CONDIZIONAMENTO

07/04

1) $Ax = b$

$b + \Delta b$ introduciamo una perturbazione, un errore sul termine noto.

Il sistema sarà quindi del tipo

2) $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$

Sottraendo la ② alla ①

$$A \Delta x = \Delta b$$

$$\Delta x = A^{-1} \Delta b$$

So anche che

$$\|Ax\| = \|A^{-1} \Delta b\| \leq \|A^{-1}\| \, \|\Delta b\|$$

$$b = \Delta x \implies \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

Calcoliamo ora il rapporto di variazione che si presenta nella sol. tratto la norma stessa e il vettore x

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|A\| \, \|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|\Delta b\|}{\|A\| \, \|X\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \, \|A^{-1}\| \, \|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Questo che ho ricavato misura l'errore relativo sul termine noto $\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$. Il coeff. moltiplicativo $\|A\| \, \|A^{-1}\|$ viene detto <u>CONDIZIONAMENTO</u> e misura quanto è ben condizionata la matrice. Se tale quantità fosse piccola allora la soluzione non sarebbe affetta da errore. Purtroppo però non è così:

$$I = A^{-1} \cdot A \qquad \|I\| = 1 = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \, \|A\|$$

Il condizionamento cresce con la dim. della matrice se ben condizionato $K(A)$ cresce con n altrim., se la matr. è malcondizionata, $K(A)$ cresce come n^2 o peggio.

GRAFICA - CURVE DI BEZIER

CAGD: computer aided graphic design

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{con } x \in [0,1],\ f \in C([0,1])$$

Questi polinomi hanno proprietà "MIMICHE", cioè simulano bene il comportamento della funzione f.

$$\underset{\text{NUM PUNTI}}{B_n}(\underset{\text{CONTROL POL}}{P},t) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) P_k \qquad t \in [0,1]$$

$$b_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Supponiamo di avere dei punti del piano o dello spazio $P_0, P_1, \dots P_n$. Considero la poligonale che li collega, detta CONTROL POLYGON. Ora voglio tracciare una curva che non si scosti molto dal poligono di controllo.
Questa rappresentazione, detta parametrica, è comoda perché posso usarla allo stesso modo in tutte le componenti:

$$B_n^x(P,t) = \sum b_{n,k}(t)\ P_k^x$$

$$B_n^y(P,t) = \sum b_{n,k}(t)\ P_k^y$$

$$B_n^z(P,t) = - \quad - \quad -$$

Questa curva ha proprietà utili nella grafica:

1) $b_{n,k}(t) \geq 0$

2) $\sum b_{n,k}(t) = 1$

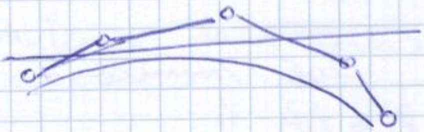
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = 1 \qquad \text{posso scrivere } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Ponendo $a = t$ e $b = 1-t$ ottengo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (t+1-t)^n = 1$$

Dalla ① e ② si dimostra che la curva giace nell'insieme convesso identificato dai punti P_k.

3) VARIATION DI MINUISHING (RIDUZIONE DELLE OSCILLAZIONI)



Il numero di intersezioni tra una retta e il poligono di controllo é $\geq$ di quelle con la curva. Questo garantisce che la curva non si comporti così:

4) SIMMETRIA

Se sposto l'ordine dei punti la curva non cambia. L'ordine deve essere invertito e non permutato completamente

5) La curva interpola agli estremi.