Nozioni di Goniometria

Misura degli angoli

Per misurare un angolo occorre fissarne l'unità di misura. Gli angoli possono essere misurati in:

- gradi sessagesimali;
- gradi centesimali;
- gradi millesimali;
- radianti;
- ore.

Misura degli angoli in gradi sessagesimali

Come unità pratica di misura per gli angoli si assume il **grado sessagesimale**, che si definisce come la 360ª parte di un angolo giro. Il grado viene indicato con il simbolo [°]. Quando si usano i gradi, vengono utilizzati anche dei sottomultipli:

- il **minuto primo** o semplicemente **primo,** pari alla 60ª parte del grado; i primi vengono indicati con il simbolo [′];
- il **minuto secondo** o semplicemente **secondo**, pari alla 60ª parte del primo e alla 3600ª parte del grado; i secondi vengono indicati con il simbolo [″].

Il sistema di misurazione degli angoli in gradi sessagesimali risale all'antica civiltà babilonese.

La notazione in gradi, primi e secondi è anche detta in sigla DMS (*Degree*, *Minute*, *Second* ovvero Gradi - Minuti - Secondi).

Forma decimale dei gradi

I sottomultipli del grado, oltre che in primi e secondi, possono essere espressi in un altro modo, la cosiddetta **modalità decimale DD** (*Decimal Degree*). Le calcolatrici scientifiche lavorano normalmente fornendo le misure angolari in modalità decimale.

Per convertire il valore di un angolo da gradi, minuti e secondi in gradi decimali si usa la seguente formula:

$$\boxed{\mathrm{DMS} \rightarrow \mathrm{DD}: \quad \text{gradi decimali} = \text{gradi} + \frac{\text{minuti}}{60} + \frac{\text{secondi}}{3600}}$$

Ad esempio 14° 23′ 56″ diventano $14 + \frac{23}{60} + \frac{56}{3600} = 14{,}398889°$

Per convertire il valore di un angolo espresso in gradi decimali in uno in gradi, minuti e secondi si usa la seguente procedura:

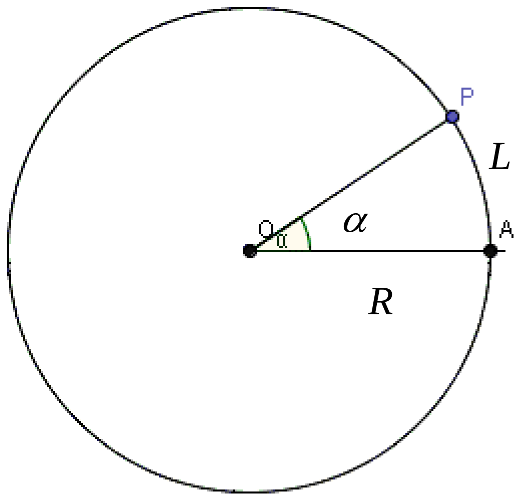
1) la parte intera in gradi è la stessa;
2) la parte decimale viene moltiplicata per 60; di tale prodotto la parte intera dà il valore dei minuti;
3) si moltiplica la parte decimale del prodotto ancora per 60: il risultato è il valore dei secondi.

Ad esempio volendo convertire 52,4725° in gradi DMS si ha:

1) D = 52°
2) 0,4725° · 60 = 28,35′ → M = 28′;
3) 0,35′ · 60 = 21″ → S = 21″.

e quindi 52,4725° (DD) → 52° 28′ 21″

Misura degli angoli in radianti



In un contesto matematico, gli angoli vengono normalmente misurati in radianti oltre che in gradi.

Assegnata una generica circonferenza di raggio OA, indichiamo con α l'angolo $A\hat{O}P$:

$$\alpha = A\hat{O}P$$

<u>La misura dell'angolo α in radianti è data dal rapporto tra la lunghezza *L* dell'arco *AP* sotteso dall'angolo α e la lunghezza *R* del raggio *OA*</u>:

$$\boxed{\alpha_{RAD} = \frac{L}{R} = \frac{\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{P}}{\overline{O}\overline{A}}}$$

Tale rapporto non dipende dal raggio della circonferenza.

Osserviamo che la misura in radianti di un angolo è un numero puro, ossia è *adimensionale,* dato che esprime il rapporto tra due lunghezze.

Valori in radianti dell'angolo giro e dell'angolo piatto.

Il valore dell'angolo giro in radianti è presto ricavato data la definizione precedente.

L'arco sotteso da un angolo giro corrisponde a tutta la circonferenza e dunque ha lunghezza pari a $L = 2\pi \cdot R$ dove R è il raggio della circonferenza. Dalla definizione si ha così:

$$\alpha_{giro} = \frac{L}{R} = \frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi \qquad \Rightarrow \alpha_{giro} = 2\pi = 6{,}28$$

Il valore dell'angolo piatto in radianti è poi ricavato ricordando che l'angolo piatto è la metà dell'angolo giro e pertanto:

$$\alpha_{piatto} = \frac{\alpha_{giro}}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad \Rightarrow \alpha_{piatto} = \pi = 3{,}14$$

Conversione tra gradi e radianti.

È possibile convertire la misura di un angolo da gradi sessagesimali (DD) in radianti e viceversa. Per operare tale trasformazione si usa la seguente proporzione, basata sul fatto che conosciamo l'espressione dell'angolo piatto sia in gradi sia in radianti:

$$\alpha^\circ : 180^\circ = \alpha_{RAD} : \pi$$

Si faccia attenzione al fatto che nella proporzione l'angolo α° è espresso in forma decimale. Risolvendo la proporzione si ha:

- per passare da gradi a radianti: $\boxed{\alpha_{RAD} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi}$;
- per passare da radianti a gradi: $\boxed{\alpha^\circ = \frac{\alpha_{RAD}}{\pi} \cdot 180^\circ}$.

Utilizzando la prima relazione di conversione ricaviamo la seguente tabella, che esprime i valori in radianti dei principali angoli:

angolo α (°)	angolo α (rad)
0°	0
30°	π/6
45°	π/4
60°	π/3
90°	π/2
180°	π
270°	3π/2
360°	2 π

Esempio 1. Convertire l'angolo α° = 47° 25' 50'' in radianti.
In primo luogo esprimiamo la misura dell'angolo in forma decimale:

$$\alpha° = 47 + \frac{25}{60} + \frac{50}{3600} = 47{,}4305555°$$

Applichiamo la formula di conversione per ricavare il valore in radianti:

$$\alpha_{RAD} = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi = \frac{47{,}430556°}{180°} \cdot \pi = 0{,}8278$$

Esempio 2. Convertire l'angolo α = 1,3252 in gradi.
In primo luogo ricaviamo la misura dell'angolo in gradi nella forma decimale:

$$\alpha° = \frac{\alpha_{RAD}}{\pi} \cdot 180° = \frac{1{,}3252}{\pi} \cdot 180° = 75{,}9284°$$

Esprimiamo poi il valore dell'angolo in forma DMS (gradi, minuti e secondi):

$$75{,}9284° = 75°\ 55'\ 42{,}12''$$

Lunghezza dell'arco di circonferenza

La lunghezza di un arco di circonferenza è immediatamente ricavabile quando si lavora con gli angoli misurati in radianti; infatti, invertendo la definizione di radianti, si ottiene:

$$\boxed{L = \alpha_{RAD} \cdot R}$$

Dunque dato l'angolo sotteso dall'arco e il raggio della circonferenza un semplice *prodotto* ci porta ad avere la lunghezza d'arco corrispondente.
Una relazione così semplice ed immediata è impossibile con l'uso dei gradi.

