181

$$\boxed{y = \frac{1-x}{x+4}}$$

funzione razionale

DOMINIO: Il denominatore dev'essere diverso da zero

$x+4=0$

$x \neq -4$

STUDIO DEL SEGNO $\dfrac{1-x}{x+4}$

STUDIO DEL SEGNO DI $1-x$

$1-x=0 \quad -x=-1 \quad x=1$

	1		x
$+\ +$	0	$-\ -$	

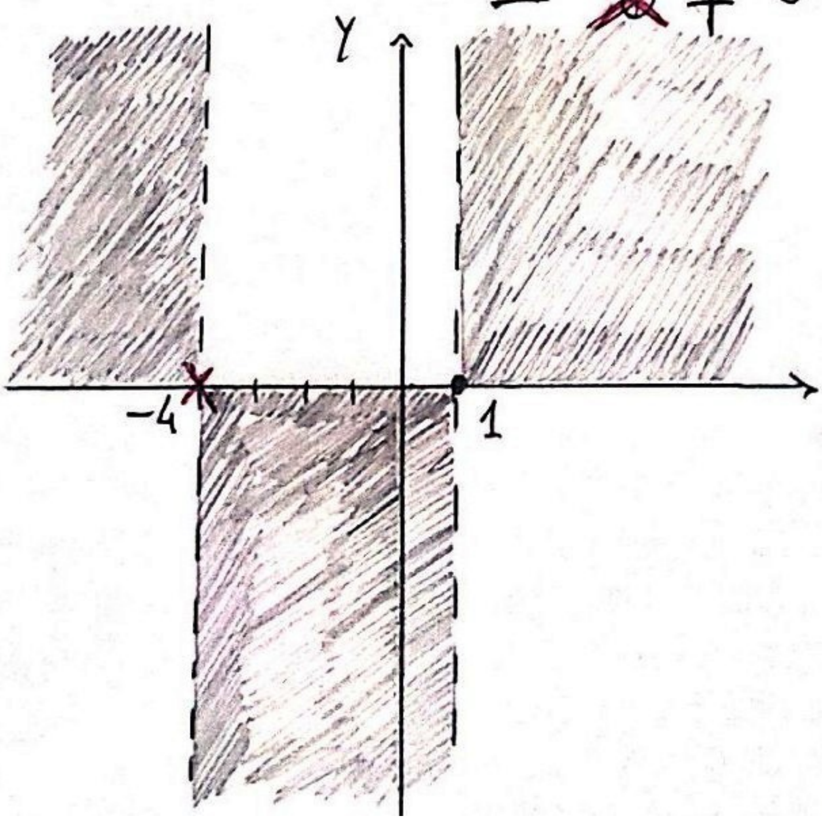
STUDIO DEL SEGNO DI $x+4$

$x+4=0 \quad x=-4$

	-4		x
$-$	$\times$	$+$	

GRAFICO QUOZIENTE

		-4		1		x
$1-x$	$+++++$	$+$	$++$	0	$---$	
$x+4$	$----$	$\times$	$+++$	$+$	$+++$	
	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	



n 182 $\boxed{y = 4x^2+4x+1}$ Funzione polinomiale (parabola)

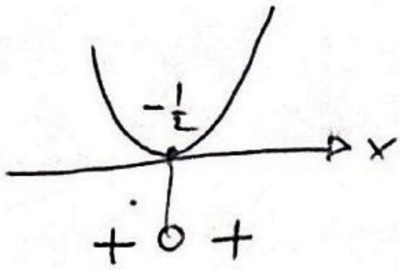
DOMINIO: $\mathbb{R}$

STUDIO DEL SEGNO di $4x^2+4x+1$

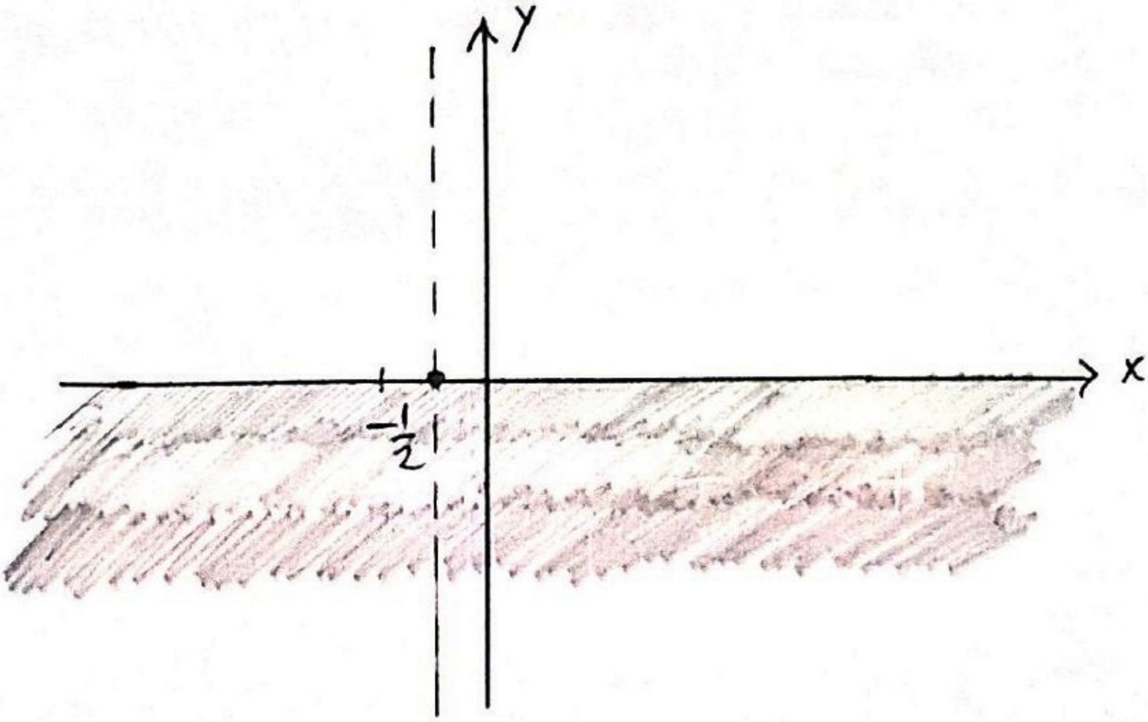
$y = 4x^2+4x+1$ parabola ascendente
calcolo intersezioni con asse x

$a=4$
$b=4$
$c=1$

$\Delta = b^2-4ac$
$= 4^2-4(4)(1)$
$= 16-16=0$



$$x_{1;2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4\pm\sqrt{0}}{2(4)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$



183 $\boxed{y = x^3 - 6x^2}$ funzione polinomiale

DOMINIO: $\mathbb{R}$

STUDIO DEL SEGNO DI $x^3 - 6x^2$

$x^3 - 6x^2 = x^2(x-6)$

- studio del segno di x^2

  x^2 è un quadrato, quindi è sempre positivo, tranne per $x=0$, dove si annulla

		0		x
	$+$	0	$+$	

- studio del segno di $x-6$

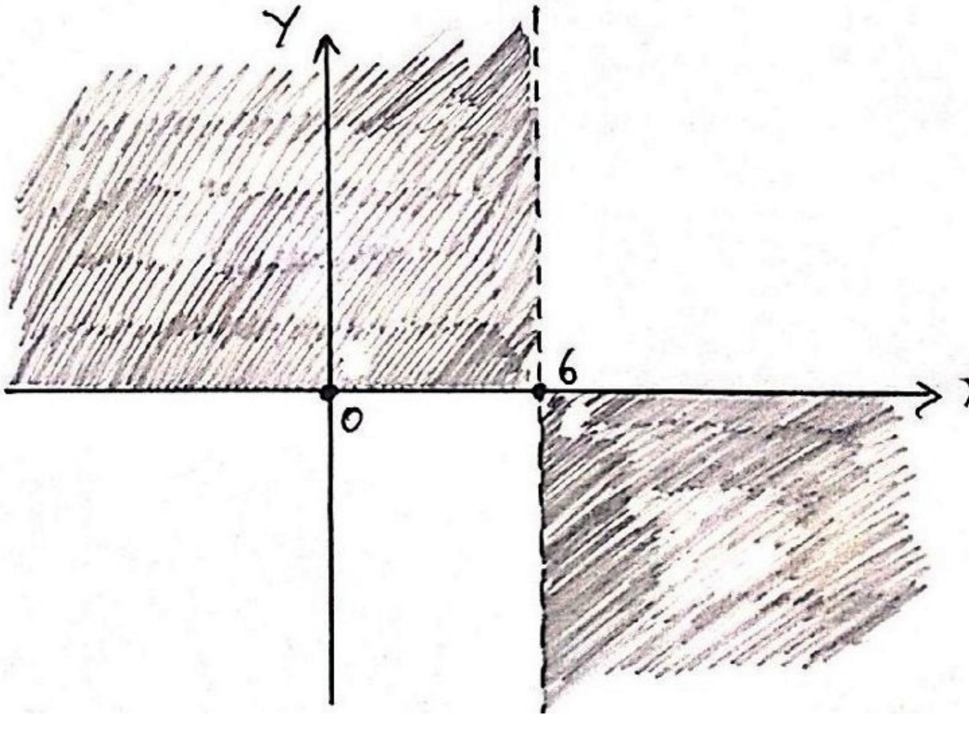
  $x - 6 = 0$

  $x = 6$

		6		x
	$-$	0	$+$	

- grafico prodotto

		0		6		x
x^2	$++++$	0	$+++$		$++++$	
$x-6$	$-----$		$---$	0	$++++$	
$x^2(x-6)$	$-$	0	$-$	0	$+$	

