FUNZIONI NUMERICHE

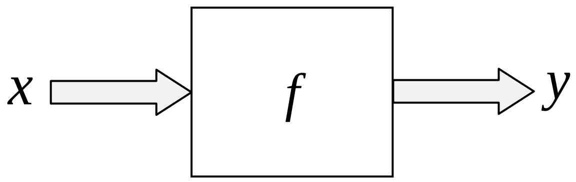
Funzione numerica

Una funzione si dice numerica se gli insiemi A e B sono insiemi numerici, cioè **N** (insieme dei numeri naturali), **Z** (insieme dei numeri relativi), **Q** (insieme dei numeri razionali, **R** (insieme dei numeri reali), **C** (insieme dei numeri complessi).

Funzione reale di variabile reale

Una funzione reale di variabile reale è una relazione che associa a ciascun valore della variabile reale x un unico valore della variabile reale y.
La variabile x è detta ***indipendente*** nel senso che i suoi valori vengono attribuiti a piacere, mentre la variabile y è detta ***dipendente*** poiché i suoi valori dipendono da quelli della y.

Da un punto di vista pratico, si può considerare la funzione come una "scatola" che trasforma numeri in ingresso (*INPUT*) in altri numeri uscita (*OUTPUT*) secondo un criterio matematico prefissato.



La funzione si indica con la notazione $y = f(x)$, che va letta: «*y uguale a effe di x*».

Un altro modo di indicare la funzione è il seguente:

$$f: x \rightarrow y$$

oppure

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

se vuole indicare che la funzione trasforma numeri reali in numeri reali.

Grafico di una funzione

Il grafico di una funzione è la rappresentazione su diagramma cartesiano della funzione: ogni coppia [x ; $y = f(x)$] individua un punto sul piano cartesiano; l'insieme di tutti i possibili punti costituisce il grafico o diagramma della funzione.

Ad esempio, alla funzione $y = 3x + 5$ corrisponde una retta; alla funzione $y = x^2$ corrisponde una parabola.
Non tutti i grafici su diagramma cartesiano sono grafici di funzione. Per capire se un grafico su diagramma cartesiano è grafico di una funzione, c'è il ***test della retta verticale***: se una qualunque retta verticale incontra il grafico sempre in un solo punto, allora si tratta di una funzione; in caso contrario, avremo un grafico di altra natura.

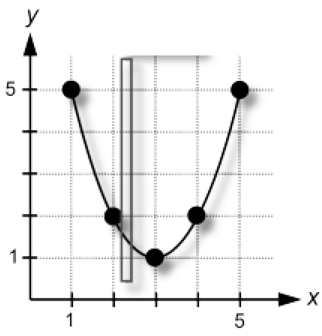


grafico di funzione

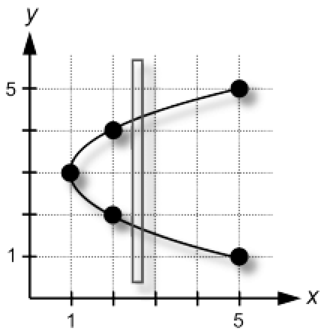


grafico di altra natura

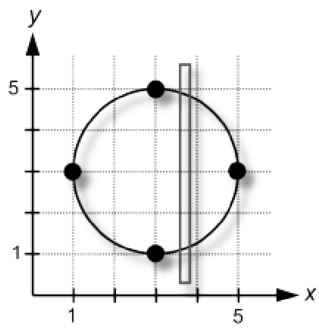


grafico di altra natura

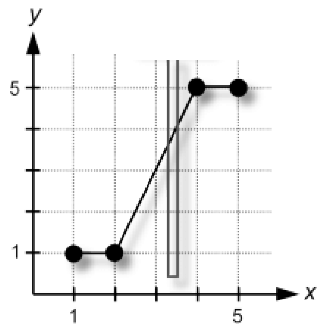


grafico di funzione

Campo di esistenza o dominio naturale di una funzione

La funzione è una relazione che fa calcolare i valori della variabile *y* quando sono assegnati valori a piacere alla variabile *x*.
Però non è sempre possibile attribuire qualsiasi valore reale alla variabile *x*. Per questo motivo si dovranno individuare ed eliminare gli eventuali valori della *x* in corrispondenza dei quali non si possono calcolare i valori della variabile dipendente *y*.

Diremo quindi ***campo di esistenza*** o ***insieme di definizione*** o ***dominio naturale*** *di una funzione l'insieme dei valori che può assumere la variabile indipendente x affinché risultino calcolabili (reali e finiti) i corrispondenti valori della variabile dipendente y.*

Codominio di una funzione reale di variabile reale

Il codominio di una funzione numerica è l'insieme di tutti i valori assunti dalla variabile dipendente *y*.