Esempio 1. Si voglia **c**alcolare la misura in gradi (DMS) dell'angolo α sotteso da un arco di circonferenza la cui lunghezza *L* è 17 m e il cui raggio *R* è 8,5 m.
Calcoliamo il valore dell'angolo α in radianti:

$$\alpha_{RAD} = \frac{L}{R} = \frac{17}{8{,}5} = 2{,}00$$

Successivamente convertiamo tale valore in gradi decimali:

$$\alpha° = \frac{\alpha_{RAD}}{\pi} \cdot 180° = \frac{2{,}00}{\pi} \cdot 180° = 114{,}5916° \text{ e in gradi DMS: } \alpha° = 114°\ 35'\ 29{,}6''$$

Esempio 2. Si voglia **c**alcolare la lunghezza *L* di un arco di circonferenza sotteso da un angolo α la cui misura in gradi (DMS) è 25° 35’ 48’’ e il cui raggio *R* è 16 m.

Come primo passo esprimiamo il valore dell’angolo in gradi decimali (DD):

$$\alpha° = 25 + \frac{35}{60} + \frac{48}{3600} = 25{,}5967°$$

Calcoliamo poi il valore dell’angolo in radianti:

$$\alpha_{RAD} = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi = \frac{25{,}5967°}{180°} \cdot \pi = 0{,}4467$$

Infine calcoliamo la lunghezza dell’arco L:

$$L = \alpha_{RAD} \cdot R = 16 \cdot 0{,}4467 \cong 7{,}15.$$

Circonferenza goniometrica

La **Circonferenza Goniometrica** è la circonferenza di centro O(0;0) e raggio 1. Ricordiamo che in base alla Geometria Analitica una circonferenza di centro $C(x_0;y_0)$ e raggio r ha come equazione:

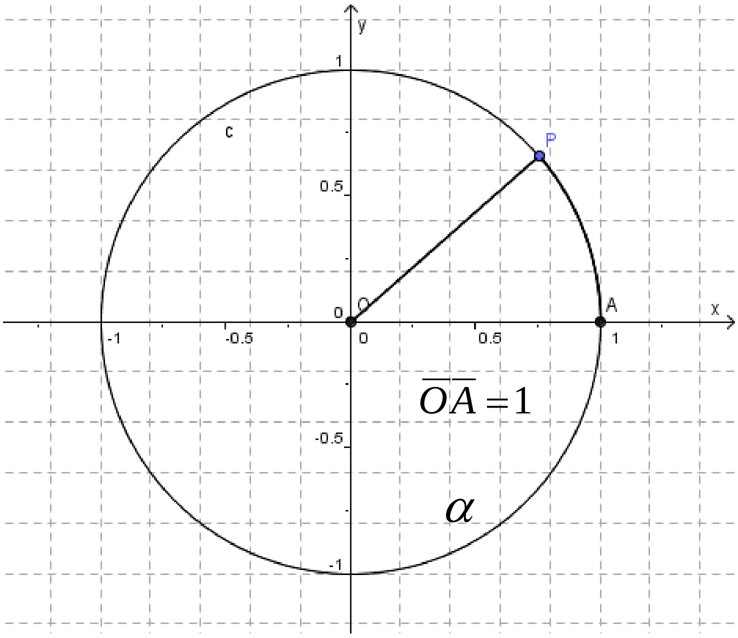
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Sostituendo $x_0=0;\quad y_0=0;\quad r=1$ si ha:

$$(x-0)^2+(y-0)^2=1^2$$

ottenendo così:

$$\boxed{x^2+y^2=1}$$



Coincidenza tra archi ed angoli sulla circonferenza goniometrica.

Poiché sulla circonferenza goniometrica il raggio OA è unitario, la misura in radianti di un angolo assume un valore particolare:

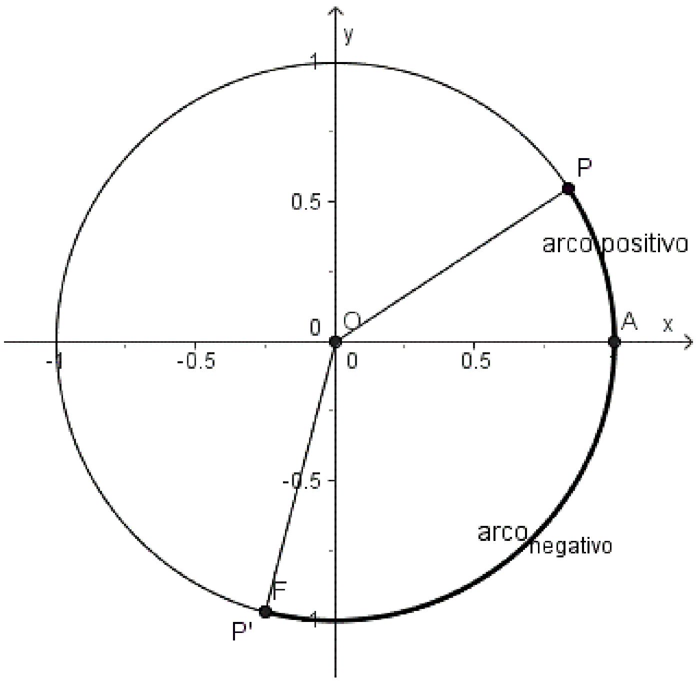
$$\alpha_{RAD}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{\overline{OA}}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{1}=\overset{\frown}{AP}$$

Si ottiene così che <u>sulla circonferenza goniometrica la misura dell'angolo in radianti coincide con la lunghezza dell'arco corrispondente</u>. Per questo motivo in seguito si parlerà indifferentemente di angoli o archi.

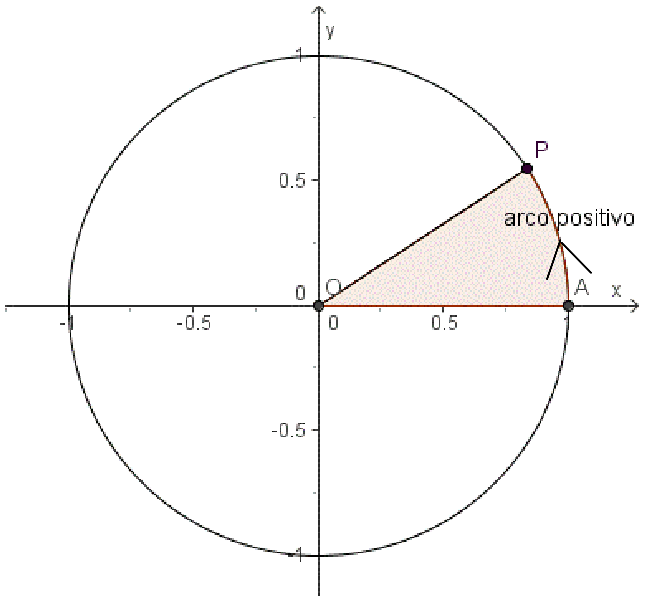
Archi o angoli orientati.

