28/02/08

METODI OPERATIVI (JACOBI)

MATEMATICA COMPUTAZIONALE

GAUSS - SEIDEL

$$x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

SOVRARILASSAMENTO

$$r_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)} \right]$$

$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\, r_i^{(k)}$ , $\omega = 1$ . RITROVO GAUSS-SEIDEL

FATT. LU

INTERPRETA IL METODO DI GAUSS COME SUCCESSIONE FINITA DI TRASF. DELLA MATRICE DEI COEFF. A DEL TERMINE NOTO b, CIOÈ COME MOLTIPLICAZIONE DI A E DI b [VOGLIAMO TROVARE MATRICI CHE CI PERMETTONO DI ARRIVARE AD UNA MATR. TRIANG.] PER UN NUMERO FINITO DI OPPORTUNE MATRICI. QUESTA INTERPRETAZIONE CONSENTIRÀ DI RIFORMULARE L'ALG. DI GAUSS IN 2 PARTI DISTINTE ~~UNA~~ LA PIÙ COSTOSA IN TERMINI DI OPERAZIONI ARITMETICHE, DETERMINERÀ UNA MATRICE NON SINGOLARE G TALE CHE $GA = U$ È DI FORMA TRIANGOLARE SUPERIORE, L'ALTRA, UTILIZZANDO G, CI CONSENTIRÀ DI RISOLVERE IL SISTEMA $Ax = b$

$GAx = Gb \Rightarrow \underbrace{Ux = \bar{b}}_{\text{RISOLVERE UN SISTEMA TRIANG. SUP.}}$ $\quad GA = U \quad \bar{b} = Gb$

UTILE PER RIDURRE IL COSTO OPERATIVO NELLE APPLICAZIONI. LO SCAMBIO DI 2 EQ. DEL SISTEMA $Ax = b$ (RIGA i-ESIMA CON LA J-ESIMA) PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME PRODOTTO DA SINISTRA PER LE MATRICI OTTENUTE DALLA MATRICE I DOVE HO SCAMBIATO LE RIGHE J E i

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{ESEMPIO:} \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}}$$

COSÌ LA SOSTITUZIONE NEL SISTEMA DELL'EQ i-ESIMA CON LA MEDESIMA PIÙ LA j-ESIMA MOLTIPLICATA PER IL COEFF. $m_{ij}$ PUÒ ESSERE OTTENUTO MOLTIPLICANDO DA SINISTRA $Ax=b$ PER LA MATRICE

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \; m_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PERTANTO CON IL METODO DI G IN REALTÀ DETERMINA IMPLICITAMENTE DELLE MATRICI $P_1 \, P_2 \cdots P_{n-1}$ (DI TIPO I SE NON AVVENGONO SCAMBI DI EQ. E DI TIPO $P_{ij}$ ALTRIMENTI) E DELLE MATRICI $M_1 \, M_2 \cdots M_{n-1}$

$$M_j = M_{nj} \cdots M_{j+2,j} \, M_{j+1,j} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & m_{j+1,j} & \\ & m_{j+2,j} & 1 \end{pmatrix} \; j$$

TALI CHE IL NUOVO SISTEMA

$$M_{n-1} P_{n-1} \cdots M_1 P_1 \} Ax = \underbrace{M_{n-1} P_{n-1} \cdots M_1 P_1 b}_{\bar{b}}$$

ASSUME LA FORMA TRIANG. SUP $Ux = \bar{b}$

$$M_{n-1} P_{n-1} \cdots M_1 P_1 A = U$$

$$G = M_{n-1} P_{n-1} \cdots M_1 P_1$$

$GA = U$ $\quad O\left(\frac{n^3}{3}\right)$ $\quad \frac{n^3}{3}$ COSTO COMPUTAZIONALE $\qquad$ FACTOR (1ª PARTE)

PER RISPARMIARE LO SPAZIO OCCUPATO DAI MOLTIPLICATORI POSSIAMO UTILIZZARE LA PARTE NULLA (TRIANG. INFERIORE) DELLA MATRICE A

VETTORE PIVOT $(k) = \begin{cases} k & \text{SENZA SCAMBI} \\ r & \text{SE SCAMBIO LA RIGA K-ESIMA CON LA R-ESIMA} \end{cases}$