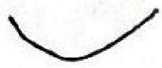


185 $y = 2x^2 - x + 1$ funzione polinom. (parabola)

DOMINIO: $\mathbb{R}$

STUDIO DEL SEGNO

$2x^2 - x + 1$ PARABOLA ASCENDENTE



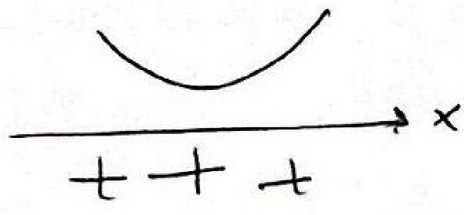
CALCOLO LE INTERSEZIONI CON L'ASSE x:

$a = 2 \quad \Delta = b^2 - 4ac$

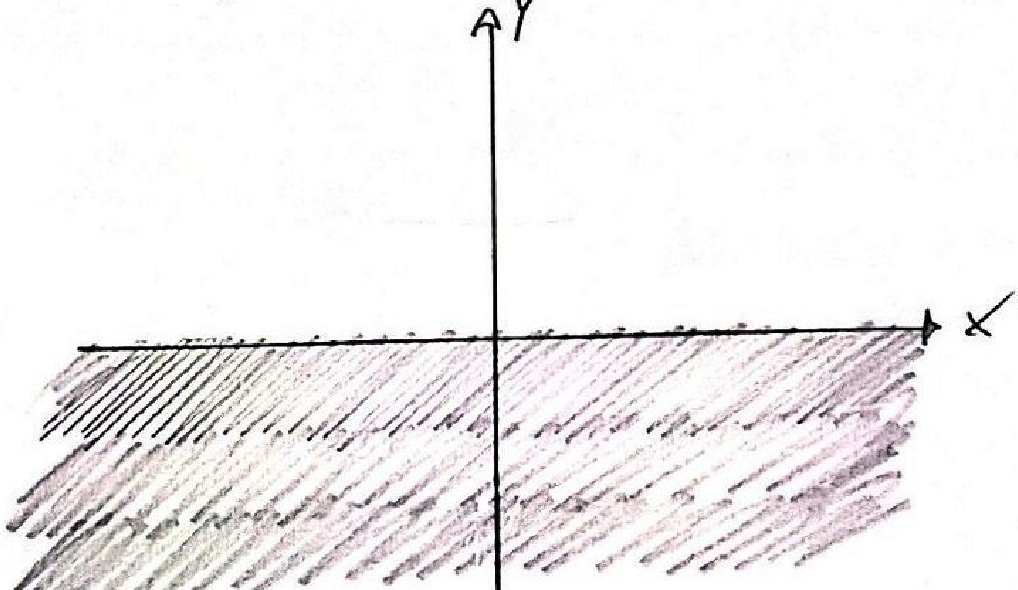
$b = -1 \quad\quad = (-1)^2 - 4(2)(1)$

$c = 1 \quad\quad = 1 - 8 = -7 < 0$

PARABOLA ESTERNA



La funzione è sempre positiva



186 $\boxed{y = \frac{x^2-9}{x}}$ funzione razionale

DOMINIO: Denominatore diverso da zero:

$x \neq 0$ $\qquad \mathbb{R} - \{0\}$

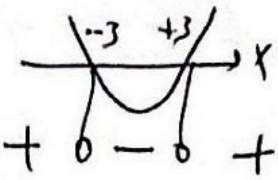
STUDIO DEL SEGNO di $y = \frac{x^2-9}{x}$

• <u>Studio del segno di x^2-9</u>

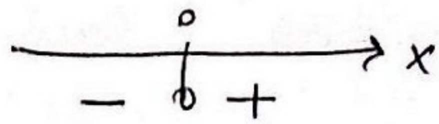
$y = x^2-9$ PARABOLA ASCENDENTE

Intersezioni con l'asse x:

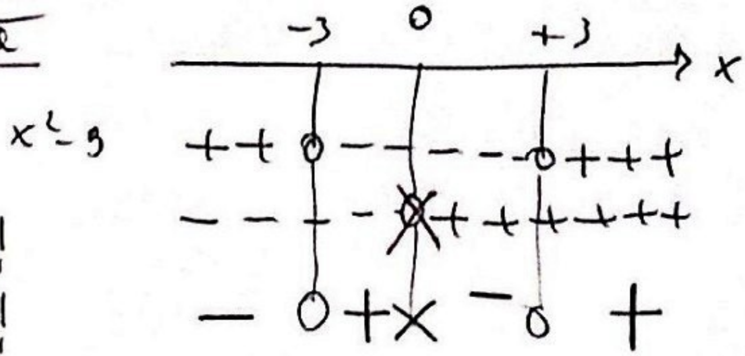
$x^2-9=0 \qquad x^2=9 \qquad \sqrt{x^2}=\pm\sqrt{9} \qquad x=\pm3$

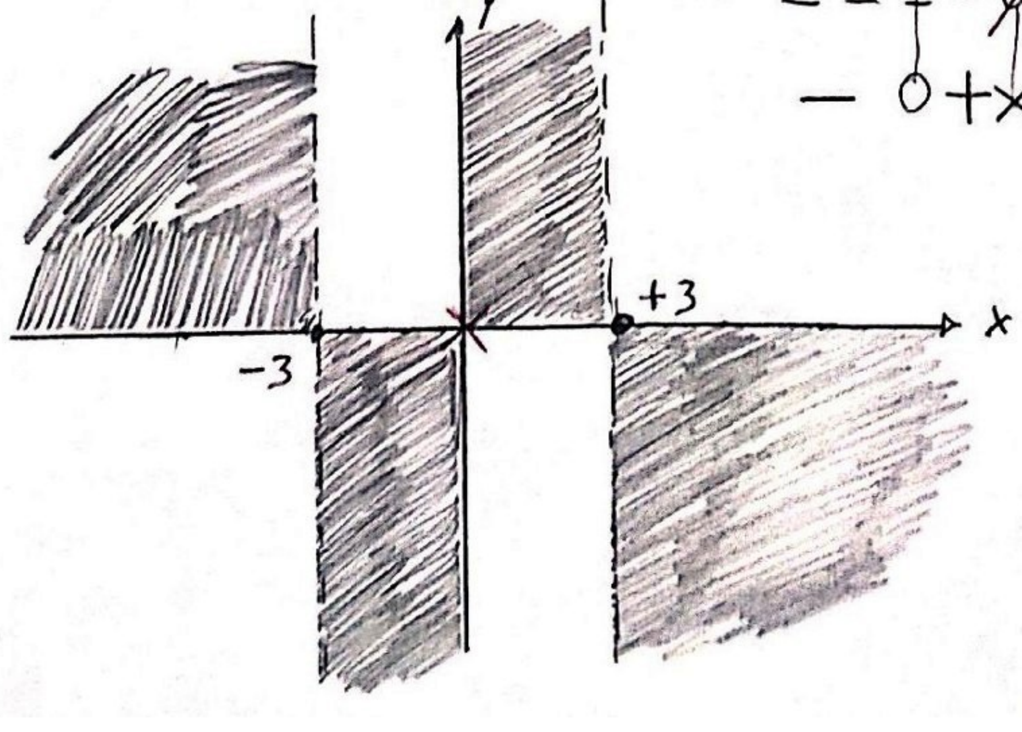


• Studio del segno di x:



• <u>grafico quoziente</u>





187 $\boxed{y = x^7 - x^3}$ funzione polinomiale

DOMINIO : $\mathbb{R}$

STUDIO DEL SEGNO DI $x^7 - x^3$

scompongo $x^7 - x^3 = x^3(x^4 - 1) =$

$$x^3(x^2+1)(x^2-1) = x^3(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

- Studio del segno di $x^3 = x \cdot x \cdot x$

x^3 ha lo stesso segno di x, essendo l'esponente dispari

		0	
x	−	0	+
x	−	0	+
x	−	0	+
x^3	−	0	+

- Studio del segno di x^2+1

somma di x^2 (mai negativo) e di 1, positivo, quindi x^2+1 sempre positivo

x^2+1	+ + + + + + +

- Studio del segno di $x+1$

$x+1=0 \quad x=-1$

		−1	
$x+1$	− − − −	0	+ + + +

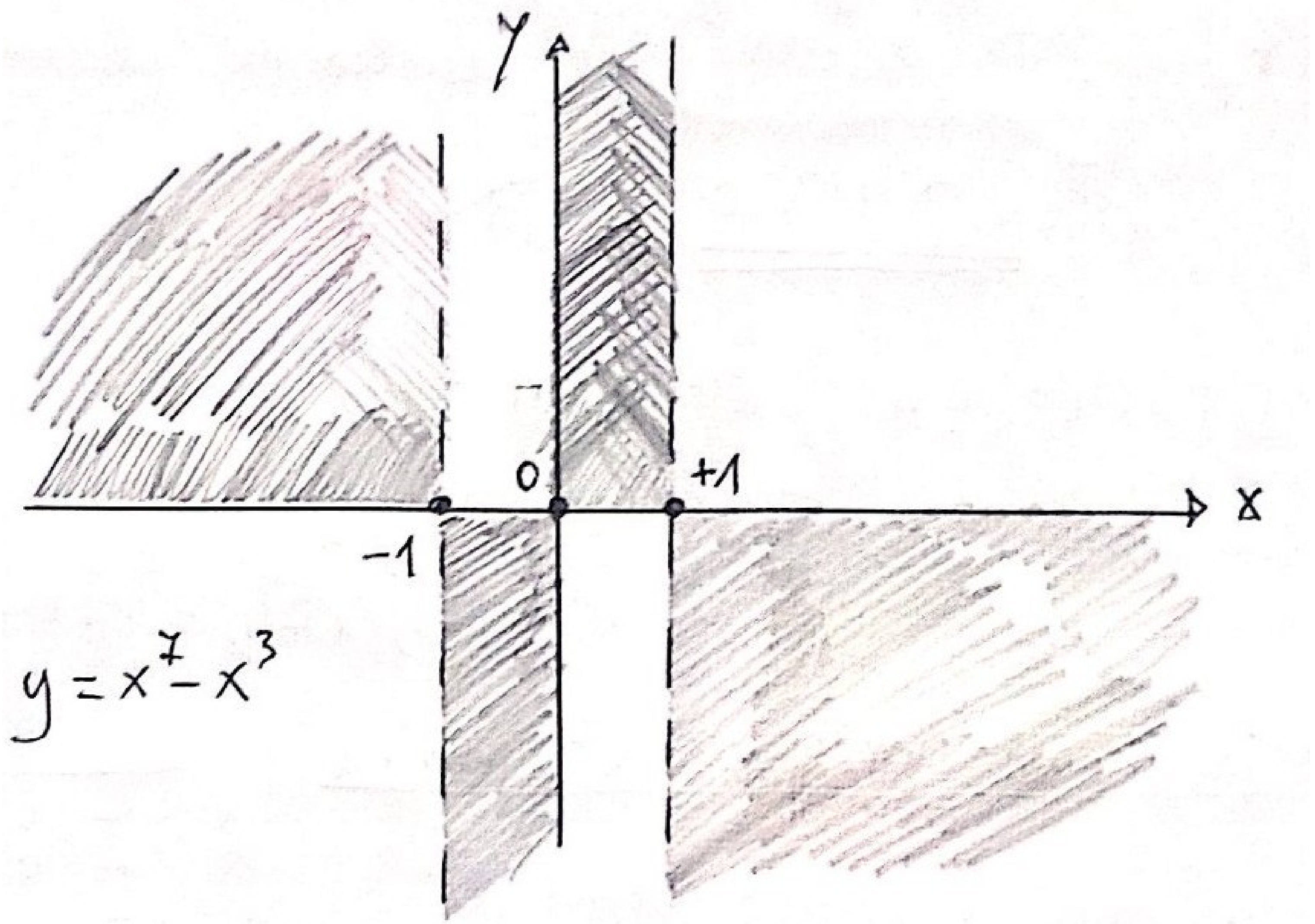
- Studio del segno di $x-1$

$x-1=0 \quad x=1$

		1	
$x-1$	− − −	0	+ + +

GRAFICO PRODOTTO

		−1		0		+1	
x^3	− − −		− −	0	+ +		+ + + +
x^2+1	+ + +		+ +		+		+ + + + +
$x+1$	− − −	0	+ +		+		+ + + + +
$x-1$	− − −		− −		− −	0	+ + + +
	−	0	+	0	−	0	+



INTERSEZIONI ASSE X:

A =(-1 ; 0)

O =(0 ; 0)

B =(1 ; 0)

188

$$\boxed{y = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(2x+1)}}$$

funzione razionale

◉ DOMINIO: Denominatore $\neq 0$

- $x - 2 \neq 0 \qquad x \neq 2$
- $2x + 1 \neq 0 \qquad 2x \neq -1 \qquad x \neq -\frac{1}{2}$

DOMINIO $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} ; 2 \right\}$

◉ STUDIO DEL SEGNO

- Segno di $x-1$

  $x - 1 = 0 \qquad x = 1$

  1: $-$ 0 $+$

- Segno di $x+3$

  $x + 3 = 0 \qquad x = -3$

  -3: $-$ 0 $+$

- Segno di $x-2$

  $x - 2 = 0 \qquad x = 2$

  2: $-$ $\cancel{0}$ $+$

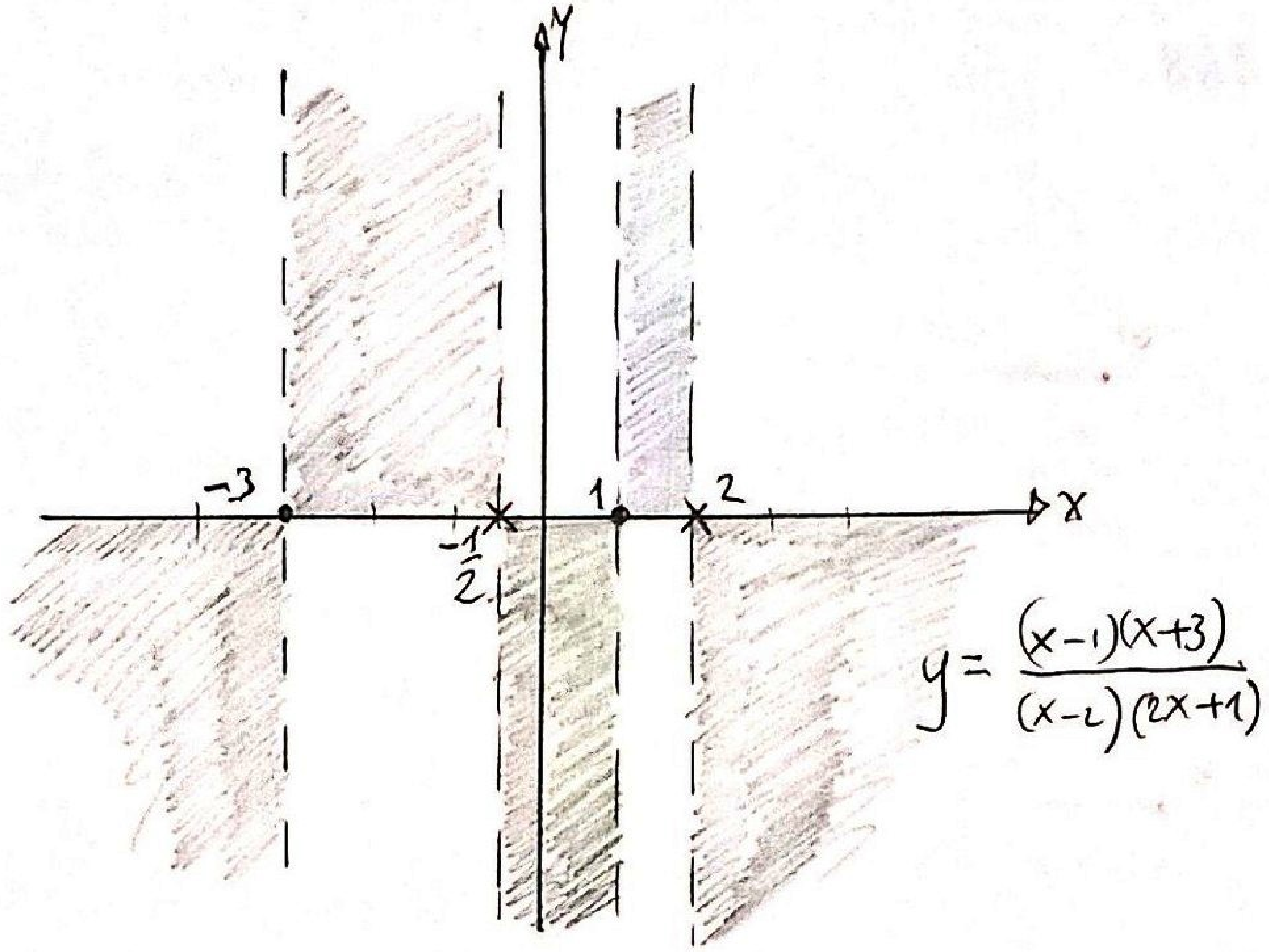
- Segno di $2x+1$

  $2x + 1 = 0 \qquad 2x = -1 \qquad x = -\frac{1}{2}$

  $-\frac{1}{2}$: $-$ $\cancel{0}$ $+$

GRAFICO QUOZIENTE

		-3		$-\frac{1}{2}$		1		2	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$-$	$\cancel{0}$	$+$
$2x+1$	$-$		$-$	$\cancel{0}$	$+$		$+$		$+$
y	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$



INTERSEZIONI ASSE X:

A =(-3 ; 0)

B =(1 ; 0)

190 $$\boxed{y = \frac{1}{x^3 - 10x^2 + 25x}}$$ Funzione razionale

DOMINIO Escludo i punti in cui il denominatore si annulla.