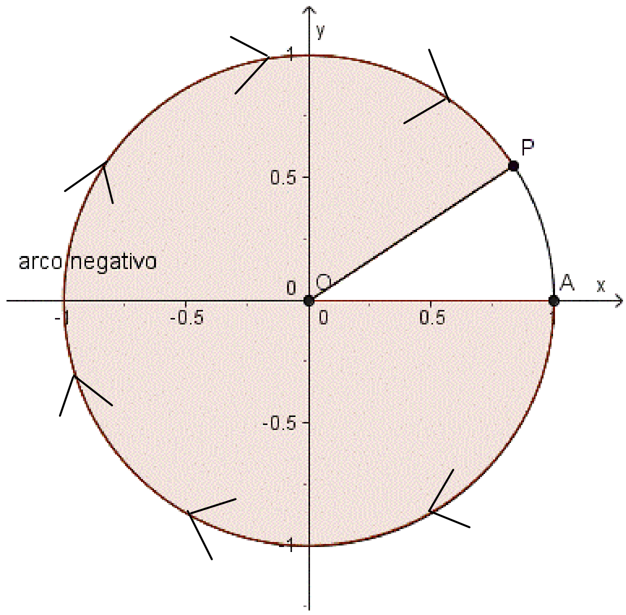
Si assume che il punto A sia l'origine degli archi, e che il lato OA sia l'origine degli angoli.

Si considera positivo il verso di percorrenza antiorario e negativo il verso orario. Avremo allora angoli o archi positivi e angoli o archi negativi a seconda della posizione del punto e del verso di percorrenza. Nella figura a fianco l'arco $\overset{\frown}{AP}$ (o l'angolo $A\hat{O}P$) è positivo, mentre l'arco $\overset{\frown}{AP'}$ (o l'angolo $A\hat{O}P'$) è negativo.



Inoltre si può vedere che ad uno stesso punto *P* sulla circonferenza goniometrica può corrispondere un angolo positivo o un angolo negativo, a seconda di se, a partire da *A*, si giunge a quel punto percorrendo la circonferenza in senso antiorario od orario.





Nella tabella seguente troviamo per alcuni angoli i valori positivi e i corrispondenti negativi.

angolo α (°) positivo	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	300°	315°	330°	360°
angolo α (°) negativo	0°	–330°	–315°	–300°	-270°	-180°	-90°	-60°	-45°	-30°	-360°

Angoli propri e angoli impropri.

Immaginiamo di percorrere la circonferenza goniometrica in senso antiorario a partire dal punto A: il valore della lunghezza dell'arco percorso (che coincide con l'ampiezza dell'angolo espressa in radianti) aumenterà via via a partire dal valore 0. Dopo un quarto di giro saremo a $\pi/2$ o (90°), dopo mezzo giro saremo a π (180°), dopo un giro completo saremo a 2π (360°). E se continuiamo? La misura della lunghezza dell'arco percorso (e dell'angolo descritto) aumenterà ulteriormente, oltre 2π o 360°. È dunque possibile definire archi di lunghezza superiore a 2π o angoli di ampiezza maggiore di 360°.

Per chiarezza agli archi la cui ampiezza è non maggiore di una circonferenza sono detti *archi propri*, mentre quelli la cui ampiezza supera una circonferenza sono detti *archi (o angoli) impropri*.

La misura dell'ampiezza di un arco o angolo improprio si può sempre ricondurre a quella di un arco proprio più un numero intero di giri, mediante il metodo delle sottrazioni successive.

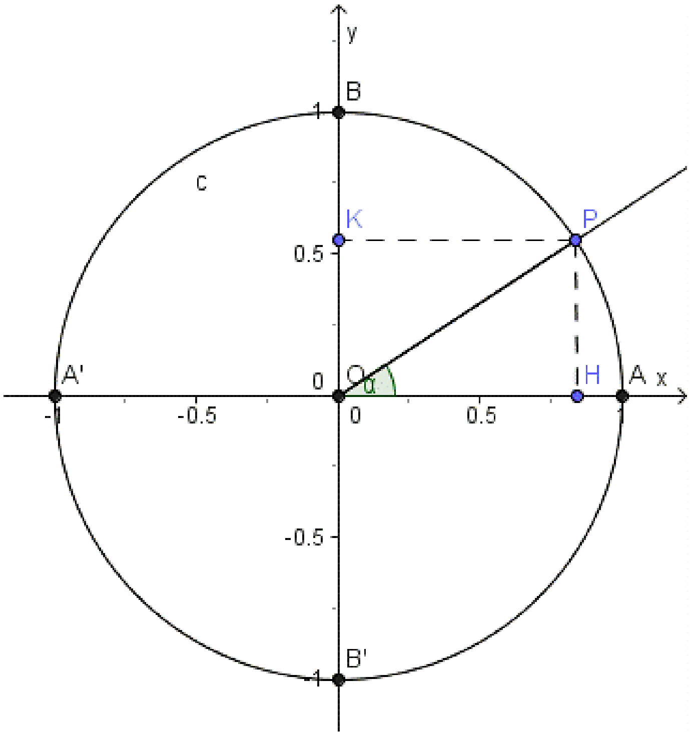
Ad esempio un angolo improprio di 1000° si riconduce ad un angolo proprio di 280° + 2 giri:

1000° = 280° + 2·360°.

Analogamente un angolo negativo di -1500° si riconduce ad un angolo proprio di 300° - 5 giri:

-1500° = 300° - 5·360°.

Definizione di Coseno e Seno



Consideriamo un generico punto P appartenente alla circonferenza goniometrica. Il segmento OP forma con la metà positiva dell'asse *x* un angolo, indicato con α.

La posizione del punto P può essere facilmente individuata conoscendo il valore di tale angolo.

Essendo inoltre il punto P un punto del piano cartesiano, esso può anche essere individuato dalle sue due coordinate cartesiane, l'ascissa e l'ordinata.

Si definisce allora coseno di α (**cos** $\boldsymbol{\alpha}$) l'**ascissa del punto P**, mentre si definisce seno di α (**sen** $\boldsymbol{\alpha}$) l'**ordinata del punto P**.

Per chiarezza si precisa che **il coseno (e il seno) di un angolo non è un segmento ma la misura di un segmento orientato**, cioè un numero reale con segno. In altre parole, il coseno dell'angolo α è la misura del segmento *OH*, presa con segno positivo se *H* è a destra di *O*, con segno negativo se *H* è a sinistra di *O*. Analogamente il seno dell'angolo α è la misura del segmento *OK*, presa con segno positivo se *K* è al di sopra di *O*, con segno negativo se *K* è al di sotto di *O*.

1ª identità fondamentale della goniometria

Poiché il triangolo OPH è rettangolo, vale il teorema di Pitagora:

$OH^2 + HP^2 = OP^2$

ma OH = cos α;

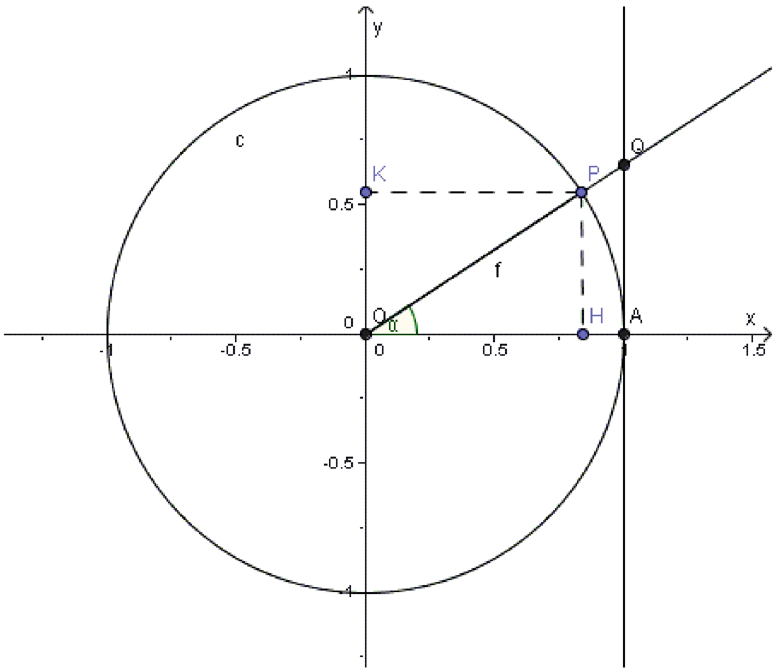
HP = OK = sen α;

OP è il raggio della circonferenza goniometrica e vale 1;

sostituendo avremo dunque

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

Tale relazione prende il nome di **1ª identità fondamentale della goniometria.**



Definizione di tangente

Tracciamo la retta verticale, tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto A (1;0).

