Goniometria – Domande, Risposte & Esercizi

Angoli e Archi

1. Dare la definizione di grado sessagesimale (DMS).

Il **grado sessagesimale** si definisce come la 360ª parte di un angolo giro. Esso viene indicato con il simbolo [°]. I sottomultipli del grado sono:

- il **minuto primo** o semplicemente **primo,** pari alla 60ª parte del grado; i primi vengono indicati con il simbolo [′];
- il **minuto secondo** o semplicemente **secondo**, pari alla 60ª parte del primo e alla 3600ª parte del grado; i secondi vengono indicati con il simbolo [″].

La notazione in gradi, primi e secondi è anche detta in sigla DMS (*Degree*, *Minute*, *Second* ovvero Gradi - Minuti - Secondi).

2. Che cos'è la forma decimale dei gradi?

I sottomultipli del grado, oltre che in primi e secondi, possono essere espressi in un altro modo, la cosiddetta **modalità decimale DD** (*Decimal Degree*). Le calcolatrici scientifiche lavorano normalmente fornendo le misure angolari in modalità decimale.

3. Come si converte il valore di un angolo dalla notazione DMS alla notazione DD?

Per convertire il valore di un angolo da gradi, minuti e secondi in gradi decimali si usa la seguente formula:

$$\boxed{\mathrm{DMS} \rightarrow \mathrm{DD}: \quad \text{gradi decimali} = \text{gradi} + \frac{\text{minuti}}{60} + \frac{\text{secondi}}{3600}}$$

Ad esempio 14° 23′ 56″ diventano $14 + \frac{23}{60} + \frac{56}{3600} = 14{,}398889°$

4. Come si converte il valore di un angolo dalla notazione DD alla notazione DMS?

Per convertire il valore di un angolo espresso in gradi decimali in uno in gradi, minuti e secondi si usa la seguente procedura:

a) la parte intera in gradi è la stessa;
b) la parte decimale viene moltiplicata per 60; di tale prodotti la parte intera dà il valore dei minuti;
c) si moltiplica la parte decimale del prodotto ancora per 60: il risultato è il valore dei secondi.

Ad esempio volendo convertire 52,4725° in gradi DMS si ha:

a) D = 52°
b) 0,4725° · 60 = 28,35′ → M = 28′;
c) 0,35′ · 60 = 21″ → S = 21″.

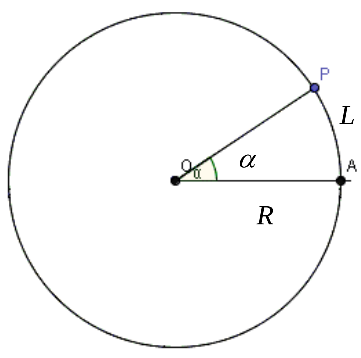
e quindi 52,4725° (DD) → 52° 28′ 21″

5. Che cosa si intende per misura di un angolo in radianti?

Assegnata una generica circonferenza di raggio OA, indichiamo con α l'angolo $A\hat{O}P$:

$$\alpha = A\hat{O}P$$

<u>La misura dell'angolo α in radianti è data dal rapporto tra la lunghezza *L* dell'arco *AP* sotteso dall'angolo α e la lunghezza *R* del raggio *OA*</u>:



$$\alpha_{RAD} = \frac{L}{R} = \frac{\overset{\frown}{A}\overset{\frown}{P}}{\overline{O}\overline{A}}$$

Tale rapporto non dipende dal raggio della circonferenza.
Osserviamo che la misura in radianti di un angolo è un numero puro, ossia è *adimensionale*, dato che esprime il rapporto tra due lunghezze.

6. Come si converte il valore di un angolo da gradi DD in radianti?

Per convertire la misura di un angolo da gradi sessagesimali (DD) in radianti si usa la seguente proporzione, basata sul fatto che conosciamo l'espressione dell'angolo piatto sia in gradi sia in radianti:

$$\alpha^\circ{}_{DD} : 180^\circ = \alpha_{RAD} : \pi$$

Risolvendo la proporzione si ha: $\alpha_{RAD} = \dfrac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$

7. Come si converte il valore di un angolo da radianti in gradi DD?

Per convertire la misura di un angolo da radianti in gradi sessagesimali (DD) si usa la seguente proporzione, basata sul fatto che conosciamo l'espressione dell'angolo piatto sia in gradi sia in radianti:

$$\alpha^\circ{}_{DD} : 180^\circ = \alpha_{RAD} : \pi$$

Risolvendo la proporzione si ha: $\alpha^\circ = \dfrac{\alpha_{RAD}}{\pi} \cdot 180^\circ$

8. Qual è il valore della lunghezza di un arco *L* di circonferenza a partire dalla conoscenza del raggio *R* e dell'angolo sotteso α?

