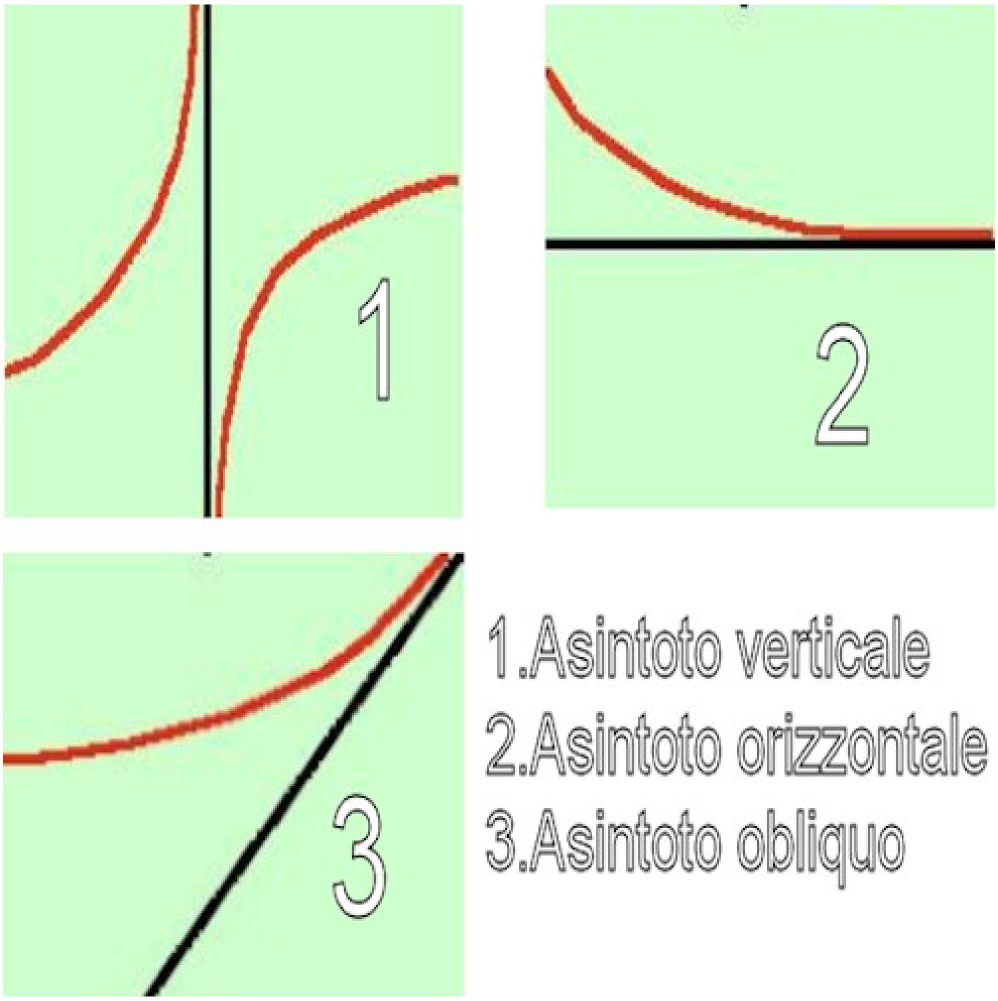
Parliamo di ASINTOTI

In geometria un asintoto è una retta alla quale una curva risulta *tangente all'infinito*; si tratta cioè di una retta tale che la distanza di questa dalla curva si riduce sempre più senza mai annullarsi; in parole semplici, la retta asintoto e la curva della funzione si avvicinano sempre di più senza mai toccarsi.

Gli asintoti di una funzione possono essere verticali, orizzontali e anche obliqui.



1. Asintoti verticali Gli asintoti verticali si trovano andando a studiare il comportamento della funzione intorno ai punti in cui essa non è definita. Per questo utilizziamo lo strumento del limite al finito.

Se succede che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

allora la f(x) ha un asintoto verticale in x_0 di equazione $x = x_0$.

Esempio 1. La funzione $\boxed{y = \frac{1}{x-2}}$ è definita per $x \neq 2$.

Andando a studiare il limite per x→2 si ottiene:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^+ - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

La funzione pertanto ha un asintoto verticale di equazione *x = 2*.

Esempio 2. La funzione $\boxed{y = \frac{1}{x^2+1}}$ ha un denominatore che non si annulla mai, poiché risulta:

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-1} \ \text{ impossibile}$$

e di conseguenza è definita in **R**.

Poiché essa è sempre definita, non ci saranno asintoti verticali per la funzione.

2. Asintoti orizzontali Gli asintoti orizzontali si trovano andando a studiare il comportamento della funzione all'infinito.

Se succede che

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

Allora la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione y = l.

Esempio 3. La funzione $\boxed{y = \dfrac{x+2}{x-2}}$ è definita per x ≠ 2.

Andando a studiare il limite per x→∞ si ottiene:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-2} = 1.$$

La funzione pertanto ha un <u>asintoto orizzontale di equazione *y = 1*</u>.

Come si è trovato il risultato dei limiti? Con il raccoglimento forzato si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \overset{\nearrow 0}{\frac{2}{x}}\right)}{x \cdot \left(1 - \underset{\swarrow 0}{\frac{2}{x}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

ma si poteva avere il risultato direttamente ricordando che quando si fa il limite all'infinito di una funzione razionale fratta, se i gradi di numeratore e denominatore sono uguali, il risultato è uguale al rapporto dei coefficienti di grado massimo: in questo caso: l = 1/1 = 1.

Nota. Si osservi che la funzione dell'esempio 4 ha anche un asintoto verticale di equazione *x =2*.

Esempio 4. La funzione $\boxed{y=\frac{3}{x+1}}$ è definita per x ≠ -1.

Andando a studiare il limite per x→∞ si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{-\infty+1}=\frac{3}{-\infty}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{+\infty+1}=\frac{3}{+\infty}=0$$

La funzione pertanto ha un <u>asintoto orizzontale di equazione *y = 0*</u>.

Il risultato del limite si poteva trovare direttamente ricordando che quando si fa il limite all'infinito di una funzione razionale fratta, se il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, il risultato è 0.

Nota. Si osservi che la funzione dell'esempio 4 ha anche un asintoto verticale di equazione x = -1.

Esempio 5. La funzione $\boxed{y=\frac{x^2+1}{x}}$ è definita per x ≠ 0.

Andando a studiare il limite per x→∞ si ottiene:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$$

Poiché il limite ha per risultato ∞, la funzione non ha <u>asintoto orizzontale.</u>

Come si è trovato il risultato dei limiti? Con il raccoglimento forzato si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(1+\overset{0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

ma si poteva avere il risultato direttamente ricordando che quando si fa il limite all'∞ di una funzione razionale fratta, se il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, il risultato è ∞.

Nota. Si osservi che la funzione dell'esempio 5 ha anche un asintoto verticale di equazione $x = 0$.

3. Asintoti obliqui Non li abbiamo studiati, li faremo al sesto anno.