Il prolungamento del segmento OP incontra tale retta nel punto Q. Si definisce allora tangente goniometrica dell'angolo α

($\mathrm{tg}\,\alpha$) l'ordinata AQ del punto Q o in altre parole, la misura del segmento *AQ*, presa con segno positivo se *Q* è a al di sopra di *A*, con segno negativo se *Q* è al di sotto di *A*.

Anche in questo caso, come per il coseno e il seno, la tangente di un angolo non è un segmento ma la misura di un segmento orientato, cioè un numero reale con segno.

2ª identità fondamentale della goniometria

Consideriamo i triangoli rettangoli OPH e OQA: essi hanno in comune l'angolo α e sono simili, ovvero i loro lati sono in proporzione.

AQ : OA = HP : OH

risulta AQ = tg α;

OA = raggio = 1

HP = OK = sen α;

OH = cos α;

sostituendo otteniamo:

tg α : 1 = sen α : cos α

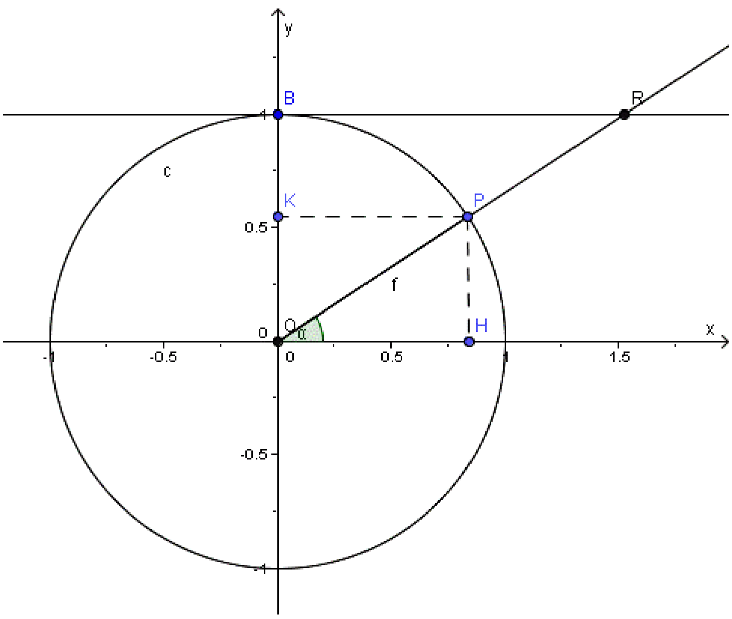
e cioè:

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}.$$

Tale relazione prende il nome di **2ª identità fondamentale della goniometria.**

Definizione di cotangente

La cotangente è una quarta funzione goniometrica, della quale si può dare una definizione geometrica, come segue: tracciamo la retta orizzontale, tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto *B (0;1)*.



Il prolungamento del segmento *OP* incontra tale retta nel punto *R*. Si definisce allora **cotangente goniometrica dell'angolo α** $(\mathrm{cotg}\alpha)$ **l'ascissa del punto *R***, o in altre parole, la misura del segmento *BR*, presa con segno positivo se *R* è a destra di *B*, con segno negativo se *R* è sinistra di *B*.

Mediante considerazioni di carattere geometrico si può vedere che la cotangente può essere anche definita più semplicemente come il reciproco della tangente:

$$\mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Coseno, Seno, Tangente e Cotangente come funzioni goniometriche

Nelle pagine precedenti abbiamo definito sulla circonferenza goniometrica coseno, seno, tangente e cotangente e le 2 identità fondamentali che le legano.

Coseno, seno, tangente e cotangente vengono comunemente chiamate **funzioni goniometriche** o **funzioni circolari**. Vediamo perché.

Ricordiamo che in matematica una funzione $y = f(x)$ è una corrispondenza che ad ogni valore (ammissibile) della variabile indipendente x associa un unico valore della variabile indipendente y secondo una legge assegnata. Abbiamo poi denominato *dominio* della funzione l'insieme dei valori della variabile indipendente x in cui la funzione f è definita o calcolabile e *codominio* della funzione l'insieme dei valori assunti dalla variabile dipendente y.

Nel nostro caso assumiamo come variabile indipendente l'angolo α positivo o negativo misurato sulla circonferenza goniometrica; il coseno di una angolo è dunque quella funzione matematica che ad ogni angolo α associa il coseno di quest'angolo, come definito precedentemente sulla circonferenza goniometrica. Analogamente per seno, tangente e cotangente:

$$y = \cos\alpha$$

$$y = \mathrm{sen}\alpha$$

$$y = \mathrm{tg}\alpha$$

$$y = \mathrm{cotg}\alpha$$

Dominio delle funzioni goniometriche

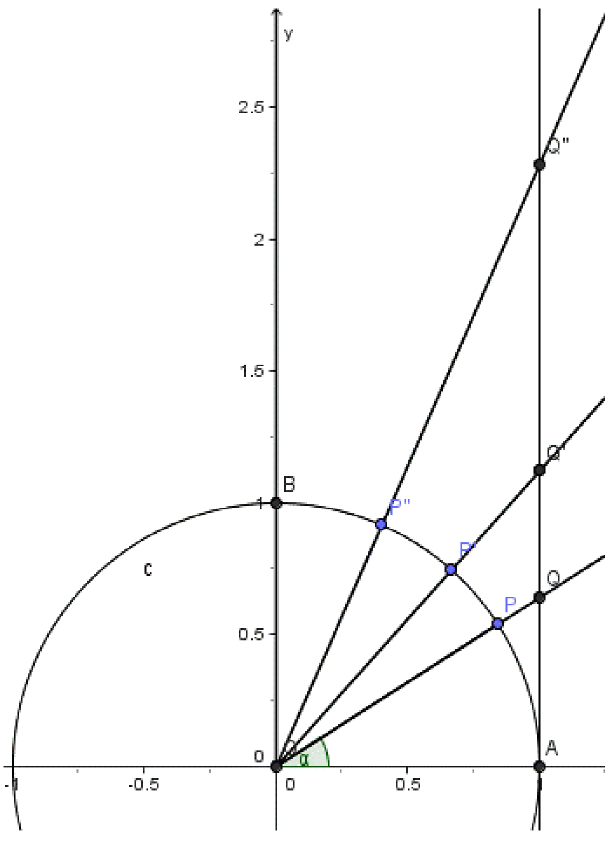
Per quanto riguarda il coseno e il seno, dato un qualsiasi angolo α, individuato corrispondentemente il punto P sulla circonferenza goniometrica, è sempre possibile costruire le proiezioni ortogonali *HO* e *KO* sugli assi x e y e determinare coseno e seno dell'angolo.