Classificazione delle funzioni reali di variabile reale

Secondo la loro natura, divideremo le funzioni in due categorie: funzioni ***algebriche*** e funzioni ***trascendenti***.
Una funzione si dice algebrica quando in essa compaiono soltanto operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza e radice di monomi e polinomi della x).
Le funzioni algebriche possono essere:

a) *razionali intere* se, poste sotto forma esplicita, esse si presentano come polinomio nella variabile indipendente x.
   Esempio. $y = 3x^3 + 2x - 1$

b) *razionali fratte* se esse si presentano come rapporto di due polinomi nella variabile indipendente x.
   Esempio. $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$

c) *irrazionali intere* se la variabile indipendente x si trova anche sotto il segno di radice.
   Esempio. $y = \sqrt{x+5}$

d) *irrazionali fratte* se la variabile indipendente è presente a denominatore e da qualche parte sotto radice

Esempio. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$

Una funzione si dice trascendente quando essa non è algebrica.
Le funzioni trascendenti possono essere:

a) *logaritmiche*

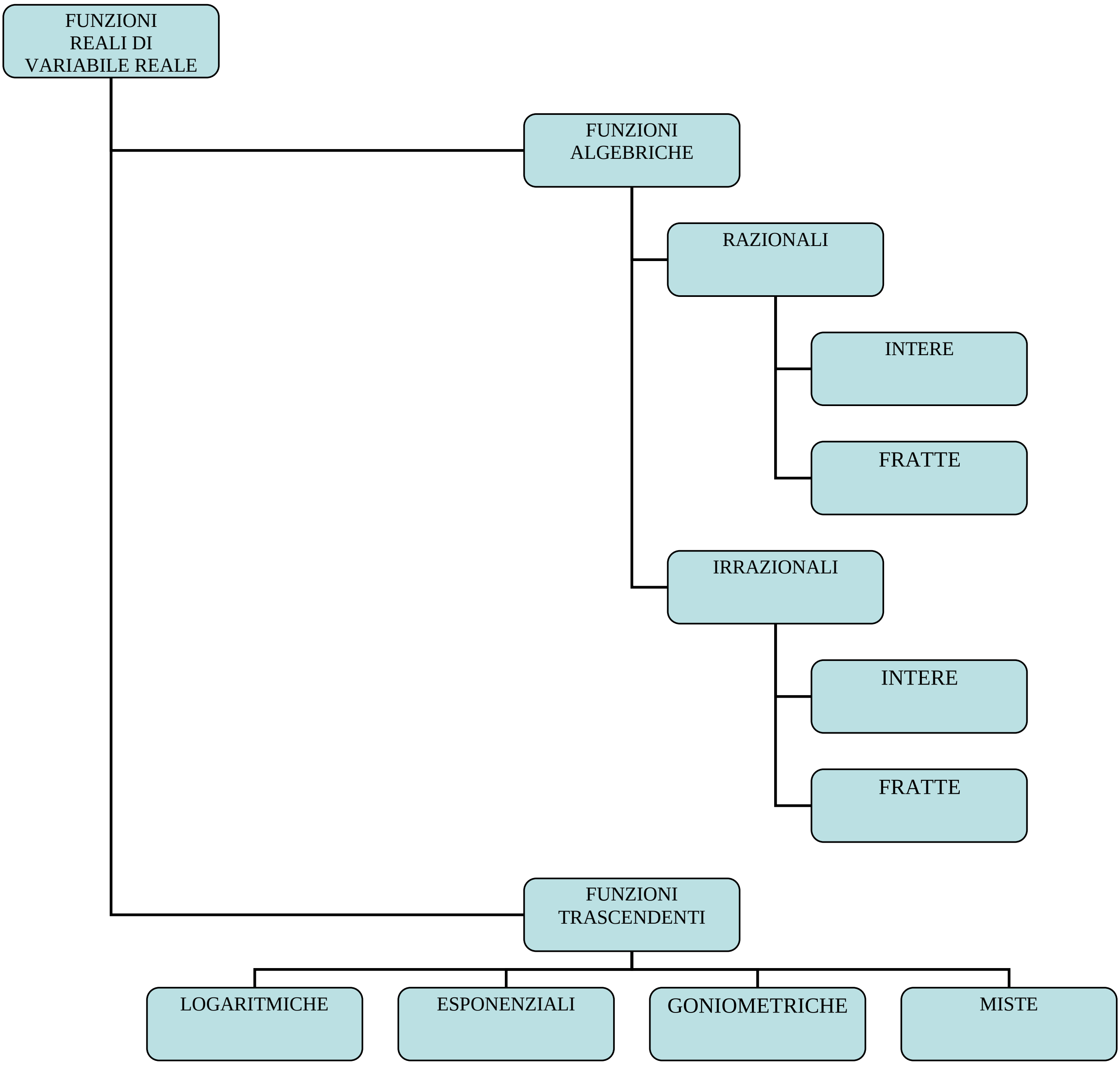
Esempio. $y = \log \dfrac{x+1}{x-1}$

b) *esponenziali*

Esempio. $y = 2^{-x^2+3x-1}$

c) *goniometriche*

Esempio. $y = \cos x \quad y = \sin x \quad y = \operatorname{tg} x$

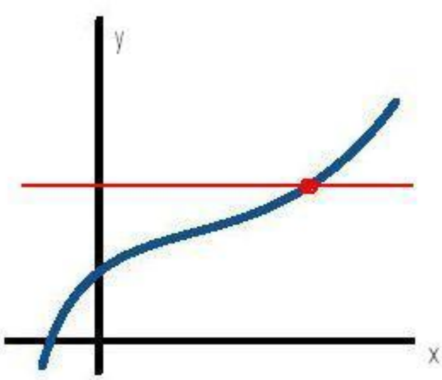


Funzioni iniettive

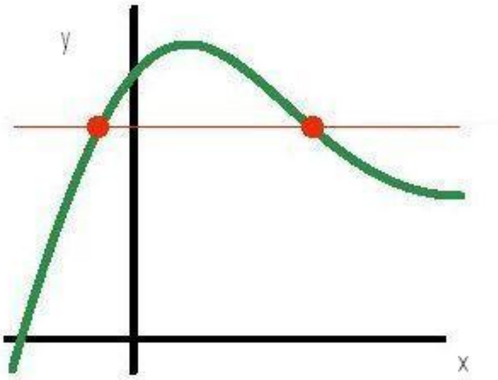
