SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

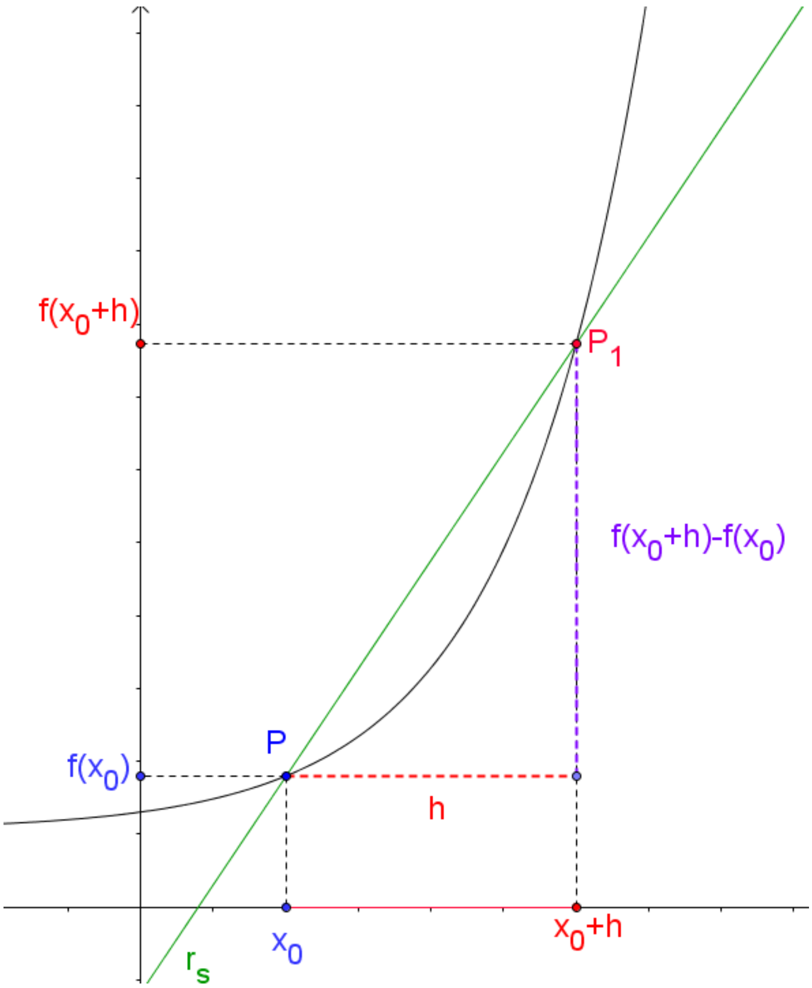
Rapporto incrementale di una funzione

Consideriamo una funzione $y = f(x)$

Consideriamo un punto x_0 sull'asse x e il valore della funzione per $x = x_0$, sia $f(x_0)$. Avremo così il punto P sul grafico di coordinate: P = $[x_0;\ f(x_0)\ ]$

Prendiamo poi sull'asse x, a distanza h dal punto precedente, in $x_0 + h$ e valutiamo il valore della funzione per $x = x_0 + h$ sia $f(x_0 + h)$.

Avremo ancora il punto P_1 sul grafico di coordinate: $P_1 = [x_0 + h\ ;\ f(x_0 + h)\ ]$



Con il termine "<u>incremento della variabile indipendente x</u>", rappresentato dal simbolo Δx, si indica di quanto è variata la x nel passaggio dal punto P al punto P1: in questo caso è semplicemente $\Delta x = h$

Analogamente, con il termine "<u>incremento della variabile dipendente y</u>", rappresentato dal simbolo Δy oppure Δf, si indica di quanto è variata la y nel passaggio dal punto P al punto P1: in questo caso è $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$

A questo punto definiamo il rapporto incrementale della funzione in x_0 come rapporto tra l'incremento Δy e l'incremento Δx:

rapporto incrementale = $r.i. = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Ricordando la geometria analitica, si vede facilmente che il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta r_s, secante la funzione nei due punti *P* e P_1.

Derivata di una funzione

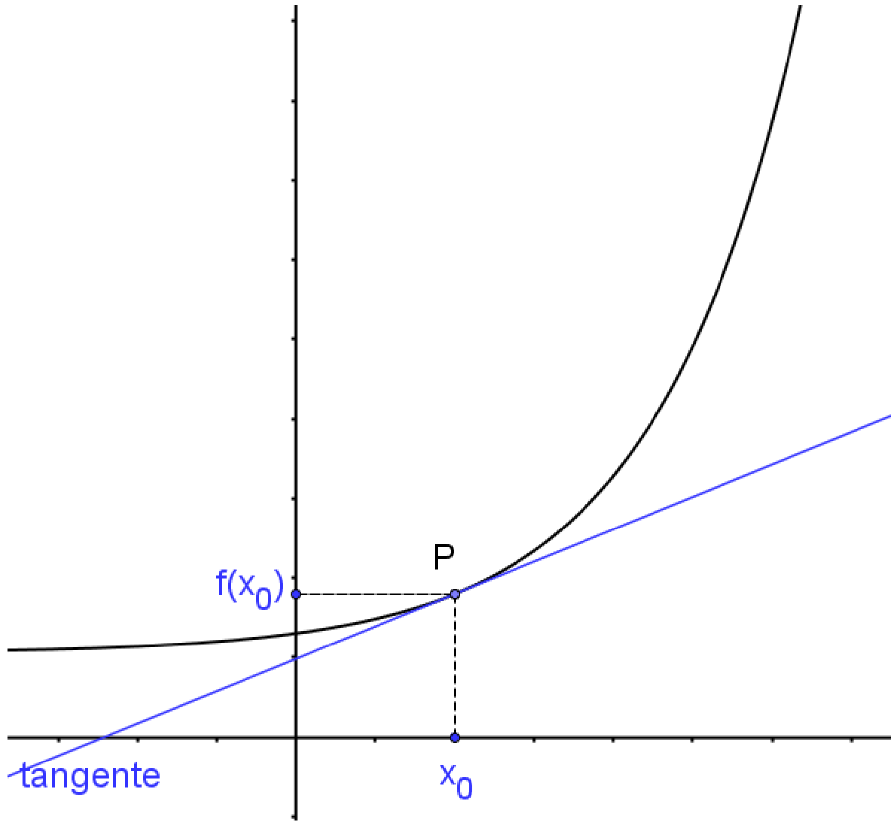
La derivata della funzione è uguale al rapporto incrementale quando viene fatto tendere a zero il valore dell'incremento *h*. La derivata della funzione viene indicata con $f'(x_0)$

derivata = $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Cosa accade dal punto di vista geometrico?

Quando il valore dell'incremento h tende a 0, il punto P1 si avvicina sempre più al punto P e la retta secante tende alla retta tangente.

Allora si può dire che il valore della derivata di una funzione rappresenta il coefficiente angolare della retta r_s, tangente la funzione nel punto *P*.



Esempio. Calcolare la derivata della funzione $y = x^2 + 2x + 1$ nel punto x = 1.

Risulta:

$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$ e

$f(1+h) = (1+h)^2 + 2 \cdot (1+h) + 1 = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h + 1 = h^2 + 4h + 4$

E quindi:

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = h^2 + 4h + 4 - 4 = h^2 + 4h$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (h+4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h+4}{1} = 4$$

Il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto x=1 è 4.