Pertanto il dominio sia del coseno che del seno è dunque tutto l'asse reale e si può scrivere:

Dominio(coseno) = R oppure $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Dominio(seno) = R oppure $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Consideriamo ora la funzione tangente: a mano a mano che l'angolo α si avvicina al valore di 90° (o di $\pi/2$ in radianti), il punto P si avvicina al punto B(0;1) e le semirette OP tendono a diventare sempre più vicine alla verticale, determinando un aumento vertiginoso del valore dell'ordinata del punto Q e cioè della tangente; quando l'angolo vale proprio 90° il punto P sulla circonferenza coinciderà con il punto B, la semiretta OP sarà verticale e parallela alla retta verticale per A: le due rette saranno parallele e pertanto non avranno punto di intersezione o anche, *avranno intersezione all'infinito*. Per questo motivo **non è definito il valore della tangente per l'angolo di 90°**; si può anche dire che la tangente a 90° è infinita. Un discorso analogo si può ripetere per l'angolo di 270° e per tutti gli angoli impropri definiti nei giri successivi.



Con riferimento al dominio possiamo allora concludere:

Dominio(tangente) = $\mathrm{R}-\{90°+k180°, \quad \text{con } k \in Z\}$ o in radianti $\mathrm{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad \text{con } k \in Z\right\}$

A questa conclusione si poteva giungere anche per un'altra strada e cioè considerando che, grazie alla II identità fondamentale, la tangente è definita come $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Poiché il denominatore di una frazione non può essere mai nullo, occorre escludere dal dominio i valori per i quali il coseno vale zero, che risultano essere proprio 90° e 270°.

Per la funzione cotangente si può ripetere un discorso del tutto analogo; sinteticamente possiamo dire che la cotangente non è definita quando l'angolo α vale 0° oppure 180°:

Dominio(cotangente) = $\mathrm{R}-\{k180°, \quad \text{con } k \in Z\}$ o in radianti $\mathrm{R}-\{k\pi, \quad \text{con } k \in Z\}$

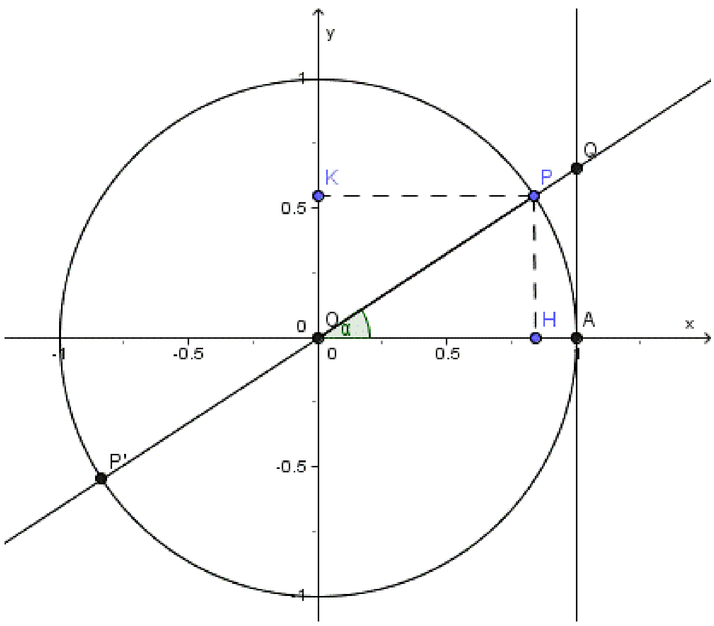
Segni delle funzioni goniometriche nei 4 quadranti

Le funzioni goniometriche coseno, seno, tangente, cotangente possono essere positive, negative o annullarsi. Nella tabella seguente è riportato il segno che ognuna di esse assume nei 4 quadranti:

Quadrante	cos (α)	sin (α)	tg (α)	cotg (α)
I	+	+	+	+
II	-	+	-	-
III	-	-	+	+
IV	+	-	-	-

Periodicità delle funzioni goniometriche

Supponiamo di far variare l'angolo α su tutta la circonferenza e di calcolare le funzioni goniometriche coseno e seno. Nel momento in cui l'angolo supera il valore di 360° ritorneremo sulle stesse posizioni iniziali e ovviamente, le funzioni goniometriche ri-assumeranno gli stessi valori del giro precedente. Possiamo esprimere questo concetto dicendo che **le funzioni goniometriche coseno e seno sono funzioni periodiche**, e **il periodo**, definito come l'intervallo della variabile indipendente dopo cui la funzione assume gli stessi valori, vale **360°:**



$$\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha$$

$$\mathrm{sen}(\alpha+360°)=\mathrm{sen}\alpha$$

Per quanto riguarda le funzioni tangente e cotangente non è necessario aspettare un giro completo perché esse assumano gli stessi valori, ma, come si vede nella figura a fianco, è sufficiente mezzo giro:

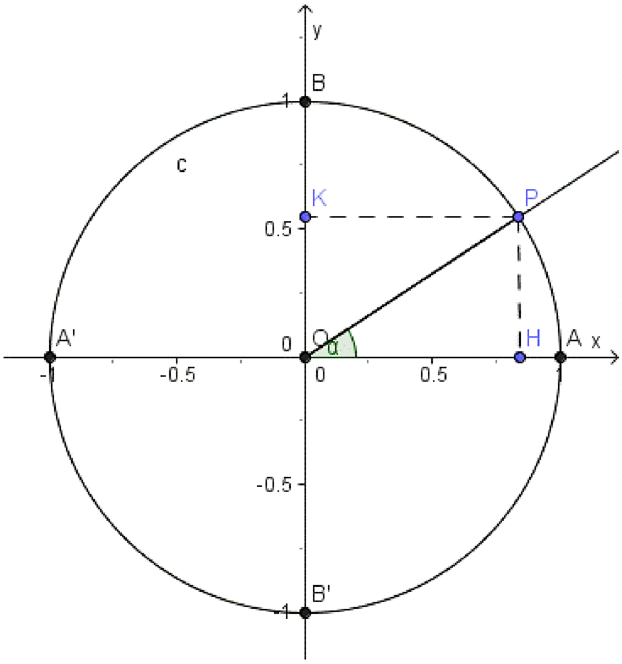
Possiamo esprimere questo concetto dicendo che **le funzioni goniometriche tangente e cotangente sono funzioni periodiche di periodo pari a 180°:**

$$\text{tg}(\alpha + 180°) = \text{tg}\alpha$$

$$\text{cotg}(\alpha + 180°) = \text{cotg}\alpha$$

Codominio delle funzioni goniometriche

Coseno e seno. Coseno e seno sono state definite come l'ascissa e l'ordinata di un punto P variabile sulla circonferenza goniometrica, di raggio unitario. Il massimo valore dell'ascissa si ha quando P è sul punto A, il minimo valore quando P è sul punto A'; analogamente il massimo valore del seno si ha quando il punto P coincide con B, il minimo valore quando P coincide con B'.



Possiamo quindi concludere dicendo che

$$-1 \le \cos\alpha \le +1 \text{ e } -1 \le \text{sen}\alpha \le +1$$

Pertanto <u>le funzioni goniometriche coseno e seno hanno per codominio l'intervallo</u> $[-1;+1]$.

Codominio(coseno) = $[-1;+1]$

Codominio(seno) = $[-1;+1]$

Tangente. Per quanto riguarda la tangente, essendo definita come l'ordinata di un punto al di fuori della circonferenza goniometrica, essa può assumere qualsiasi valore reale; ciò si esprime dicendo che:

Codominio(tangente) = R.