La lunghezza dell'arco *L* di circonferenza di raggio *R* sotteso dall'angolo α è pari a:

$$L = \alpha_{RAD} \cdot R$$

9. Che cos'è la circonferenza goniometrica?

La **Circonferenza Goniometrica** è la circonferenza di centro O(0;0) e raggio 1. Ricordiamo che in base alla Geometria Analitica una circonferenza di centro $C(x_0; y_0)$ e raggio *r* ha come equazione:

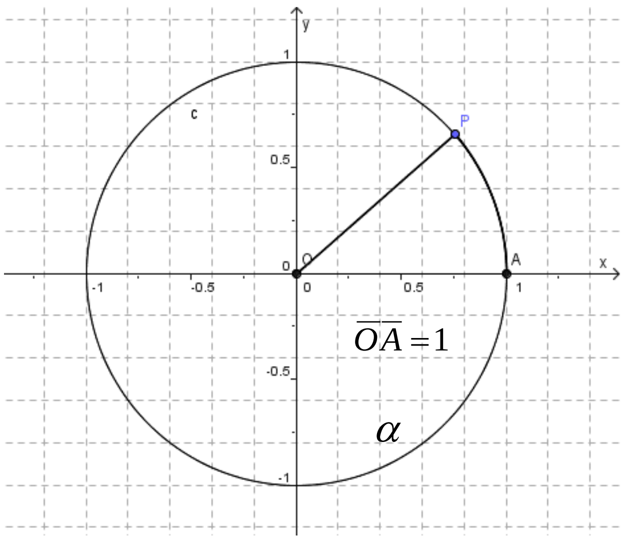
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Sostituendo $x_0 = 0;\quad y_0 = 0;\quad r = 1$ si ha:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$$

ottenendo così:

$$x^2 + y^2 = 1$$



10. Cosa si intende per coincidenza tra angoli ed archi sulla circonferenza goniometrica?

Poiché sulla circonferenza goniometrica il raggio *OA* è unitario, la misura in radianti di un angolo assume un valore particolare:

$$\alpha_{RAD} = \frac{\overset{\frown}{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overset{\frown}{AP}}{1} = \overset{\frown}{AP}$$

Si ottiene così che <u>sulla circonferenza goniometrica la misura dell’angolo in radianti coincide con la lunghezza dell’arco corrispondente</u>. Per questo motivo sulla circonferenza goniometrica si parla indifferentemente di angoli o archi.

11. Cosa si intende per angoli propri? E per angoli impropri?

Gli angoli la cui ampiezza è non maggiore di una circonferenza (tra 0° e 360°) sono detti *angoli propri*, mentre quelli la cui ampiezza supera una circonferenza sono detti *angoli impropri*.
La misura dell’ampiezza di un angolo improprio si può sempre ricondurre a quella di un angolo proprio più un numero intero di giri, mediante il metodo delle sottrazioni successive.
Ad esempio un angolo improprio di 1000° si riconduce ad un angolo proprio di 280° sottraendo 2 giri:

$1000° - 2 \cdot 360° = 280°$.

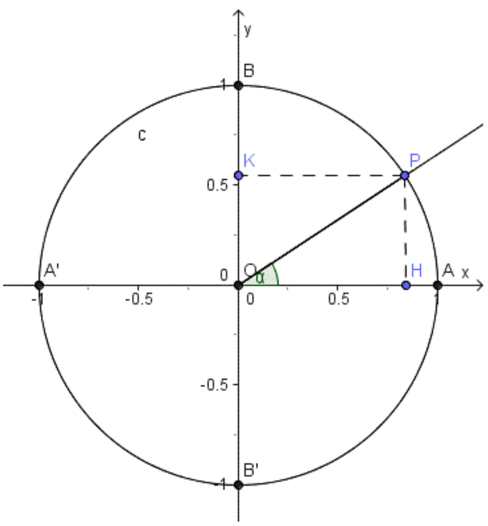
Anche gli angoli negativi possono essere considerati impropri e ricondotti ad angoli propri aggiungendo un opportuno numero di giri.
Ad esempio un angolo negativo di -1500° si riconduce ad un angolo proprio di 300° aggiungendo 5 giri:

$-1500° + 5 \cdot 360° = 300°$.

