26/03/2008

$$P_N(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_N\varphi_N(x)$$

Invece di calcolare gli a_i della funzione interpolante con un sistema lineare di equazioni che mi richiederebbe N^3 operazioni uso questa formula

$$a_i = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} \varphi_i(x_k)\cdot s_k$$

Il costo scende a N^2

$$T_N(x) = a_0\cos 2\cdot 0\pi x + a_1\cos 2\cdot 1\pi x + a_2\cos 2\cdot 2\pi x + a_3\cos 2\cdot 3\pi x + \ldots + b_0\sin 2\cdot 0\pi x +$$
$$+ b_1\sin 2\cdot 1\pi x + b_2\sin 2\cdot 2\pi x + \ldots \qquad x\in[0,1]$$

$$T_N(0) = a_0\cos 0 + a_1\cos 0 + \ldots + b_0\,\mathrm{sen}\,0 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$$

$$T_N(1) = a_0\cos 0 + a_1\cos 2\pi + a_2\cos 4\pi + \ldots + b_0\,\mathrm{sen}\,0 + b_1\sin 2\pi + b_2\sin 4\pi + \ldots =$$
$$= \sum_k a_k\cos 2k\pi + \sum_k b_k\,\mathrm{sen}\,2k\pi = \sum_k a_k$$

Proprietà del polinomio trigonometrico:

1) Periodico. $T_N(x+1) = T_N(x)$ (Nella realtà i segnali non sono praticamente mai periodici).

$$\int_0^1 \cos 2k\pi x\cdot\cos 2l\pi x\,dx = c\,\delta_{k,l}\begin{cases} =\emptyset & \text{se } k=l\\ \neq\emptyset & \text{altrimenti}\end{cases}$$
$$\parallel$$
$$\int_0^1 \sin 2l\pi x\cdot\sin 2k\pi x\,dx$$

$$\int_0^1 \sin 2k\pi x\cdot\cos 2l\pi x\,dx = \emptyset$$

2) F. base ortogonali

$$\begin{cases} a_j = \dfrac{1}{2(N+1)}\sum_k s_k\cos 2j\pi x_k\\[2mm] b_j = \dfrac{1}{2(N+1)}\sum_k s_k\sin 2j\pi x_k\end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a_j = \int f(x)\cos 2j\pi x\,dx\\[2mm] b_j = \int f(x)\sin 2j\pi x\,dx\end{cases}$$

3) Teorema di Parseval

$$\int f^2(x)dx = \sum_K (a_k^2 + b_k^2)$$

Se vogliamo calcolare l'energia di una funzione lo possiamo fare sia nello spazio fisico che funzionale o parametrico

$$\int f^2(x)\,dx = E = \sum_K (a_k^2 + b_k^2)$$

Quantità finita.

Il teorema di Parseval ci assicura che la somma di questi infiniti termini converge, quindi è finita.

Qui non possiamo scartare nulla, tutti i valori di f sono ~~egua~~ egualmente importanti, invece sappiamo che i coefficienti tendono a $\emptyset$ e anzi lo devono fare anche velocemente, quindi sono autorizzato a scartare ~~una~~ tutti i coefficienti piccoli.

Il tutto ha costo $O(N^2)$

In realtà calcolare la trasformata di Fourier con questo costo è ancora troppo oneroso. (Ad es. ~~pe~~per una macchina fotografica abbiamo ancora bisogno di un computer).

La possibilità di implementare la trasf. di Fourier su circuito integrato è ciò che ne ne decretato il successo.

$$T_N(x) = a_0 \cos 2\cdot 0\pi x + a_1 \cos 2\cdot 1\pi x + a_2 \cos 2\cdot 2\pi x + \dots + a_N \cos 2\cdot N\pi x + b_0 \sin 2\cdot 0\pi x + b_1 \sin 2\cdot 1\pi x + \dots + b_N \sin 2\cdot N\pi x$$

ho $2N$ punti ma $2N+2$ coefficienti da ricostruire, allora il problema non è ben posto. Notiamo però che $\sin 2\cdot 0\pi x$ e $\sin 2N\pi x$ valgono sempre $\emptyset$ quindi non c'è modo di trovare b_0 e b_N e quindi abbiamo ora che il sistema è ben determinato, abbiamo $2N$ punti e $2N$ incognite.

è $\emptyset$ perché i punti sono equidistanti quindi $x_k = \frac{K}{2N}$

$$a_J = \frac{1}{2N}\sum_{K=0}^{2N-1} S_K \cos\frac{2JK\pi}{2N}$$

$$b_J = \frac{1}{2N}\sum_{K=0}^{2N-1} S_K \sin\frac{2JK\pi}{2N}$$

ANALISI di Fourier.

Il processo inverso, dai coefficienti voglio la formula, è detta ~~sintesi~~ SINTESI di Fourier.

Numeri complessi:

$a+ib$

$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x$

$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x \qquad \cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x \qquad \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

31/03/2008

$(x_0,y_0)(x_1,y_1)\ldots(x_n,y_n)$ punti del fenomeno dato

retta di REGRESSIONE

$ax+b=P_1(x)$ retta (polinomio di 1° grado) che si scosti il "meno possibile" dai punti dati.

~~Vogliamo che la seguente quantità~~ Il "meno possibile" significa che vogliamo che la seguente quantità:

$S=\sum_{i=0}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ sia minima su a e b

Con questa tecnica non chiediamo che la funzione passi per i punti dati, ma che abbia una buona approssimazione del fenomeno dato.

minima di una funzione di 2 variabili

Minimi Quadrati (tecnica di approssimazione nelle applicazioni)

$$a=\frac{S_0t_1-S_1t_0}{S_2S_0-S_1^2} \qquad b=\frac{S_2t_0-S_1t_1}{S_2S_0-S_1^2}$$

Si dimostra (non lo facciamo) che $\exists\, a,b$ tale che S è minima e a e b sono dati ~~dalle~~ da queste ~~espressioni~~ formule.

$S_0=n+1$

$S_1=\sum x_i$

$S_2=\sum x_i^2$

$t_0=\sum y_i$

$t_1=\sum x_iy_i$

La retta non dà in genere una approssimazione flessibile, si perde l'andamento ondulatorio del fenomeno, quindi invece di costruire la retta di regressione possiamo costruire polinomi di grado più alto →