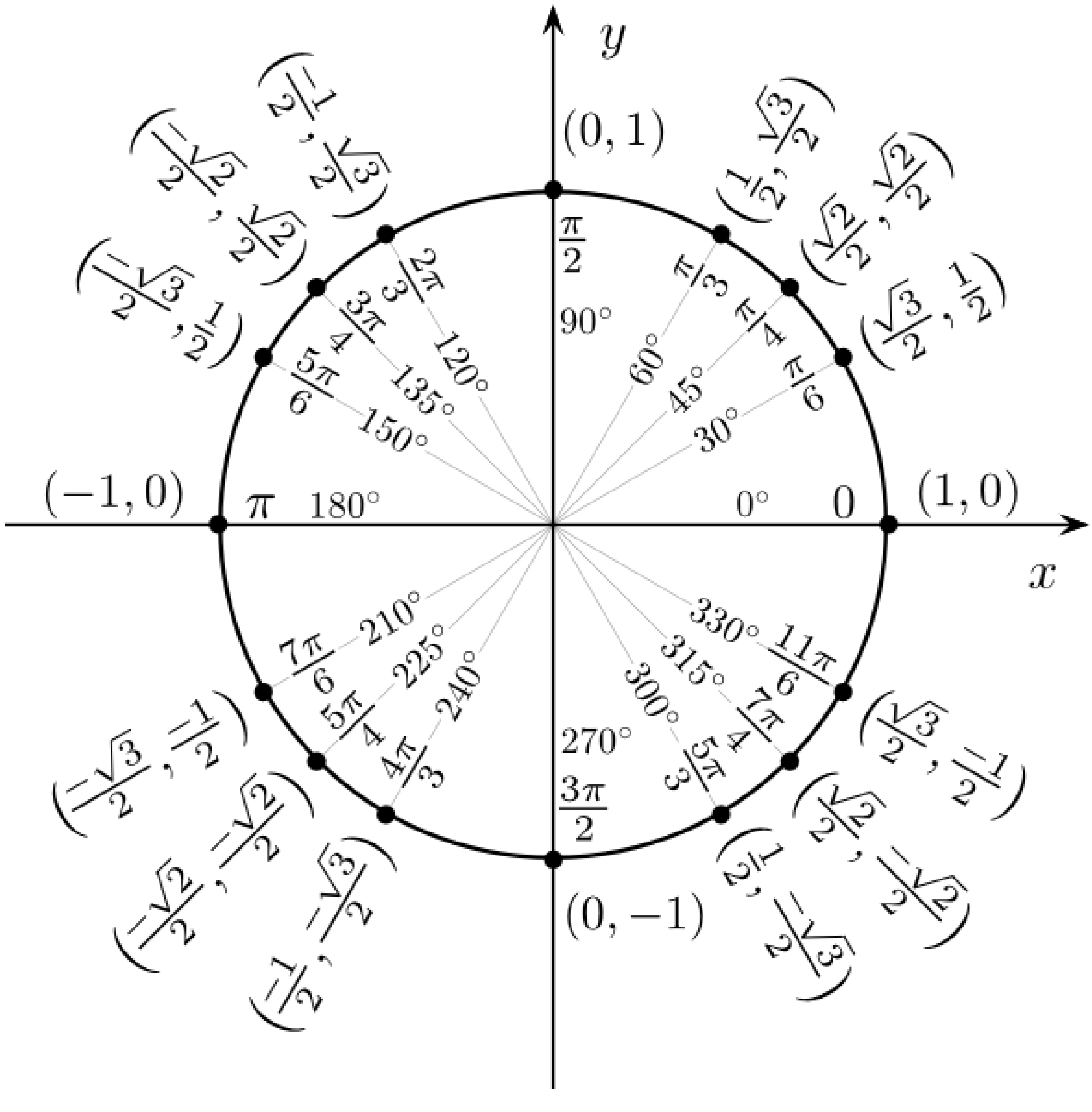
Per la cotangente vale un discorso analogo e dunque:

Codominio(cotangente) = R.

Valori delle funzioni goniometriche nei principali angoli

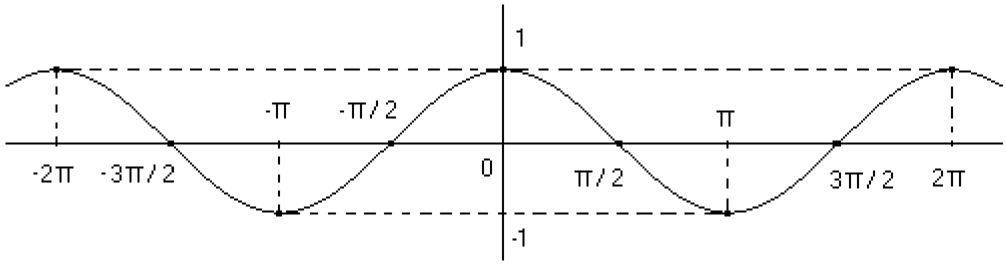
Nella tabella seguente vengono riportati i valori che le funzioni goniometriche assumono nei principali angoli:

angolo α (°)	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
angolo α (rad)	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2 π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\text{cotg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

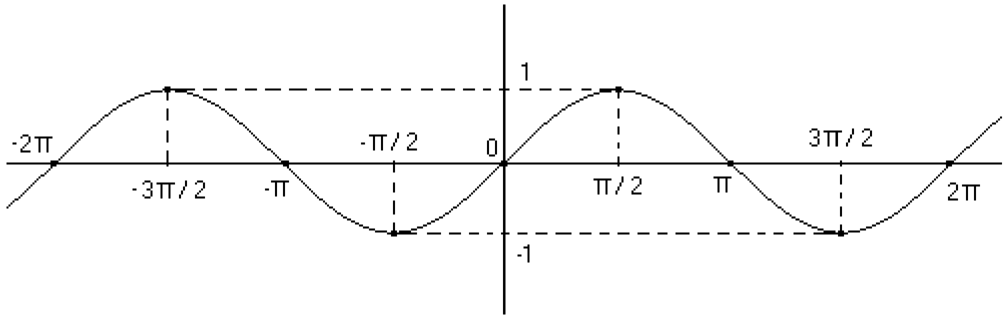

y
x
(0, 1)
(1, 0)
(−1, 0)
(0, −1)
π/2
90°
π/3
60°
π/4
45°
π/6
30°
0°
0
2π/3
120°
3π/4
135°
5π/6
150°
π
180°
7π/6
210°
5π/4
225°
4π/3
240°
270°
3π/2
5π/3
300°
7π/4
315°
11π/6
330°