$x^3 - 10x^2 + 25x = 0$ EQUAZIONE DI III GRADO SI RISOLVE PER SCOMPOSIZIONE

raccoglimento totale

$x(x^2 - 10x + 25) = 0$

$x = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$a = 1$ $\Delta = b^2 - 4ac =$

$b = -10$ $= (-10)^2 - 4(1)(25)$

$c = 25$ $= 100 - 100 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm 0}{2(1)} = \frac{10}{2} = 5$$

DOMINIO: $x \neq 0$, $x \neq 5$ oppure $\mathbb{R} - \{0; 5\}$

STUDIO DEL SEGNO

- Studio del segno del numeratore 1

1 è sempre positivo

$+ + + + + + +$ x

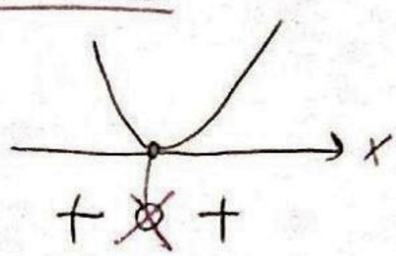
- Studio del segno di: x (denominatore)

0 x

$- - - \ 0 \ + + +$

- Studio del segno di $x^2-10x+25$

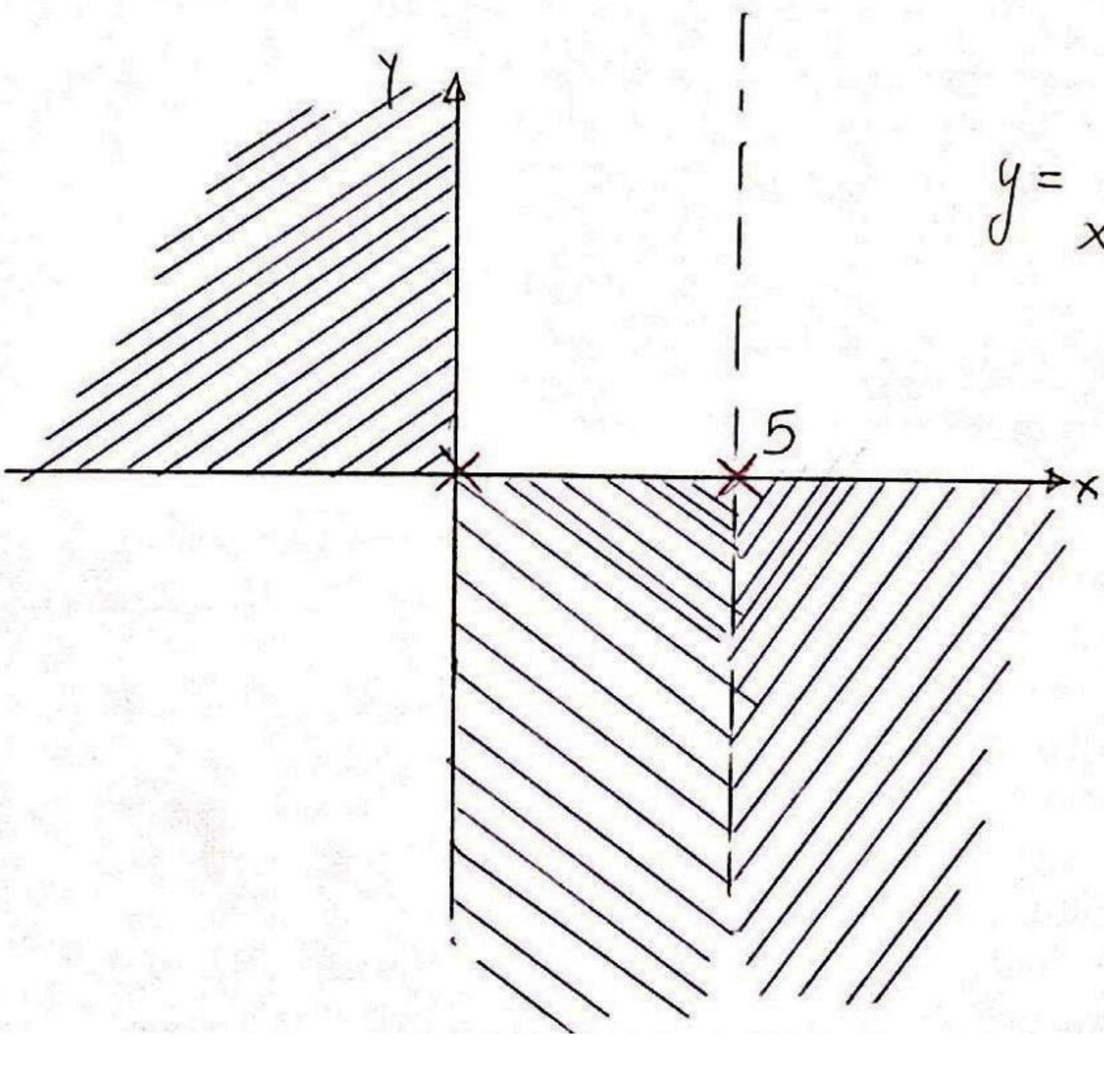
parabola ascendente



- GRAFICO QUOZIENTE

	$x<0$	0	$0<x<5$	5	$x>5$
1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2-10x+25$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$y=\dfrac{1}{x(x^2-10x+25)}$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$+$

190



191 $\boxed{y=\frac{6-x}{-x^3-9x}}$ funzione razionale

■ **DOMINIO** Bisogna escludere i valori che annullano il denominatore

$-x^3-9x=0$ EQUAZ III GRADO risolubile per scomposizione

raccoglimento totale

$-x(+x^2+9)=0$

$-x=0$; $x=0$

$x^2+9=0$ EQ II PURA

$x^2=-9$

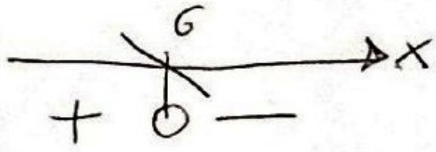
$\sqrt{x^2}=\pm\sqrt{-9}$ IMPOSS.

DOMINIO $x\neq 0$ oppure $\mathbb{R}-\{0\}$

■ **STUDIO DEL SEGNO**

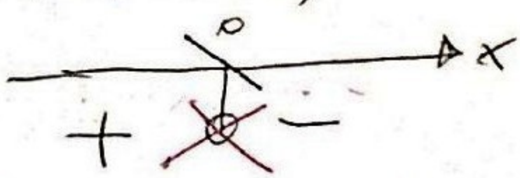
- Studio del segno di $6-x$ numeratore

$6-x=0$; $-x=-6$; $x=6$



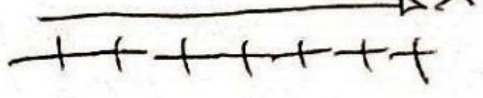
- Studio del segno di $-x$ (denominatore)