Funzioni iniettive sono quelle per le quali ad *x* differenti corrispondono *y* differenti.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$$

Per capire se una funzione è iniettiva dal suo grafico cartesiano, c'è il ***test della retta orizzontale***: se una qualunque retta orizzontale incontra il grafico sempre in un solo punto, allora si tratta di una funzione iniettiva; in caso contrario, siamo di fronte ad una funzione non iniettiva.



funzione iniettiva



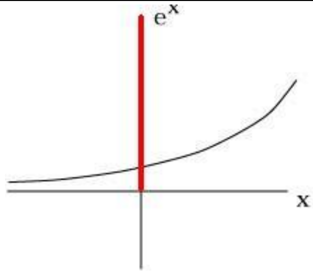
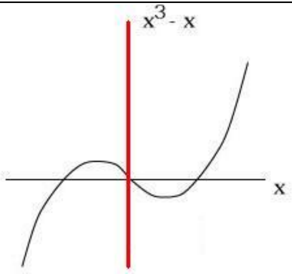
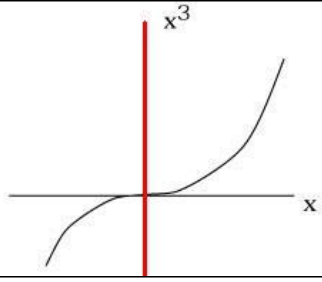
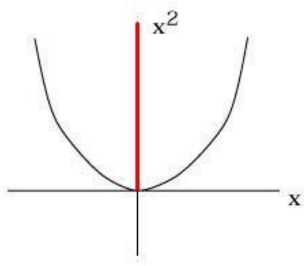
funzione non iniettiva

Funzioni suriettive

Consideriamo una funzione *f*:

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

Diciamo che la *f* è suriettiva quando la *y* assume tutti i valori in **R**.
Per capire se una funzione è suriettiva dal suo grafico cartesiano, basta proiettare il grafico della funzione sull'asse delle *y*: se l'"ombra" del grafico copre tutto l'asse *y*, allora la *f* è suriettiva; se la proiezione copre parzialmente l'asse delle *y*, allora la *f* non sarà suriettiva.

			
funzione non suriettiva	*funzione suriettiva*	*funzione suriettiva*	*funzione non suriettiva*

La suriettività non è una proprietà molto stringente, infatti è possibile rendere suriettiva una funzione restringendo l'insieme delle *y*.

Ad esempio, se per la funzione della quarta figura poniamo

$$f\colon \mathbf{R} \to [\ 0, +\infty\ [$$

allora la f sarà suriettiva poiché la y assumerà tutti i valori tra $[\ 0, +\infty\ [$.