Grafici delle funzioni goniometriche

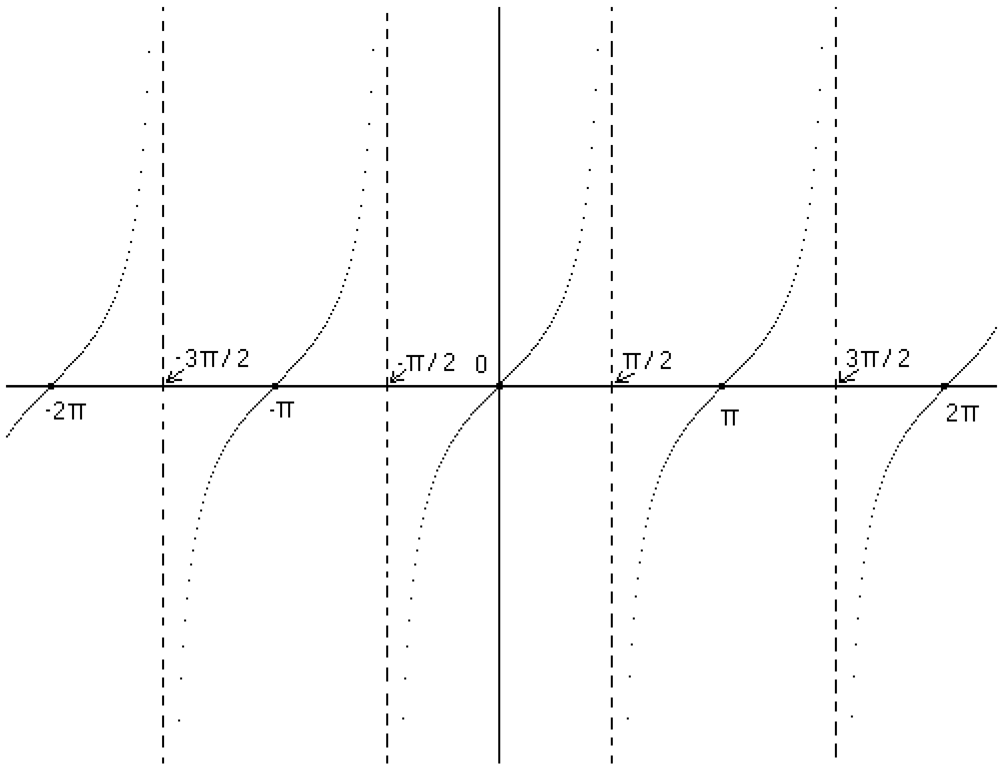
Il grafico della funzione coseno $y = \cos x$ i chiama *cosinusoide*; il grafico della funzione seno $y = \operatorname{sen} x$ si chiama *sinusoide*; infine il grafico della funzione $y = \operatorname{tg} x$ si chiama *tangentoide*.



cosinusoide



sinusoide



tangentoide

Ricavare tre funzioni goniometriche quando ne è nota una quarta

1) **Quando si conosce solo il coseno di un angolo α,** è possibile determinare, utilizzando alcune formule che si ricavano delle identità fondamentali, il valore del seno, della tangente e della cotangente dello stesso angolo α:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Il segno $\pm$ va scelto in base al quadrante a cui appartiene l'angolo.

2) Analogamente, **quando si conosce solo il seno di un angolo α**, è possibile determinare, utilizzando altre formule, il valore del coseno, della tangente e della cotangente dello stesso angolo α:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Anche qui il segno $\pm$ va scelto in base al quadrante a cui appartiene l'angolo (vedi la tabella dei segni delle funzioni goniometriche).

3) **Quando si conosce solo la tangente di un angolo α**, è possibile determinare il valore della cotangente, del coseno e del seno dello stesso angolo α:

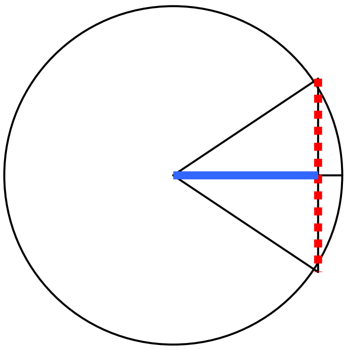
$$\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} \qquad \text{sen}\alpha = \pm\frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

4) **Quando si conosce solo la cotangente di un angolo α**, è possibile determinare il valore della tangente, del coseno e del seno dello stesso angolo α:

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\alpha} \qquad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}} \qquad \text{sen}\alpha = \pm\frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

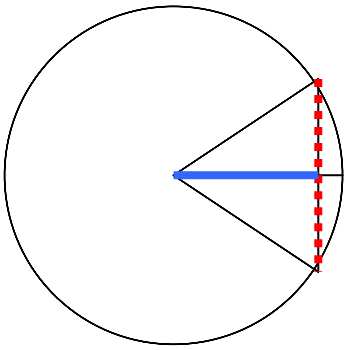
Angoli Associati

angoli opposti: α; $-\alpha$



$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$
$cotg(-\alpha) = -cotg\,\alpha$

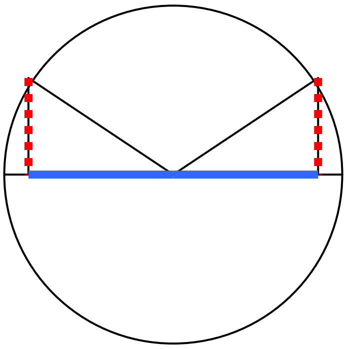
angoli esplementari: α; $360°-\alpha$



$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$
$tg(360° - \alpha) = -tg\,\alpha$
$cotg(360° - \alpha) = -cotg\,\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$
$tg(2\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$
$cotg(2\pi - \alpha) = -cotg\,\alpha$

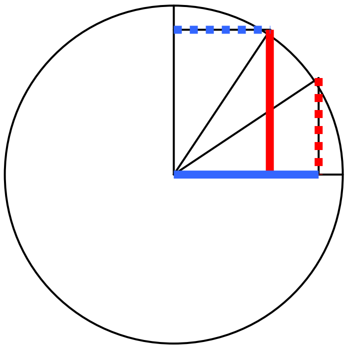
angoli supplementari: α; $180°-\alpha$



$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$tg(180° - \alpha) = -tg\,\alpha$
$cotg(180° - \alpha) = -cotg\,\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
$tg(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$
$cotg(\pi - \alpha) = -cotg\,\alpha$

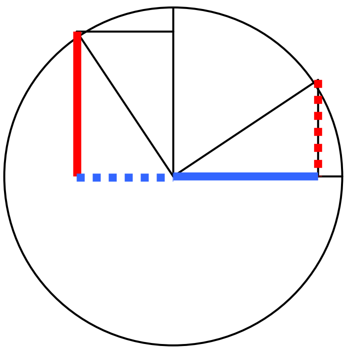
angoli complementari: α; $90°-\alpha$



$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$
$tg(90° - \alpha) = cotg\,\alpha$
$cotg(90° - \alpha) = tg\,\alpha$

$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$
$tg(\pi/2 - \alpha) = cotg\,\alpha$
$cotg(\pi/2 - \alpha) = tg\,\alpha$

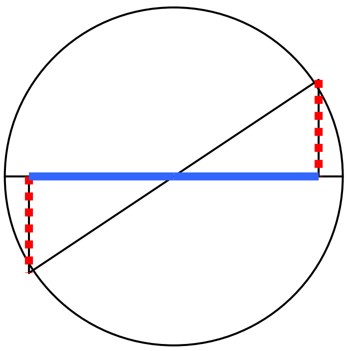
angoli che differiscono di 90°: α; $90°+\alpha$



$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$
$tg(90° + \alpha) = -cotg\,\alpha$
$cotg(90° + \alpha) = -tg\,\alpha$

$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$
$tg(\pi/2 + \alpha) = -cotg\,\alpha$
$cotg(\pi/2 + \alpha) = -tg\,\alpha$

angoli che differiscono di 180°: α; $180°+\alpha$



$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$
$tg(180° + \alpha) = tg\,\alpha$
$cotg(180° + \alpha) = cotg\,\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$tg(\pi + \alpha) = tg\,\alpha$
$cotg(\pi + \alpha) = cotg\,\alpha$

Principali Formule Goniometriche

Formule di addizione
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Formule di sottrazione
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Formule di duplicazione
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Formule di bisezione
$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Formule parametriche
$\cos\alpha=\dfrac{1+t^2}{2t}$, con $t=\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$
$\sin\alpha=\dfrac{1-t^2}{2t}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