$-x=0$; $x=0$



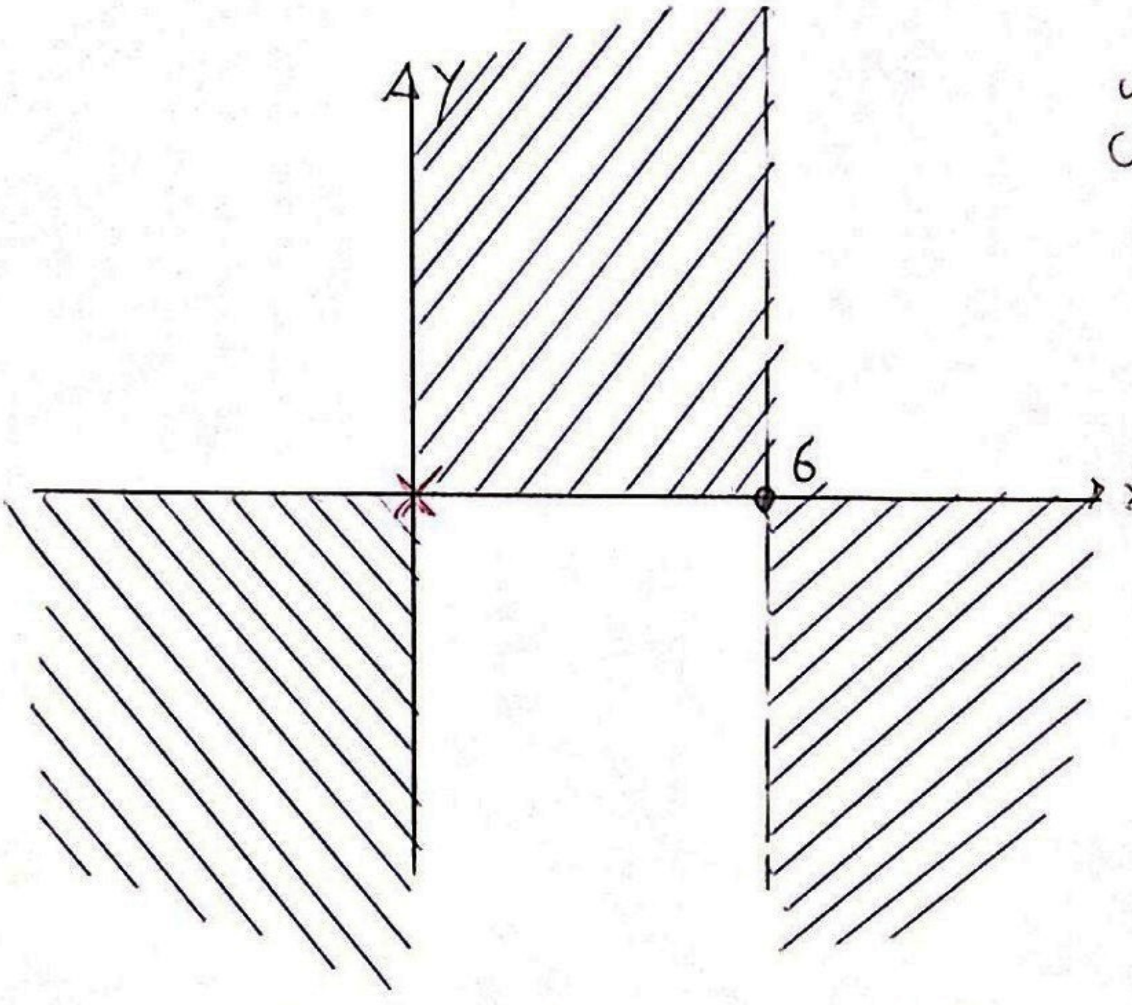
- Studio del segno di x^2+9 (denominatore)

x^2+9 è la somma di x^2 (mai negativo) e di 9, numero positivo; pertanto x^2+9 è sempre positivo.



- <u>Grafico quoziente</u>

	$x<0$	0	$0<x<6$	6	$x>6$
$6-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$-x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2+9	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$y=\dfrac{6-x}{-x(x^2+9)}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$



$$y=\frac{6-x}{-x^3-9x}$$

<u>INTERSEZIONI CON L'ASSE X</u> : $A(6;0)$

192 $\boxed{y = \dfrac{2x^2 - 8x}{x^2 - 2x + 4}}$ funzione razionale

DOMINIO Bisogna escludere i valori che annullano il denominatore

$x^2 - 2x + 4 = 0$ $\quad a = 1 \quad b = -2 \quad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 < 0$ NON VI SONO RADICI

DOMINIO $= \mathbb{R}$ (qualunque x reale)

STUDIO DEL SEGNO

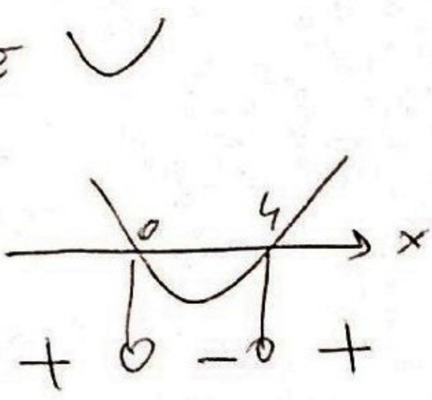
- STUDIO DEL SEGNO DI $2x^2 - 8x$

$y = 2x^2 - 8x$ PARABOLA ASCENDENTE

intersezioni parabola asse x

$2x^2 - 8x = 0$ SPURIA

$2x(x - 4) = 0$ — $x = 0$; $x - 4 = 0$, $x = 4$



- STUDIO DEL SEGNO DI $x^2 - 2x + 4$

$y = x^2 - 2x + 4$ PARABOLA ASCENDENTE

intersezioni con l'asse x

$x^2 - 2x + 4 = 0$ già visto, non esistono

(parabola ascendente, esterna all'asse x)

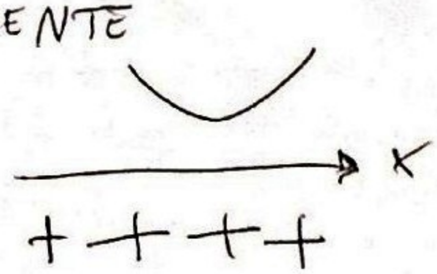
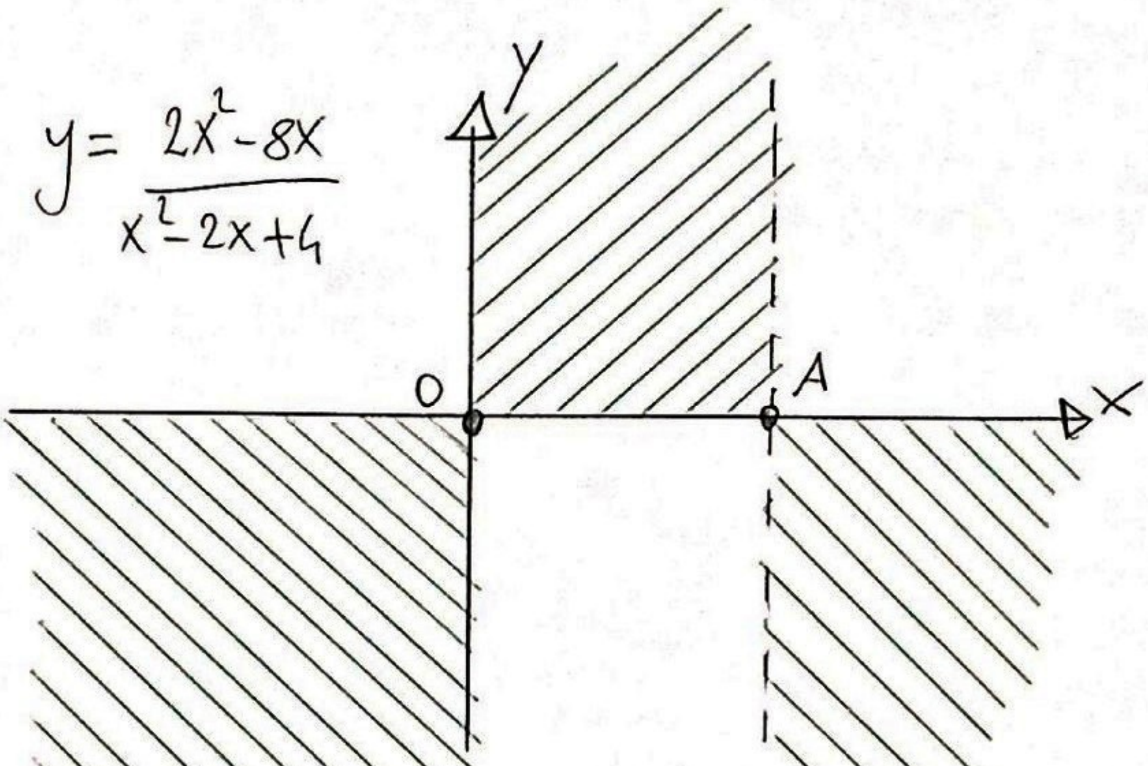


Grafico quoziente

		0		4		x
$2x^2-8x$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
x^2-2x+4	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	
$y=\dfrac{2x^2-8x}{x^2-2x+4}$	$+$	0	$-$	0	$+$	

192

$$y=\frac{2x^2-8x}{x^2-2x+4}$$



INTERSEZIONI CON L'ASSE X:

$O(0;0)$

$A(4;0)$

193 $\boxed{y = \dfrac{2^x}{2^x - 2}}$ funzione trascendente

DOMINIO Gli esponenziali sono sempre definiti ma il denominatore deve essere diverso da zero

$2^x - 2 \neq 0$; $2^x \neq 2$; $2^{\boxed{x}} \neq 2^{\boxed{1}}$ $x \neq 1$

DOMINIO $\mathbb{R} - \{1\}$ oppure $x \neq 1$

STUDIO DEL SEGNO

- studio del segno del numeratore:

  2^x sempre positivo

  2^x : $+ + + +$ ($\to x$)

- studio del segno del denominatore:

  $2^x - 2$ vediamo dove è positivo:

  $2^x - 2 \geq 0$; $2^x \geq 2$; facciamo il $\log_2$ di entrambi i membri:

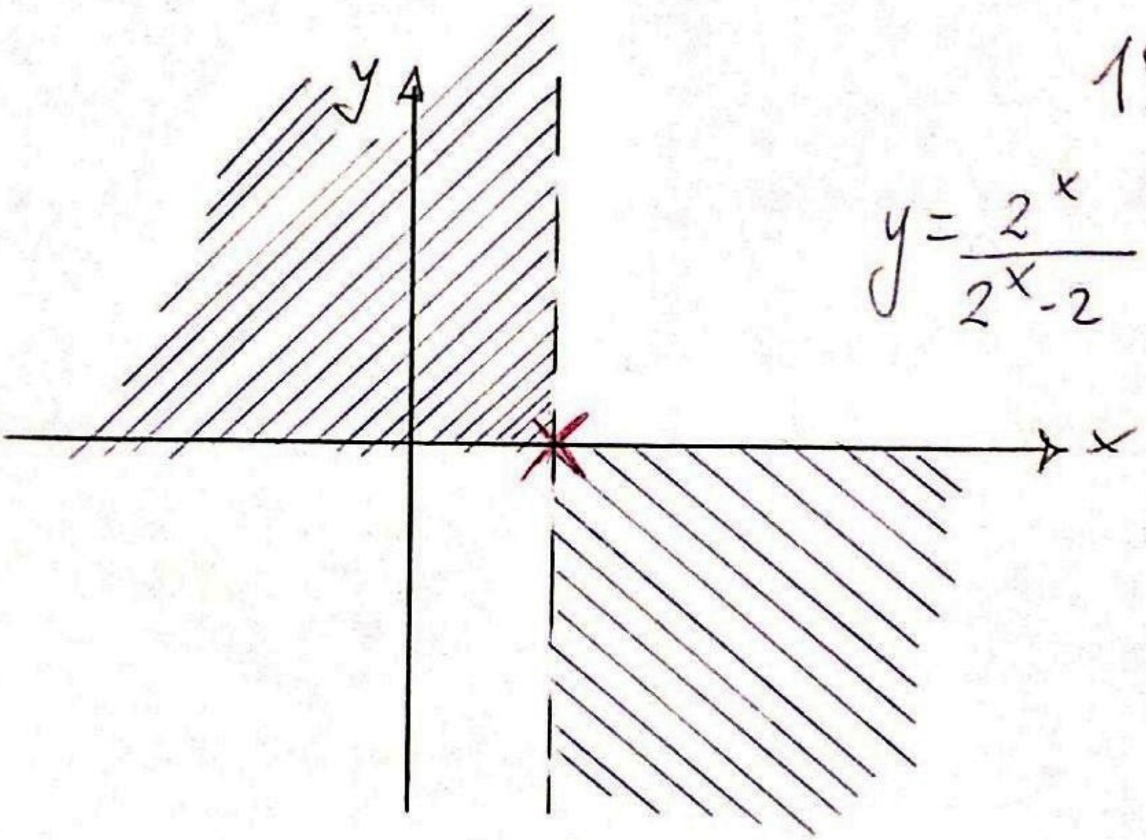
  $\log_2 2^x \geq \log_2 2$; $x \geq 1$ quindi il denominat. è positivo per $x \geq 1$

  analogamente il denominatore sarà negativo per $x < 1$.

  $2^x - 2$: $- - \; \cancel{0} \; + + +$ (in 1, $\to x$)

GRAFICO QUOZIENTE

		1	
2^x	+ + + +		+ + + +
2^x-2	− − − −	0	+ + + +
$\dfrac{2^x}{2^x-2}$	−	$\nexists$	+



193

$$y=\frac{2^x}{2^x-2}$$

194 $\boxed{y = \ln(2\,\text{sen}\,x)}$ funzione trascendente

la funzione è periodica di 2π

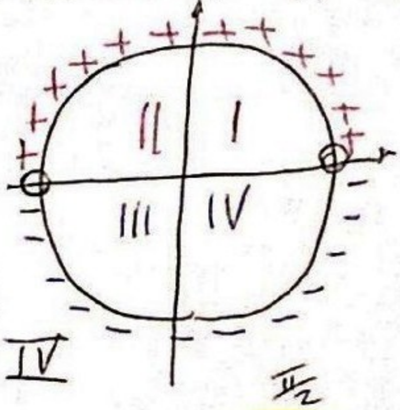
DOMINIO

L'argomento del logaritmo deve essere positivo

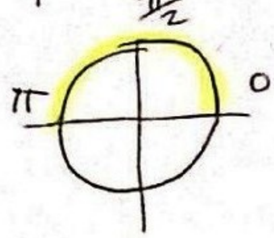
DISEQUAZIONE GONIOMETRICA

$2\,\text{sen}\,x > 0$

$\frac{2\,\text{sen}\,x}{2} > \frac{0}{2}$; $\boxed{\text{sen}\,x > 0}$



Il sen x è positivo nel I e II quadrante; si annulla in 0 e π; è negativo nel III e IV quadrante.



Scegliamo la parte positiva

DOMINIO: $0 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

STUDIO DEL SEGNO

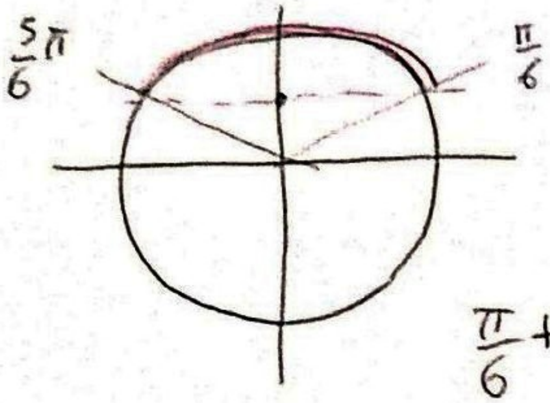
- Vediamo dove $\ln(2\,\text{sen}\,x)$ è positiva

$\boxed{\ln(2\,\text{sen}\,x) \geq 0}$ DISEQUAZIONE LOGARITMICA

passo a base "e" essendo il logaritmo naturale

$e^{\ln(2\,\text{sen}\,x)} \geq e^0$; $2\,\text{sen}\,x \geq 1$ DISEQUAZIONE GONIOMETRICA

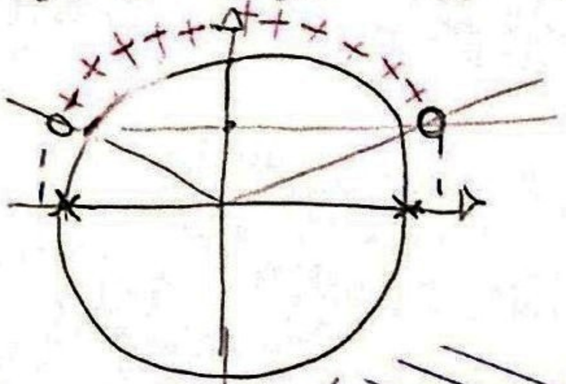
$\boxed{\text{sen}\,x \geq \frac{1}{2}}$