12. Cosa si intende per funzione matematica? Cosa sono il dominio e il codominio di una funzione?

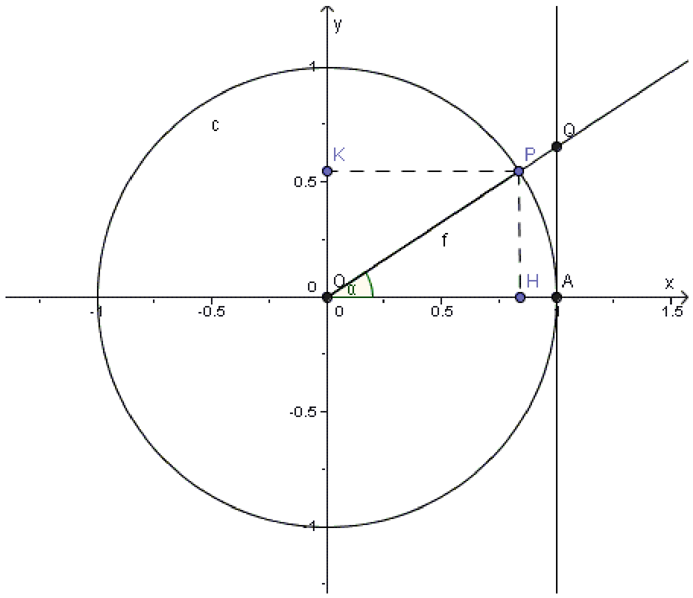
Una funzione matematica è una corrispondenza che ad ogni valore (ammissibile) della variabile indipendente *x* associa un unico valore della variabile indipendente *y* secondo una legge assegnata.
Il legame tra la *x* e la *y* è indicato con l’espressione $y = f(x)$.
Il *dominio* della funzione è l’insieme dei valori della variabile indipendente *x* in cui la funzione *f* è definita o calcolabile; il *codominio* della funzione è l’insieme dei valori assunti dalla variabile dipendente *y*.

13. Cosa si intende per coseno di una angolo α? E per seno di un angolo α?



Consideriamo un generico punto P appartenente alla circonferenza goniometrica. Il segmento OP forma con la metà positiva dell’asse *x* un angolo, indicato con α.
Si definisce allora coseno di α (**cos α**) l’**ascissa del punto P**, mentre si definisce seno di α (**sen α**) l’**ordinata del punto P**.
Per chiarezza si precisa che **il coseno (e il seno) di un angolo non è un segmento ma la misura di un segmento orientato**, cioè un numero reale con segno. In altre parole, il coseno dell’angolo α è la misura del segmento *OH*, presa con segno positivo se *H* è a destra di *O*, con segno negativo se *H* è a sinistra di *O*. Analogamente il seno dell’angolo α è la misura del segmento *OK*, presa con segno positivo se *K* è al di sopra di *O*, con segno negativo se *K* è al di sotto di *A*.
Se assumiamo come variabile indipendente l’angolo α positivo o negativo misurato sulla circonferenza goniometrica, il coseno di un angolo è quella funzione matematica che ad ogni angolo α associa il coseno di quest’angolo, come definito precedentemente sulla circonferenza goniometrica. Analogamente per il seno.

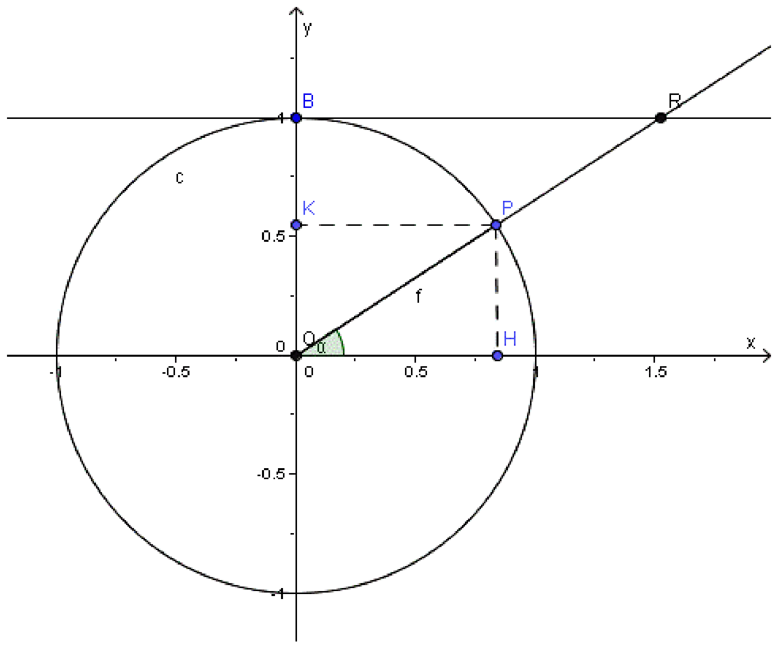
14. Cosa si intende per tangente di un angolo α?