SOLVE ($2^a$ PARTE)

RISOLVE IL SISTEMA $Ux = \bar{b}$

ESEMPIO:

SUPPONIAMO DI CONOSCERE $GA = U$ E DEVO RISOLVERE $\begin{cases} Ax_1 = b_1 \\ Ax_2 = b_2 \\ Ax_3 = b_3 \end{cases}$

IL GUADAGNO STA NEL FATTO CHE NELLA FATTORIZZAZIONE LU LA MATRICE U VIENE CALCOLATA UN UNICA VOLTA CONSENTENDOMI DI LAVORARE CON SISTEMI TRIANGOLARI

---

$$M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1 A = (\bar{M}_{n-1} \dots \bar{M}_1)(P_{n-1} \dots P_1) A$$

$\bar{x}$ ← SIGNIFICA CHE CONSIDERO GLI SCAMBI DI RIGHE EFFETTUATI CON GAUSS

$$\bar{M} = \bar{M}_{n-1} \dots \bar{M}_1 \qquad \bar{M} P A = U$$

$$P = P_{n-1} \dots P_1 \qquad PA = \bar{M}^{-1} U = LU$$

$M_i$ MATRICE DI MOLTIPLICATORE

$P_i$ MATRICE DI PERMUTAZIONE

$$\bar{M}^{-1} = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\bar{m}_{21} & 1 & 0 \dots & 0 \\ -\bar{m}_{31} & -\bar{m}_{32} & 1 & 0 \dots 0 \\ -\bar{m}_{41} & -\bar{m}_{42} & -\bar{m}_{43} & 1 \; 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \rightarrow PAx = Pb \rightarrow LUx = Pb \rightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases}$$

---

METODO DI CHOLESKI: PASSIAMO DA $n^3/3$ A $n^3/6$

- A SIMMETRICA
- A DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow u_{ii} > 0$

NON CI SONO SCAMBI $P = I$ $\qquad A = LDU_1$ (TRIANG. DIAG. UNITARIA)

$d_{ii} = u_{ii}$
$d_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$$U_1 = L^T \qquad A = LDL^T = L_1 L_1^T$$

DOVE $L_1 = LD^{\frac{1}{2}}$

ALGORITMO DI CHOLESKI

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$$

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2} \quad j = 1, \dots, i-1$$

TRAMITE LA FATT. LU POSSO CALCOLARE L'INVERSA DI A

$PA = LU \qquad P^{-1} = P$

$A = PLU$

$I = A^{-1} PLU$

$U^{-1} = A^{-1} PL \qquad U^{-1} L^{-1} = A^{-1} P \qquad U^{-1} L^{-1} P^{-1} = A^{-1} \qquad A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P$

03/03/08

CALCOLO DI AUTOVALORI

$Ax = \lambda x$ CERCO $\lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ $\exists\, n$ AUTOVALORI

~~$x \neq 0$~~ E $n$ CORRISPONDENTI AUTOVETTORI $(A - \lambda I)x = 0$ DEVE AMMETTERE SOLUZIONI $\neq$ DA QUELLA BANALE $(x = 0)$, QUESTO ACCADE SE $\det(A - \lambda I) = 0$; $\det(A - \lambda I) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$ È UN POLINOMIO (POL. CARATTERISTICO DI GRADO $n$ IN $\lambda$)

CI SONO MOLTI METODI PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E AUTOVETTORI (È RICHIESTO L'AUTOVALORE DI MAX MODULO O IL PIÙ PICCOLO E SONO RICHIESTI TUTTI, LA MATRICE HA PARTICOLARI PROPRIETÀ ...)

TEOREMA DI GERSCHGORIN (LOCALIZZAZIONE DEGLI AUTOVALORI)

$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n$

$c_j = \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n$

OGNI AUTOVALORE $\in$ ALL'INSIEME $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$ CON

$R_i = \{ z : |z - a_{ii}| \leq r_i \}$

$\mathbb{C} = \bigcup_{j=1}^{n}, \quad C_j = \{ z : |z - a_{jj}| \leq c_j \}$