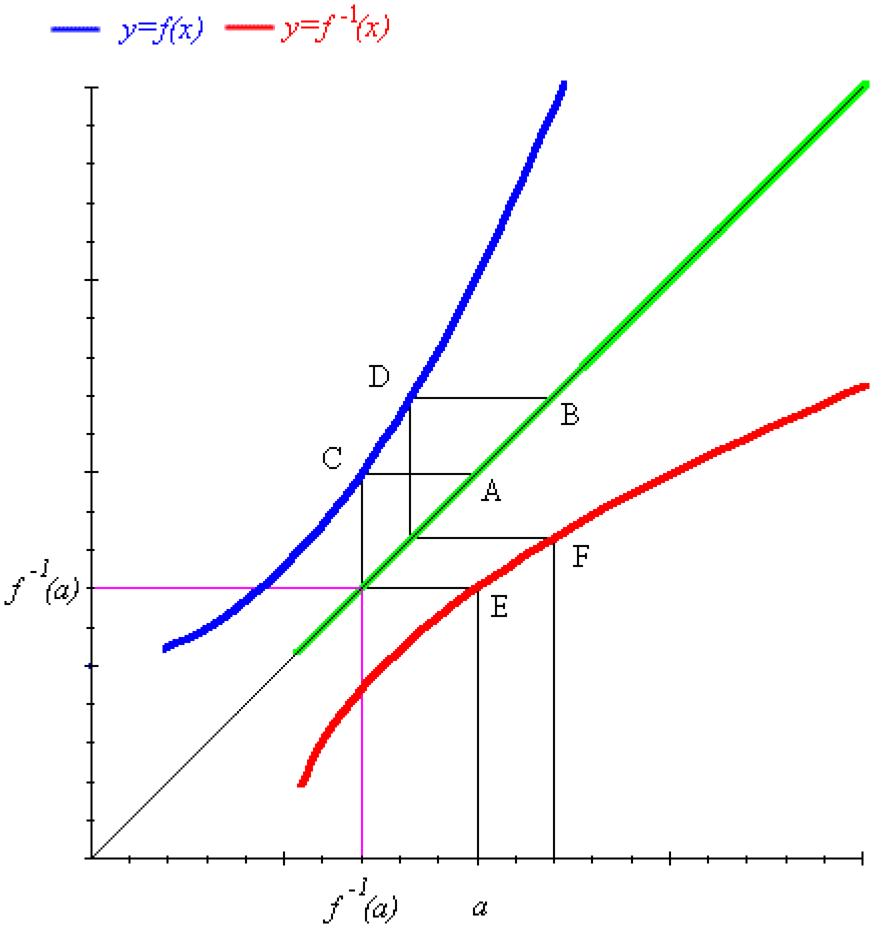
Funzioni biunivoche o biettive

Una funzione biunivoca o biettiva è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.
Come già detto per le funzioni generiche, una funzione biunivoca è invertibile e la sua inversa si indica con l'espressione:

$$x = f^{-1}(y)$$

che si ottiene risolvendo l'espressione $y = f(x)$ considerando la variabile y come incognita.

Il grafico della funzione inversa di una funzione assegnata si ottiene da quello della funzione diretta ribaltandolo a specchio rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.



Funzioni crescenti e decrescenti

Una funzione è ***strettamente crescente*** se, spostandosi nel senso delle *x* crescenti (da sinistra verso destra), i valori della *y* aumentano sempre.

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; y_1 < y_2$$

Una funzione è ***crescente non strettamente*** se la funzione in qualche tratto è anche costante ma comunque non diminuisce mai. Siamo di fronte ad una funzione che sale ma ogni tanto si prende una pausa.

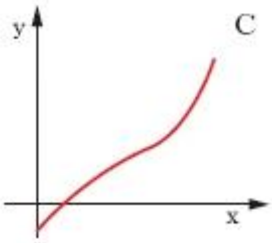
$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; y_1 \leq y_2$$

Una funzione è ***strettamente decrescente*** se, spostandosi nel senso delle *x* crescenti (da sinistra verso destra), i valori della *y* diminuiscono sempre.

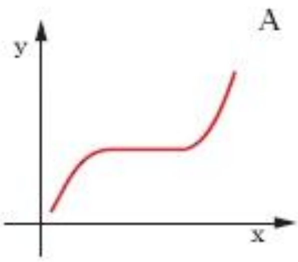
$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; y_1 > y_2$$

Una funzione è ***decrescente non strettamente*** se la funzione in qualche tratto è anche costante ma non aumenta mai. Anche qui, abbiamo a che fare con una funzione che scende, ma con calma, che ogni tanto si ferma.

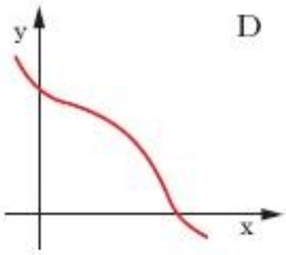
$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; y_1 \geq y_2$$



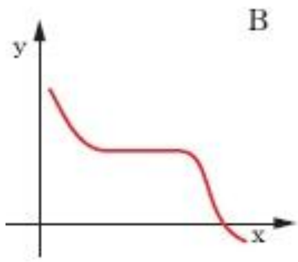
f. strettamente crescente



f. crescente non strettamente



f. strettamente decrescente



f. decrescente non strettamente