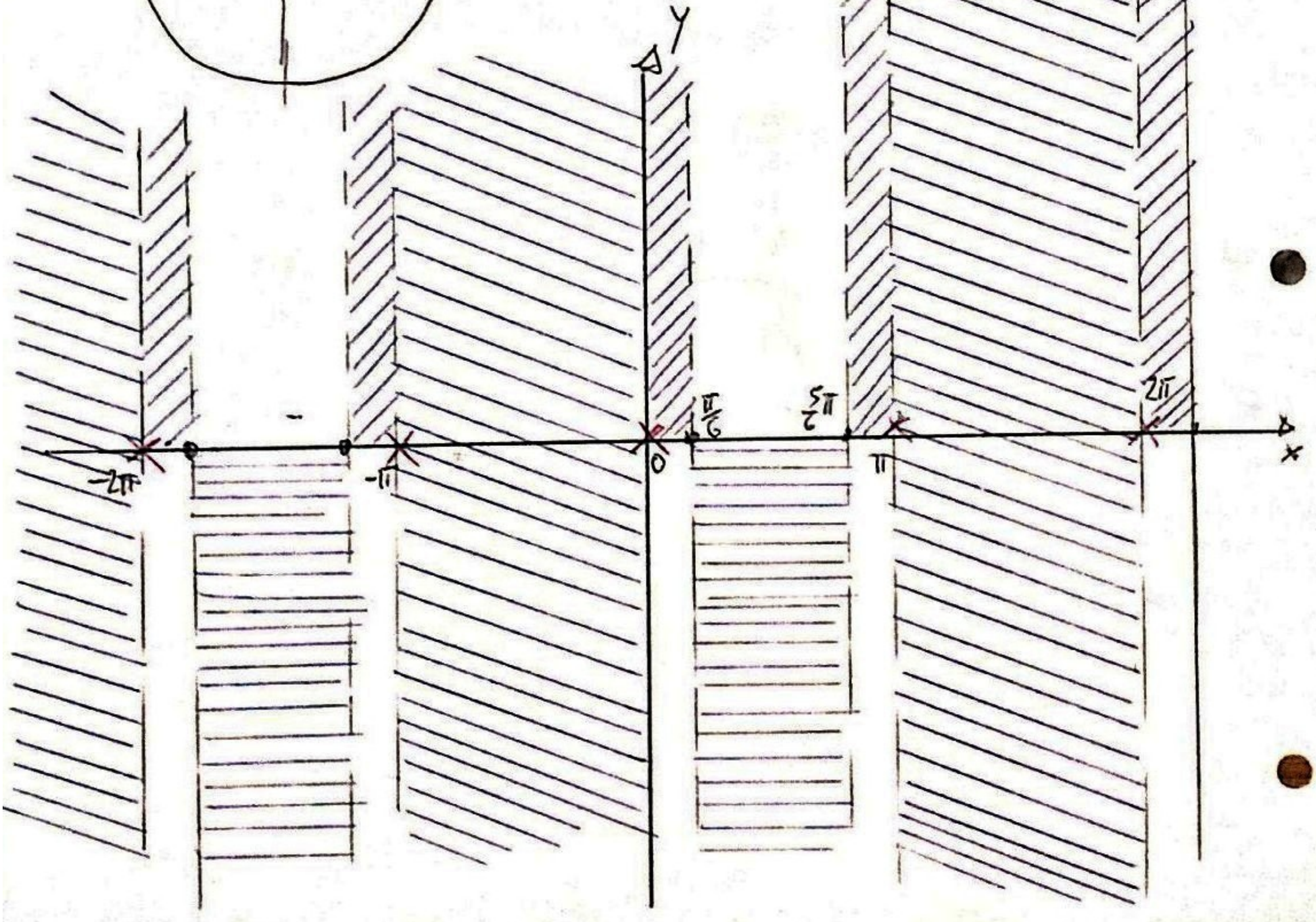
il sen x è $\geq \frac{1}{2}$ quando l'angolo è compreso tra 30° e 150° ovvero

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

- Analogamente si può vedere PER ESCLUSIONE che $\ln(\text{sen}\,2x) < 0$ per angoli da 0° a 30° e da 150° a 180°



$y = \ln(2\,\text{sen}\,x)$ 194



196 $\boxed{y = \ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right)}$ FUNZIONE TRASCENDENTE

DOMINIO

L'argomento del logaritmo deve essere positivo, il denom. non deve $= 0$

$$\frac{x-1}{x-4} > 0$$ DISEQUAZIONE RAZIONALE FRATTA

SS $x-1$	SS $x-4$
$x-1=0$	$x-4=0$
$x=1$	$x=4$
$-\ 0\ +$	$-\ \cancel{0}\ +$

	1		4	
$x-1$	$- - - 0 +$	$+ + +$		$+ + +$
$x-4$	$- - -$	$- - -$	$\cancel{0}$	$+ + +$
$\frac{x-1}{x-4}$	$+$	$0\ -$	$\cancel{\exists}$	$+$

Scelgo il segno $+$

DOMINIO $x < 1 \cup x > 4$

oppure $]-\infty; 1[\ \cup\ ]4; +\infty[$

STUDIO DEL SEGNO

Vediamo dove $\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right)$ è positivo.

$\boxed{\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right) \geq 0}$ DISEQUAZIONE LOGARITMICA

Essendo il logaritmo naturale, passo a base "e".

$e^{\ln\frac{x-1}{x-4}} \geq e^0$; $\boxed{\frac{x-1}{x-4} \geq 1}$ DISEQUAZIONE FRAZIONARIA IN FORMA NON NORMALE

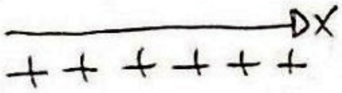
$$\frac{x-1}{x-4} \geq 1 \; ; \quad \frac{x-1}{x-4} - 1 \geq 0 \qquad \text{mcm } \; x-4$$

$$\frac{x-1-1(x-4)}{x-4} \geq 0 \qquad \frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}+4}{x-4} \geq 0$$

$$\boxed{\frac{3}{x-4} \geq 0}$$

DISEQUAZIONE FRAZIONARIA IN FORMA NORMALE

SS. 3 sempre positivo



SS $x-4$

$x-4=0$

$x=4$

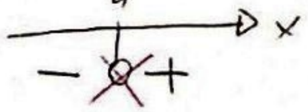
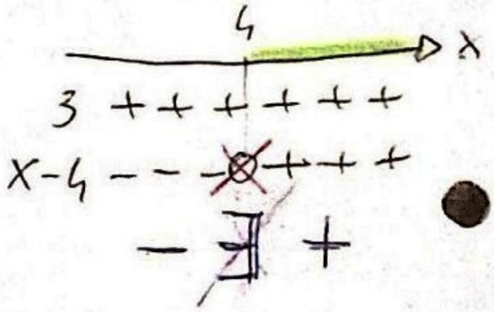
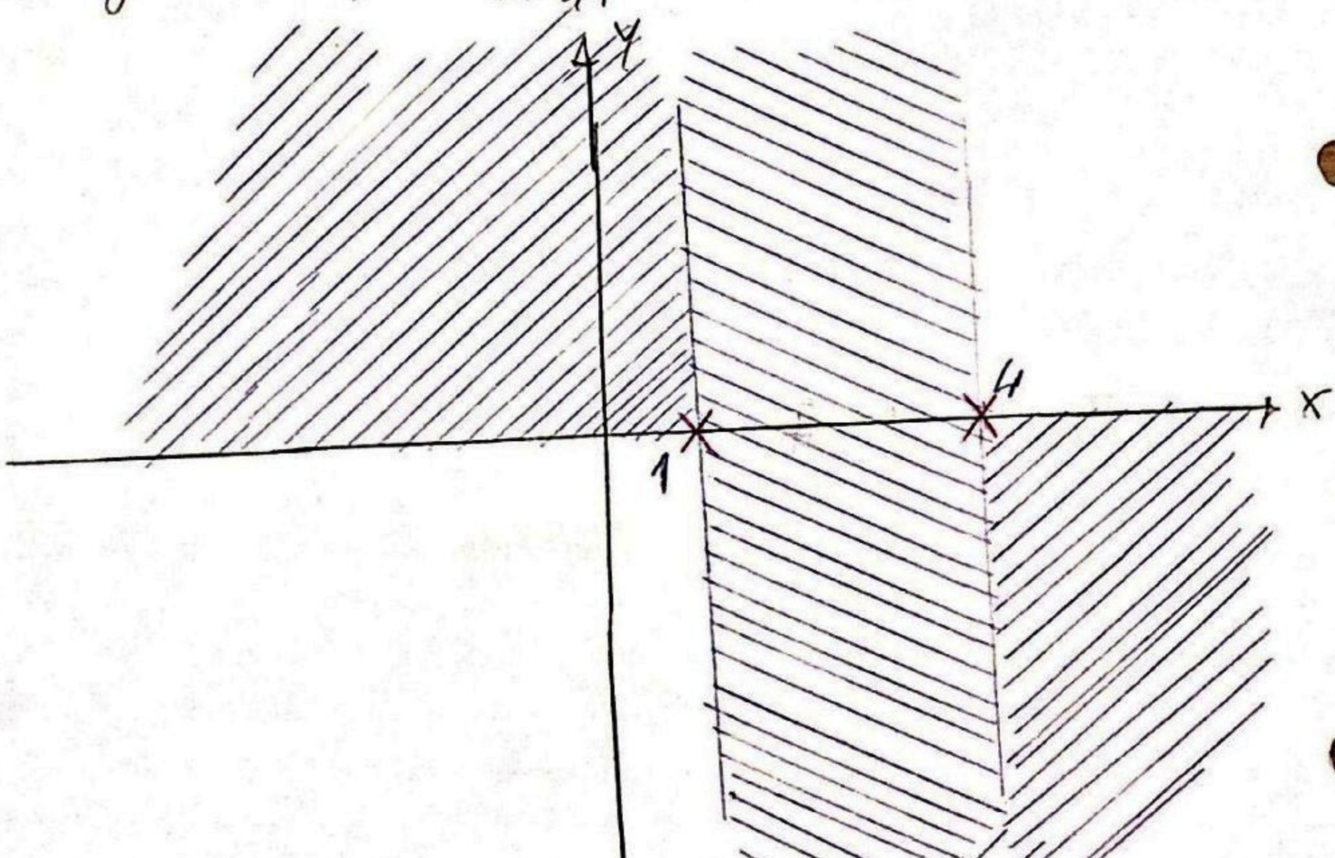


GRAFICO PRODOTTO



SOLUZIONE $x \geq 4$

Abbiamo visto che $\ln \frac{x-1}{x-4}$ è positivo per $x \geq 4$ analogamente, $\ln\left(\frac{x-1}{x-4}\right)$ sarà negativo per $x<4$



1151_2 $\boxed{y = \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}}$ funzione razionale

DOMINIO Imponiamo che il denominatore non si annulli.