Tracciamo la retta verticale, tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto A (1;0).
Il prolungamento del segmento OP incontra tale retta nel punto Q. Si definisce allora tangente goniometrica dell'angolo α (**tg α**) **l'ordinata AQ del punto Q** o in altre parole, la misura del segmento *AQ*, presa con segno positivo se *Q* è a al di sopra di *A*, con segno negativo se *Q* è al di sotto di *A*.
La tangente di un angolo non è un segmento ma la misura di un segmento orientato, cioè un numero reale con segno.
Se assumiamo come variabile indipendente l'angolo α positivo o negativo misurato sulla circonferenza goniometrica, la tangente di un angolo è quella funzione matematica che ad ogni angolo α associa la tangente di quest'angolo, come appena definito.

15. Cosa si intende per cotangente di un angolo α?

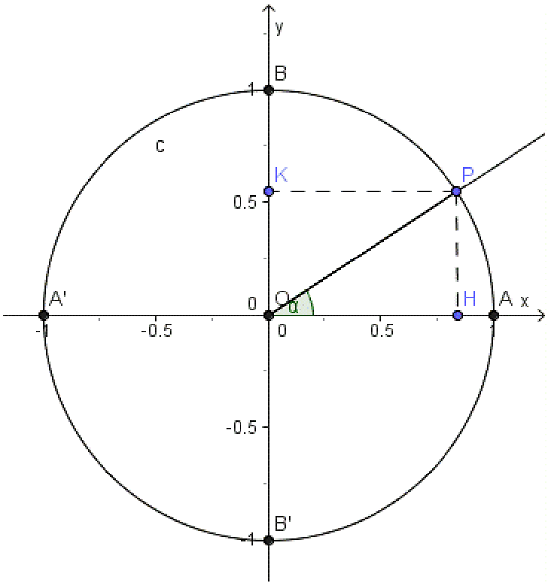
Tracciamo la retta orizzontale, tangente alla circonferenza goniometrica e passante per il punto *B (0;1)*.



Il prolungamento del segmento *OP* incontra tale retta nel punto *R*. Si definisce allora **cotangente goniometrica dell'angolo α** $(\mathrm{cotg}\alpha)$ **l'ascissa del punto *R***, o in altre parole, la misura del segmento *BR*, presa con segno positivo se *R* è a destra di *B*, con segno negativo se *R* è sinistra di *B*.
Se assumiamo come variabile indipendente l'angolo α positivo o negativo misurato sulla circonferenza goniometrica, la cotangente di un angolo è quella funzione matematica che ad ogni angolo α associa la cotangente di quest'angolo, come appena definito.

16. Cosa afferma la 1ª identità fondamentale della goniometria?

Con riferimento alla figura a lato, poiché il triangolo OPH è rettangolo, vale il teorema di Pitagora:



$OH^2 + HP^2 = OP^2$

ma OH = cos α;

HP = OK = sen α;

OP è il raggio della circonferenza goniometrica e vale 1;

sostituendo avremo dunque

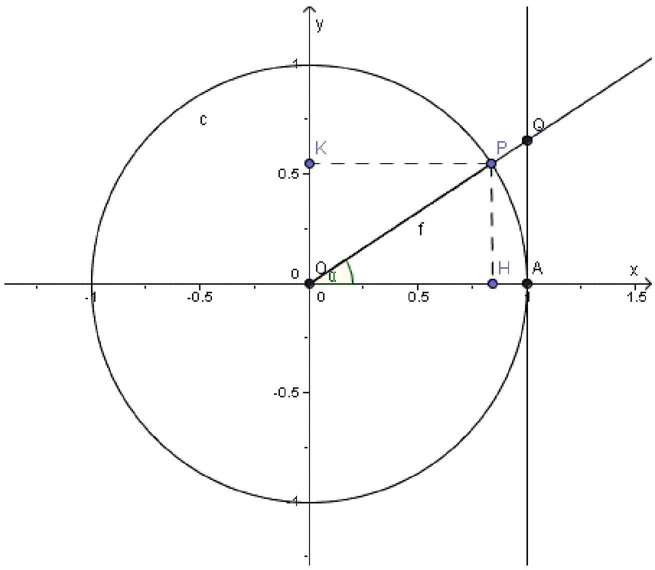
$\boxed{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1}$

Tale relazione prende il nome di **1ª identità fondamentale della goniometria.**

17. Cosa afferma la 2ª identità fondamentale della goniometria?

Con riferimento alla figura a lato, Consideriamo i triangoli rettangoli OPH e OQA: essi hanno in comune l'angolo α e sono simili, ovvero i loro lati sono in proporzione.

