possibile" dai punti dati.

~~Vogliamo che la seguente quantità~~ Il "meno possibile" significa che vogliamo che la seguente quantità:

$S=\sum_{i=0}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ sia minima su a e b

Con questa tecnica non chiediamo che la funzione passi per i punti dati, ma che abbia una buona approssimazione del fenomeno dato.

minima di una funzione di 2 variabili

Minimi Quadrati (tecnica di approssimazione nelle applicazioni)

$$a=\frac{S_0t_1-S_1t_0}{S_2S_0-S_1^2} \qquad b=\frac{S_2t_0-S_1t_1}{S_2S_0-S_1^2}$$

Si dimostra (non lo facciamo) che $\exists\, a,b$ tale che S è minima e a e b sono dati ~~dalle~~ da queste ~~espressioni~~ formule.

$S_0=n+1$

$S_1=\sum x_i$

$S_2=\sum x_i^2$

$t_0=\sum y_i$

$t_1=\sum x_iy_i$

La retta non dà in genere una approssimazione flessibile, si perde l'andamento ondulatorio del fenomeno, quindi invece di costruire la retta di regressione possiamo costruire polinomi di grado più alto →

Però in questo caso ci riduciamo a dover calcolare il minimo di una funzione di più variabili, il che porta a sistemi <u>malcondizionati</u>, quindi di fatto questi polinomi non vengono mai utilizzati.

Calcolo degli Zeri di un Polinomio.

$$P_N(x) = x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_{N-1}x + a_N$$

c'è un Th. di carattere generale molto grossolano che mi dice che:

$$r = \max_{1\le i\le N} |a_i| \quad , \quad \text{radici} \in C = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \le 1 + r \}$$

Cerchio del piano complesso con raggio $1+r$

Per calcolare $P_N(x)$ devo fare N addizioni e $2N-2$ moltiplicazioni, che è un <u>costo alto</u>.

Vogliamo abbassare questo costo computazionale, Il seguente alg. fa ~~que~~ proprio questo.

Algoritmo di <u>HORNER</u>

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = 1 \\ p_k = p_{k-1}x + a_k \;,\; k = 1,2,\dots N \;,\; p_N = P_N(x) \end{array}\right\} \text{Costo: } N \text{ add.}, \; N-1 \text{ molt.}$$

Es:

$$P_3(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = a_3 + x(a_2 + x(a_1 + x))$$

l'alg. si basa su questa nidificazione.

Applichiamo l'alg.

$$p_0 = 1$$
$$p_1 = x + a_1$$
$$p_2 = (x + a_1)x + a_2$$
$$p_3 = p_2 x + a_3 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

Sappiamo che il metodo di Newton-Raphson richiede:

$$p_N(x_i) \quad e \quad p_N'(x_i)$$

Con Horner calcoliamo i p_N. I p_N' si trovano con queste formule:

$$p_N'(x_i) = \left.\frac{p_N(x)-p_N(x_i)}{x-x_i}\right|_{x=x_i} = q_{N-1}(x_i)$$

$$q_{N-1}(x) = \frac{[p_N(x)-p_N(x_i)]}{x-x_i} = x^{N-1}+b_1x^{N-2}+\dots+b_{N-2}x+b_{N-1}$$

quoziente di grado N-1 (calcolato nel punto x_i mi dà proprio la derivata prima).

Si dimostra questa uguaglianza

Questi coefficienti si calcolano nel seguente modo

$b_0 = 1$

$b_k = b_{k-1}x + a_k \quad , k = 1, \dots N-1$

[Il nostro obiettivo è calcolare Newton-Raphson senza dover calcolare la derivata prima]

Supponiamo che $x_1^{(0)}$ sia un'approssimazione iniziale di x_1. Voglio raffinarla, uso allora Newton-R.

Dati $p_N(x_i)$ e $p_N'(x_i)$ trovo un'appross. molto accurata x_1. Come faccio per le altre radici? Considero:

$$q_{N-1}(x) = \frac{p_N(x)-p_N(x_1)}{x-x_1}$$ ← questo pol. ha ~~tra~~ le stesse radici di p_N tranne x_1

Ora dato $x_2^{(0)}$ con Newton trovo un'appross. x_2

$$t_{N-2}(x) = \frac{q_{N-1}(x)-q_{N-1}(x_2)}{x-x_2}$$ ← ha le stesse radici (sono N-2) di q_{N-1} tranne per x_2

Ora considero $x_3^{(0)}$ x_3 radice di t_{N-2}, con Newton → x_3

Vado avanti fino a quando avrò un pol. di 2° grado le cui radici vanno trovate a mano.

<u>Osservazione</u>: Accumulo errori ad ogni passaggio, più vado avanti più le radici sono affette ad errori.

C'è una strategia per ovviare al problema dell'accumolo di errori:

1) Calcolo le radici in ordine crescente :

$x_1 \le x_2 \le x_3 \dots$

2) Considero $x_1, x_2, x_3 \dots x_n \dots$ come punti di partenza per Newton

Con queste tecnica riesco a ridurre l'errore

Problema del malcondizionamento

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1.00001\, y = 0 \end{cases}$$

i coefficienti angolari sono quasi uguali, quindi le rette sono quasi parallele. Anche qui. Ma le radici nei due sistemi sono enormemente diverse. Quindi per perturbazioni minime si hanno enormi variazioni nei risultati.

$x = 100001$

$y = 100000$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0.99999\, y = 0 \end{cases}$$

$x = -99999$

$y = -100000$

Norma di Vettore :

1) $\|v\| > 0$ se $v \ne 0$

2) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ ← disuguaglianza Triangolare

Esempi di norma:

$\|u\|_\infty = \max |u_i|$

$\|u\|_1 = \sum |u_i|$

$\|u\|_2 = \sqrt{\sum u_i^2}$

norma di Matrice

1) $\|A\| > 0$, $A \neq 0$

2) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$

4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Es:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \max |\lambda_i|$$

Indice di Condizionamento ← (Imp.)

$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Si dimostra che la matrice è ben condizionata quanto più $K(A)$ è piccolo.

$K(A)$ è sempre ≥ 1

Se $K(A)$ cresce come n la matrice è ben cond.

Se $K(A)$ si comporta come n^5, e^n è mal cond.