$x^2-5x+6=0$ $\quad a=1,\ b=-5,\ c=6$

$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4(1)(6)$
$= 25-24 = 1$

$x_{1;2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-5)\pm\sqrt{1}}{2(1)} =$

$= \dfrac{5\pm1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$ $\quad x\neq 2$, $x \neq 3$

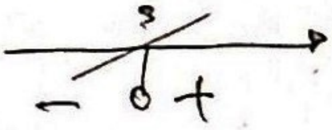
DOMINIO $= \mathbb{R} - \{2;3\}$

STUDIO DEL SEGNO

STUDIO DEL SEGNO DI $x-3$:

$x-3 \geq 0$

$x=3$



STUDIO DEL SEGNO DI x^2-5x+6:

parabola ascendente

intersezioni con l'asse x: 2, 3

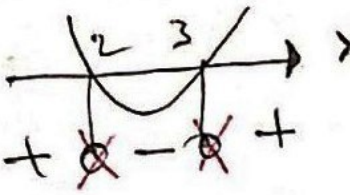
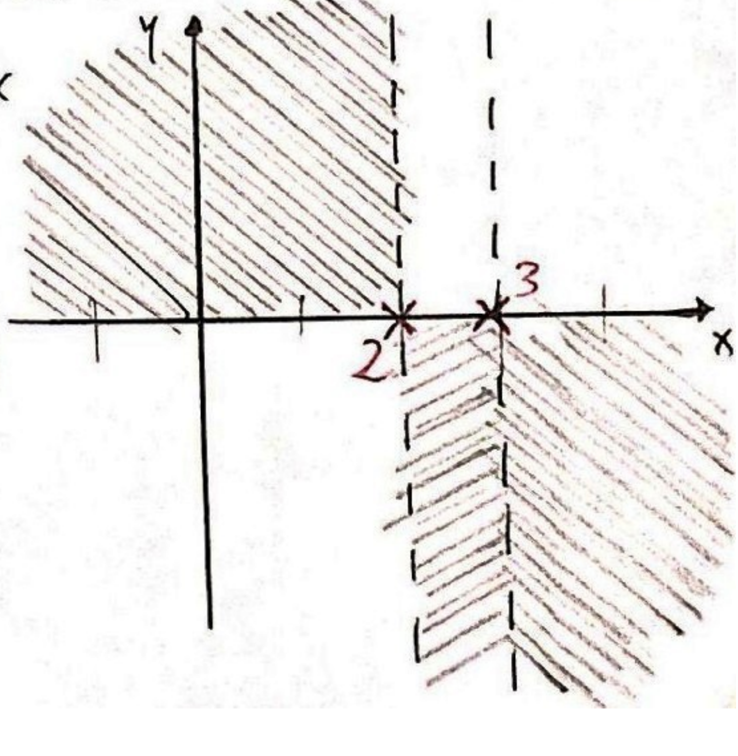


GRAFICO PRODOTTO

	2		3	
$x-3$	− − −	− − −	0	+ + +
x^2-5x+6	+ + +	✗ − − −	✗	+ + +
y	−	∄ +	∄	+



1151_3 $\boxed{y=\frac{x+1}{7x}}$ funzione razionale

- DOMINIO: Il denominatore non deve annullarsi.

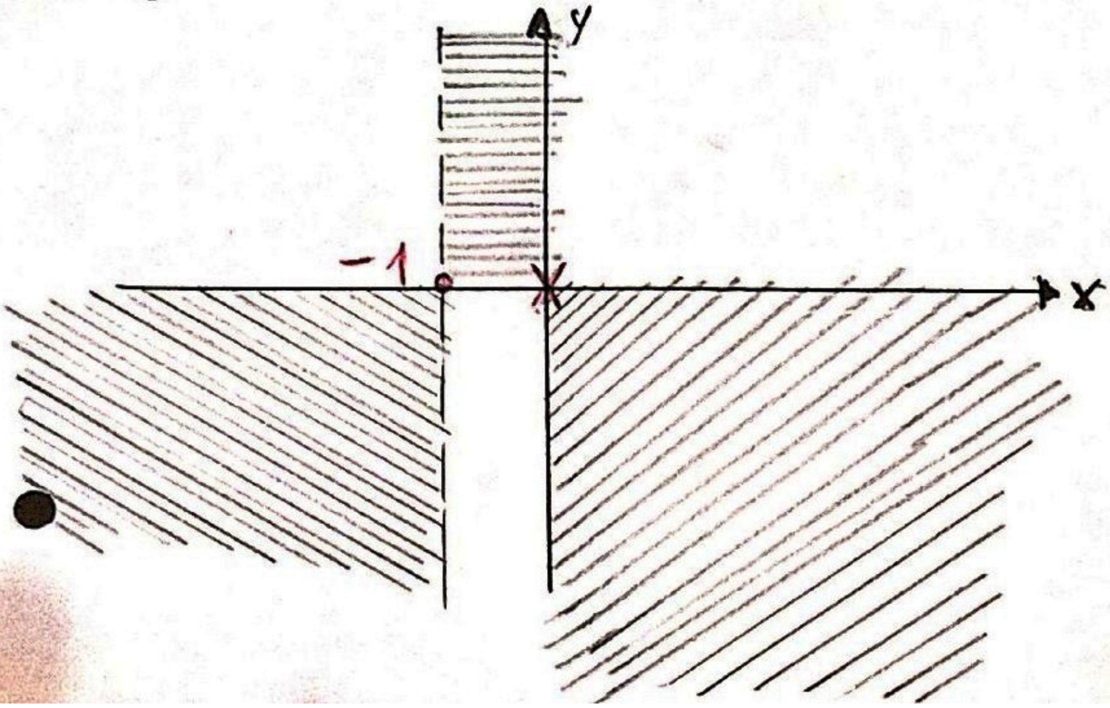
$7x\neq 0$ $\qquad \frac{7x}{7}\neq\frac{0}{7}$ $\qquad x\neq 0$

DOMINIO: $x\neq 0$ oppure $\mathbb{R}-\{0\}$

- STUDIO DEL SEGNO

  - studio del segno di $x+1$: $x+1=0$; $x=-1$;
  - studio del segno di $7x$: $7x=0$; $\frac{7x}{7}=\frac{0}{7}$; $x=0$;
  - GRAFICO PRODOTTO

		-1		0	
$x+1$	$- - -$	0	$+$	$+$	$+ + +$
$7x$	$- - -$	$-$	$-$	$\cancel{0}$	$+ + +$
y	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$



INTERSEZIONE CON L'ASSE X:

$A(-1;0)$

1151_4 $\boxed{y = \dfrac{x}{x^2+16}}$ funzione razionale

DOMINIO: Imponiamo che il denominatore non si annulli.
Vediamo che il denominatore è la somma di x^2, non negativo perché quadrato, e di 16, numero positivo. Pertanto il denominatore è sempre positivo e quindi mai nullo.

DOMINIO: $\mathbb{R}$ oppure qualunque x

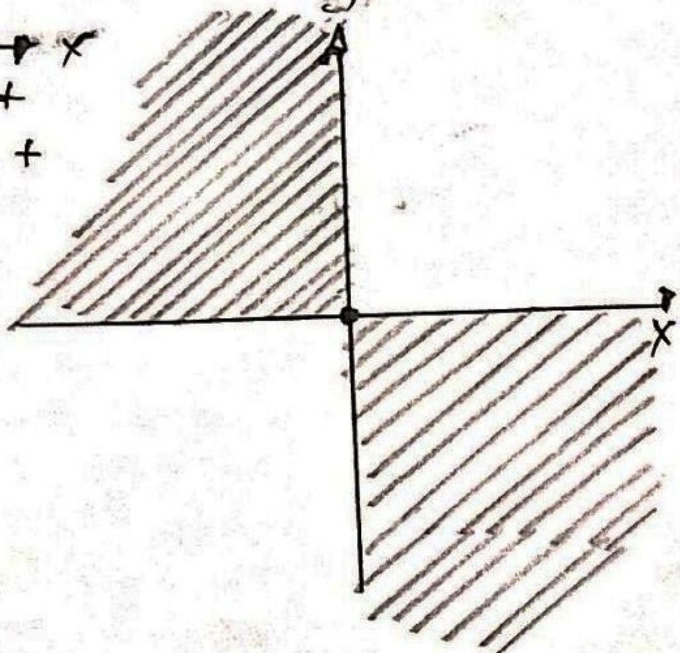
STUDIO DEL SEGNO:

- Studio del segno di x: $x = 0$ — 0 + → x
- Studio del segno di x^2+16: sempre positivo, per quanto detto sopra
- grafico prodotto

x: − − − − 0 + + + + + + +

x^2+16: + + + + + + + + + + + +

− 0 +



INTERSEZIONE CON L'ASSE X:

$O(0;0)$