AQ : OA = HP : OH



risulta AQ = tg α;

OA = raggio = 1

HP = OK = sen α;

OH = cos α;

sostituendo otteniamo:

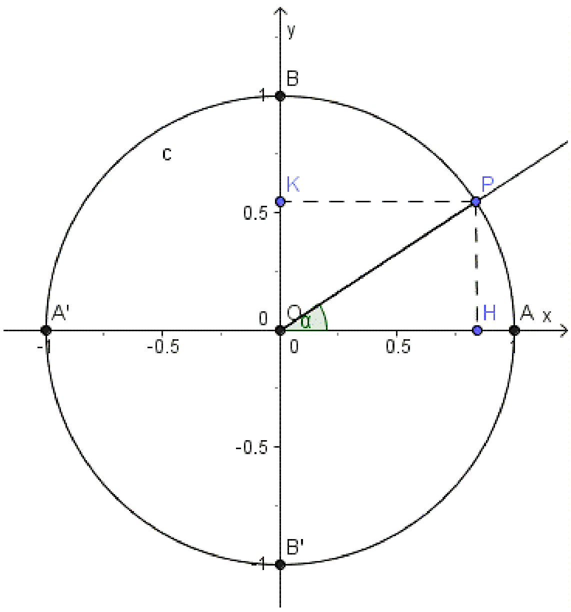
tg α : 1 = sen α : cos α

e cioè:

$\boxed{\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$.

18. Qual è il Dominio delle funzioni goniometriche coseno e seno?

Per quanto riguarda il coseno e il seno, dato un qualsiasi angolo α, individuato corrispondentemente il punto P sulla circonferenza goniometrica, è sempre possibile costruire le proiezioni ortogonali *HO* e *KO* sugli assi *x* e *y* e minare coseno e seno dell'angolo.
Pertanto il dominio sia del coseno che del seno è dunque tutto l'asse reale e si può scrivere:



Dominio(coseno) = R oppure $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Dominio(seno) = R oppure $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

19. Qual è il Codominio delle funzioni goniometriche coseno e seno?

Coseno e seno sono state definite come l'ascissa e l'ordinata di un punto P variabile sulla circonferenza goniometrica, di raggio unitario. Il massimo valore dell'ascissa si ha quando P è sul punto A, il minimo valore quando P è sul punto A'; analogamente il massimo valore del seno si ha quando il punto P coincide con B, il minimo valore quando P coincide con B'.
Possiamo quindi concludere dicendo che

$$-1 \le \cos\alpha \le +1 \text{ e } -1 \le \operatorname{sen}\alpha \le +1$$

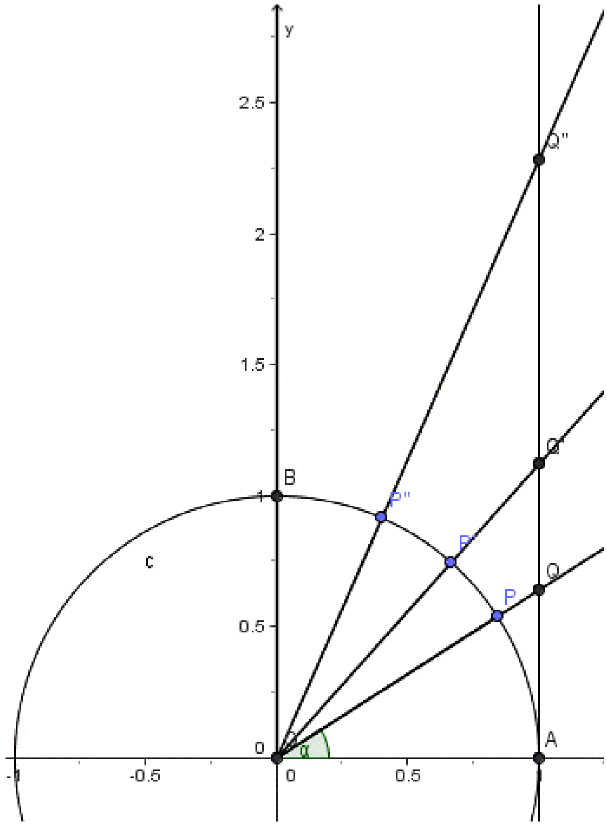
Pertanto <u>le funzioni goniometriche coseno e seno hanno per codominio l'intervallo</u> $[-1;+1]$.