Equazioni goniometriche elementari

Un'equazione si dice goniometrica se essa contiene almeno una funzione goniometrica. Si dicono equazioni goniometriche elementari equazioni del tipo:

$$\cos x = a$$

$$\sin x = b$$

$$\tan x = c$$

Equazioni in coseno $\cos x = a$

Indicato con α l'angolo fondamentale che risolve l'equazione (ricavato dalle tavole o con la calcolatrice, usando la funzione inversa), si avrà una doppia infinità di soluzioni:

$$x = \alpha + k \cdot 360° \qquad k \in Z$$

$$x = -\alpha + k \cdot 360° \qquad k \in Z$$

Equazioni in seno $\sin x = b$

Indicato con β l'angolo fondamentale che risolve l'equazione (ricavato dalle tavole o con la calcolatrice, usando la funzione inversa), si avrà una doppia infinità di soluzioni:

$$x = \beta + k \cdot 360° \qquad k \in Z$$

$$x = 180° - \beta + k \cdot 360° \qquad k \in Z$$

Equazioni in tangente $\tan x = c$

Indicato con γ l'angolo fondamentale che risolve l'equazione (ricavato dalle tavole o con la calcolatrice, usando la funzione inversa), si avrà una semplice infinità di soluzioni:

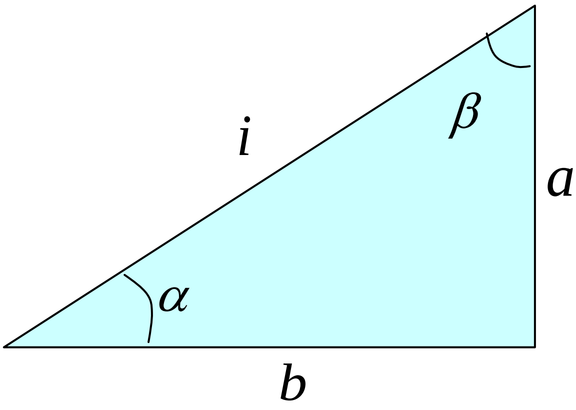
$$x = \gamma + k \cdot 180° \qquad k \in Z$$

Nozioni di Trigonometria

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo rettangolo significa trovare tutti i suoi elementi. Esistono tre importanti relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo utili a tale scopo:

1) in ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente;
2) in ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto;
3) in ogni triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.



Schematicamente si ha:

formule dirette	formule inverse - 1	formule inverse - 2
$b = i \cdot \cos\alpha$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{i}$	$i = \dfrac{b}{\cos\alpha}$
$a = i \cdot \mathrm{sen}\alpha$	$\mathrm{sen}\alpha = \dfrac{a}{i}$	$i = \dfrac{a}{\mathrm{sen}\alpha}$
$a = b \cdot \mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$	$b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$

Ricordiamo che, essendo il triangolo rettangolo, vale per esso il teorema di Pitagora, che lega tra loro le lunghezze dei cateti e dell'ipotenusa:

$$i = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{i^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{i^2 - a^2}$$

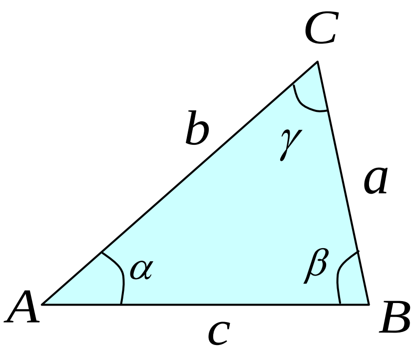
Schema operativo per la risoluzione dei triangoli rettangoli

dati noti	**a**	**b**	**i**	α	β
ipotenusa *i* **angolo** α	$a = i \cdot \text{sen}\alpha$	$b = i \cdot \cos\alpha$	i	α	$\beta = 90° - \alpha$
cateto *a* **angolo opposto** α	a	$b = \dfrac{a}{\text{tg}\alpha}$	$i = \dfrac{a}{\text{sen}\alpha}$	α	$\beta = 90° - \alpha$
cateto *b* **angolo adiacente** α	$a = b \cdot \text{tg}\alpha$	b	$i = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	α	$\beta = 90° - \alpha$
cateto *a* **ipotenusa** *i*	a	$b = \sqrt{i^2 - a^2}$	i	$\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{a}{i}$	$\beta = 90° - \alpha$
cateto *b* **ipotenusa** *i*	$a = \sqrt{i^2 - b^2}$	b	i	$\alpha = \text{arcsen}\,\dfrac{a}{i}$	$\beta = 90° - \alpha$
cateto *a* **cateto** *b*	a	b	$i = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{a}{b}$	$\beta = 90° - \alpha$

Risoluzione dei triangoli generici

Risolvere un triangolo generico significa trovare tutti i suoi elementi. Per questo, esistono due utili teoremi: il teorema di Carnot o del Coseno ed il teorema dei Seni.

Teorema dei Seni



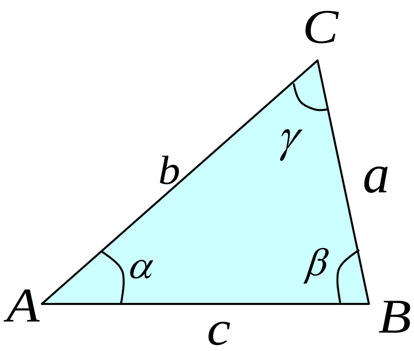
Il teorema dei seni afferma che in un triangolo generico il rapporto tra lato e seno dell'angolo opposto è costante. In formula:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Il teorema dei seni può essere utilizzato per la risoluzione dei triangoli generici quando sono noti:

a) 1 lato e 2 angoli;
b) 2 lati e l'angolo non compreso fra essi.

Teorema di Carnot o del Coseno



Il teorema di Carnot è una generalizzazione di quello di Pitagora: esso afferma che in un triangolo generico il quadrato di ogni lato è dato dalla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto delle misure dei due lati per il coseno dell'angolo fra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

Analogamente per gli altri due lati, in maniera ciclica:

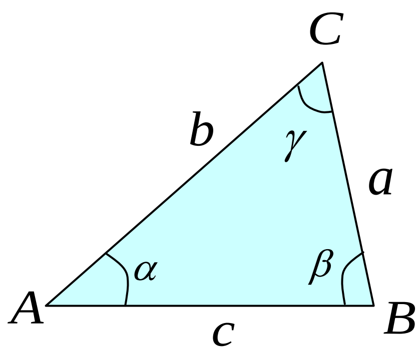
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$ e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

Il teorema di Carnot può essere utilizzato per la risoluzione dei triangoli generici quando sono noti:

c) 2 lati e l'angolo compreso fra essi.
d) 3 lati.

Schema operativo per la risoluzione dei triangoli generici



dati noti	***a***	***b***	***c***	α	β	γ
1 lato *c* e 2 angoli adiacenti α e β	$a = c \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$	$b = c \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$	c	α	β	$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
2 lati *a* e *b* e l'angolo non compreso α	a	b	$c = a \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$	α	$\beta = \arcsin\left(\dfrac{b}{a}\sin\alpha\right)$	$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
2 lati *a* e *b* e l'angolo compreso γ	a	b	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$	$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$	$\beta = \arcsin\left(\dfrac{b}{c}\sin\gamma\right)$	γ
3 lati a, b e c	a	b	c	$\alpha = \arccos\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	$\beta = \arccos\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$	$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$