Parliamo di

LIMITI ALL'INFINITO DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

In generale una funzione razionale si può esprimere nella forma del rapporto di due polinomi:

$$y = \frac{N(x)}{P(x)}$$

Il comportamento all'infinito di questo tipo di funzioni può essere semplificato confrontando i gradi di numeratore e denominatore. Vediamo come:

grado (N) > grado (D)	Se il numeratore ha grado maggiore del denominatore, allora si ha: $$\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{P(x)} = \infty$$ In questo caso **non c'è asintoto orizzontale**
grado (N) = grado (D)	Se il numeratore e il denominatore hanno lo stesso grado, allora si ha: $$\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{P(x)} = \frac{c_N}{c_D}$$ dove c_N e c_D sono rispettivamente i coefficienti di grado massimo di numeratore e denominatore. In questo caso c'è **asintoto orizzontale** di equazione $y = \frac{c_N}{c_D}$
grado (N) < grado (D)	Se il numeratore ha grado minore del denominatore, allora si ha: $$\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{P(x)} = 0$$ In questo caso c'è **asintoto orizzontale** di equazione $y = 0$

Esempio 1. Calcoliamo il limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$.

Osservando che il grado del numeratore è 2 ed il grado del denominatore è 1, tale limite è sicuramente infinito.

Lo possiamo verificare calcolando il limite con il raccoglimento forzato.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 + \overbrace{\frac{2}{x}}^{0} - \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{0}\right)}{x \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot (1)}{x \cdot (1)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Esempio 2. Calcoliamo il limite $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$.

Osservando che i gradi di numeratore e denominatore sono entrambi uguali a 2, pertanto il limite è uguale al rapporto dei coefficienti di secondo grado di numeratore e denominatore, cioè 1/1 = 1.

Lo possiamo verificare calcolando il limite con il raccoglimento forzato.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot \left(1 - \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{0}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot (1)}{x^2 \cdot (1)} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

Esempio 3. Calcoliamo il limite $\lim_{x \to \infty} \frac{x+4}{x^2-x+1}$.

Osservando che il grado del numeratore è 1 e quello del denominatore è 2, il limite è sicuramente pari a 0.

Lo possiamo verificare calcolando il limite con il raccoglimento forzato.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+4}{x^2-x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot \left(1+\underbrace{\frac{4}{x}}_{0}\right)}{x^2 \cdot \left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot (1)}{x^2 \cdot (1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$