Codominio(coseno) = $[-1;+1]$
Codominio(seno) = $[-1;+1]$

20. È possibile definire il valore della tangente nell'angolo di 90°? Qual è il Dominio della funzione tangente?

Consideriamo la funzione tangente: a mano a mano che l'angolo α si avvicina al valore di 90° (o di $\pi/2$ in radianti), il punto *P* si avvicina al punto *B(0;1)* e le semirette *OP* tendono a diventare sempre più vicine alla verticale, determinando un aumento vertiginoso del valore dell'ordinata del punto *Q* e cioè della tangente; quando l'angolo vale proprio 90° il punto *P* sulla circonferenza coinciderà con il punto *B*, la semiretta *OP* sarà verticale e parallela alla retta verticale per *A*: le due rette saranno parallele e pertanto non avranno punto di intersezione o anche, *avranno intersezione all'infinito*. Per questo motivo **non è definito il valore della tangente per l'angolo di 90°**; si può anche dire che la tangente a 90° è infinita. Un discorso analogo si può ripetere per l'angolo di 270° e per tutti gli angoli impropri definiti nei giri successivi.
Con riferimento al dominio possiamo allora concludere:
Dominio(tangente) $= \mathrm{R} - \{90° + k180°, \quad \text{con } k \in Z\}$

o in radianti $\mathrm{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{con } k \in Z\right\}$



21. Qual è il Codominio della funzione goniometrica tangente?

Essendo la tangente definita come l'ordinata di un punto al di fuori della circonferenza goniometrica, essa può assumere qualsiasi valore reale; ciò si esprime dicendo che:
Codominio(tangente) = R.

22. Qual è il Dominio della funzione cotangente?

La cotangente non è definita quando l'angolo α vale 0° oppure 180°:
Dominio(cotangente) $= \mathrm{R} - \{k180°, \quad \text{con } k \in Z\}$ o in radianti $\mathrm{R} - \{k\pi, \quad \text{con } k \in Z\}$

23. Qual è il Codominio della funzione goniometrica cotangente?

Codominio(cotangente) = R.

24. Quali sono i segni delle funzioni goniometriche nei 4 quadranti?

Le funzioni goniometriche coseno, seno, tangente, cotangente possono essere positive, negative o annullarsi. Nella tabella seguente è riportato il segno che ognuna di esse assume nei 4 quadranti:

Quadrante	cos (α)	sin (α)	tg (α)	cotg (α)
I	+	+	+	+
II	-	+	-	-
III	-	-	+	+
IV	+	-	-	-

25. Qual è la periodicità delle funzioni goniometriche?

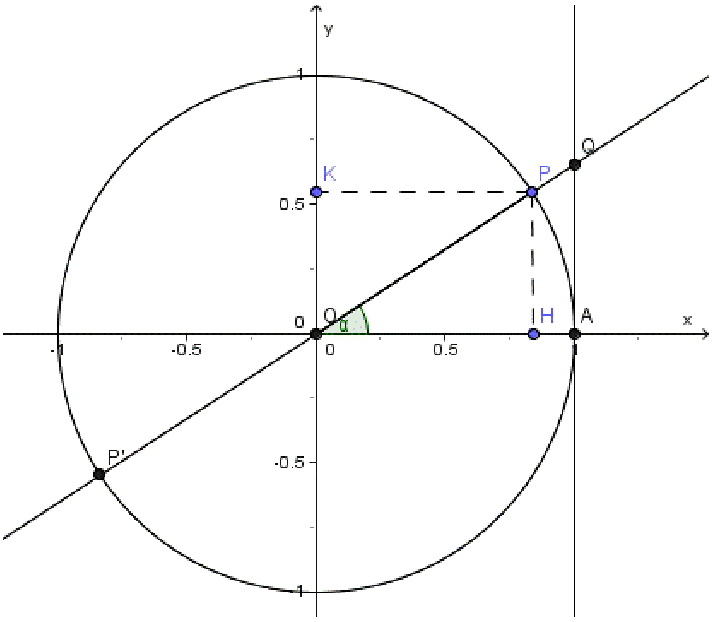
Supponiamo di far variare l'angolo α su tutta la circonferenza e di calcolare le funzioni goniometriche coseno e seno. Nel momento in cui l'angolo supera il valore di 360° ritorneremo sulle stesse posizioni iniziali e ovviamente, le funzioni goniometriche ri-assumeranno gli stessi valori del giro precedente. Possiamo esprimere questo concetto dicendo che **le funzioni goniometriche coseno e seno sono funzioni periodiche**, e **il periodo**, definito come l'intervallo della variabile indipendente dopo cui la funzione assume gli stessi valori, vale **360°:**

$$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$$

$$\text{sen}(\alpha + 360°) = \text{sen}\alpha$$

Per quanto riguarda le funzioni tangente e cotangente non è necessario aspettare un giro completo perché esse assumano gli stessi valori, ma, come si vede nella figura a fianco, è sufficiente mezzo giro:

Possiamo esprimere questo concetto dicendo che **le funzioni goniometriche tangente e cotangente sono funzioni periodiche di periodo pari a 180°:**



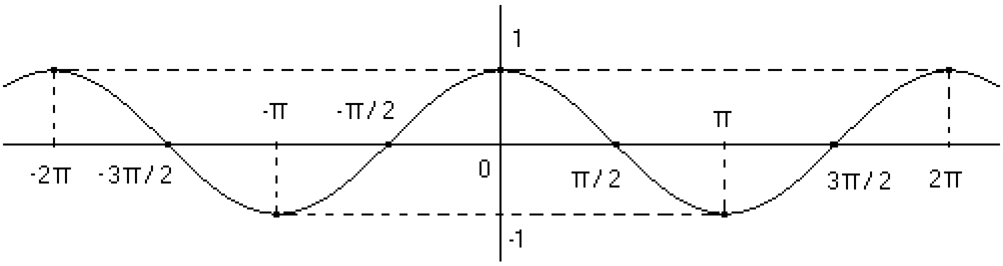
26. Quali sono i valori delle funzioni goniometriche nei principali angoli?

Nella tabella seguente vengono riportati i valori che le funzioni goniometriche assumono nei principali angoli:

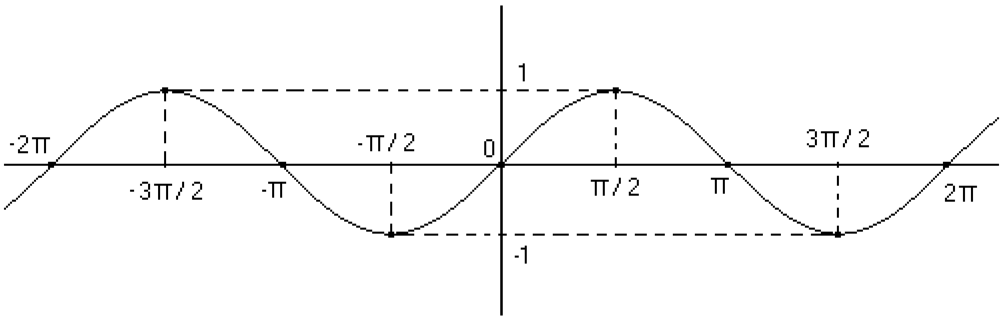
angolo α (°)	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
angolo α (rad)	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2 π
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{cotg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

27. Come si chiamano i grafici delle funzioni goniometriche?

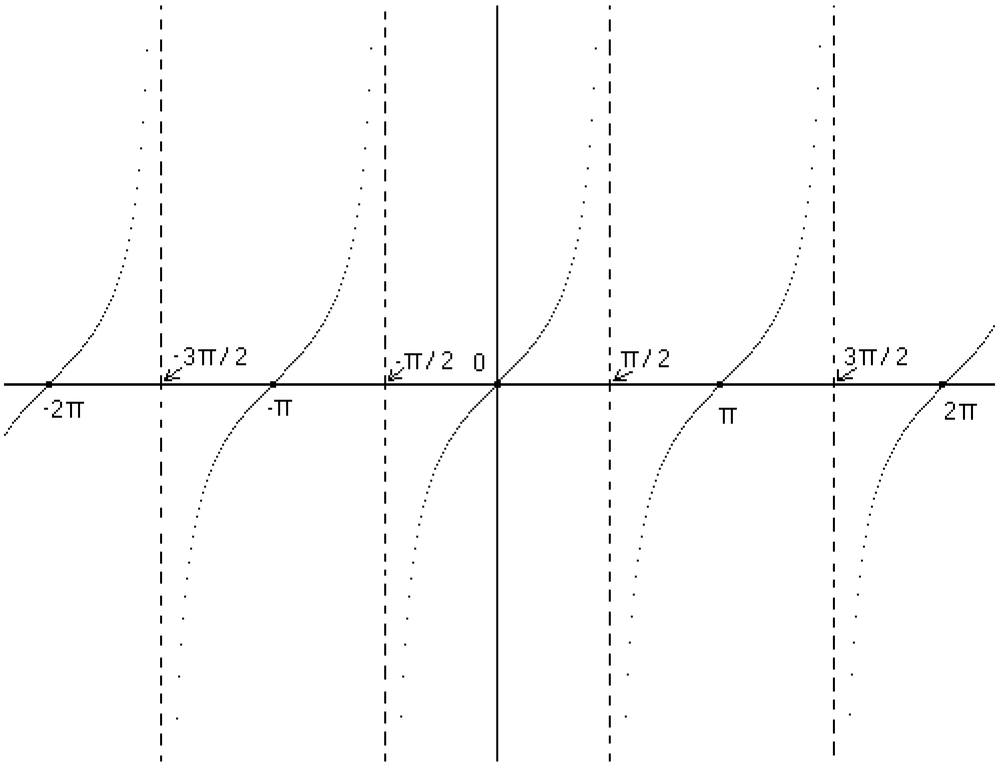
Il grafico della funzione coseno $y=\cos x$ i chiama *cosinusoide*; il grafico della funzione seno $y=\mathrm{sen}x$ si chiama *sinusoide*; il grafico della funzione $y=\mathrm{tg}x$ si chiama *tangentoide;* infine il grafico della funzione y = cotgx si chiama *cotangentoide*.



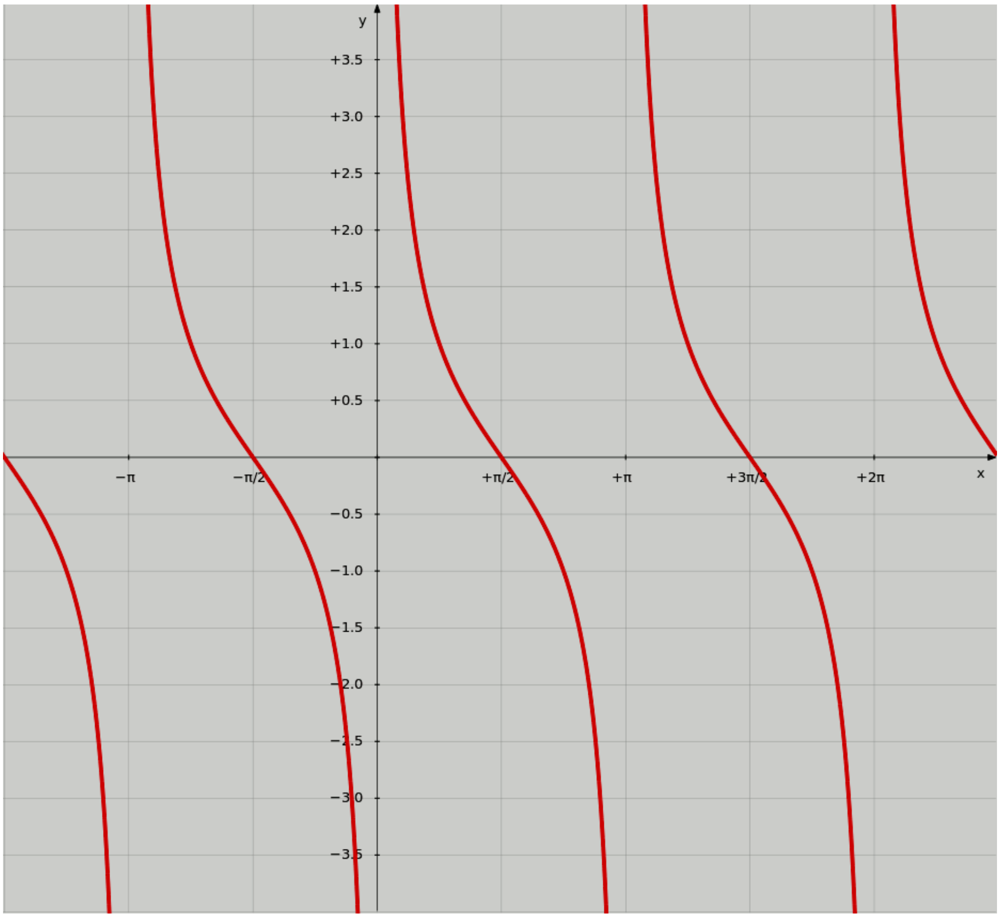
cosinusoide



sinusoide



tangentoide



cotangentoide