

La Retta

1. Qual è l'equazione della retta in forma nel piano cartesiano?

L'equazione della generica retta nel piano cartesiano in forma esplicita è

$$y = mx + q,$$

mentre quella in forma implicita è

$$ax + bx + c = 0.$$

2. Che differenza c'è tra la forma esplicita e quella implicita?

Con la rappresentazione in forma implicita si possono rappresentare tutte le possibili rette del piano mentre con la rappresentazione in forma esplicita si possono rappresentare tutte le rette escluse quelle verticali.

3. Qual è il significato dei coefficienti m e q della rappresentazione in forma esplicita?

m è detto *coefficiente angolare* mentre q è detto *intercetta o termine noto*

m rappresenta l'inclinazione o pendenza della retta rispetto all'asse x . In base al segno (positivo, negativo o nullo) di m possiamo capire se la retta sale, scende o è orizzontale, mentre in base al valore assoluto di m , possiamo capire di quanto sale o scende.

$$\text{segno di } m: \begin{cases} m > 0 \Leftrightarrow \text{retta ascendente} \\ m = 0 \Leftrightarrow \text{retta orizzontale} \\ m < 0 \Leftrightarrow \text{retta discendente} \end{cases} \quad \text{valore } |m|: \begin{cases} |m| > 1 \Leftrightarrow \text{angolo retta - asse } x > 45^\circ \\ |m| = 1 \Leftrightarrow \text{angolo retta - asse } x = 45^\circ \\ |m| < 1 \Leftrightarrow \text{angolo retta - asse } x < 45^\circ \end{cases}$$

q rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y delle ordinate.

4. Qual è l'equazione della generica retta verticale?

L'equazione della generica retta verticale non può essere data in forma esplicita poiché la forma esplicita non permette di rappresentare le rette verticali. Tale equazione è:

$$x = h$$

dove h è il punto in cui la retta interseca l'asse x .

5. Qual è l'equazione dell'asse delle ordinate y ?

L'asse delle ordinate o asse y è una retta verticale e la sua equazione è:

$$x = 0$$

6. Qual è l'equazione della generica retta orizzontale?

L'equazione della generica retta orizzontale si può ricavare dall'equazione della retta in forma esplicita ponendo a zero il coefficiente angolare. Tale equazione è:

$$y = q$$

dove q è il punto in cui la retta interseca l'asse y .

7. Qual è l'equazione dell'asse delle ascisse x ?

L'asse delle ascisse o asse x è una retta orizzontale e la sua equazione è:

$$y = 0$$

8. Qual è l'equazione della generica retta passante per l'origine?

L'equazione della generica retta passante per l'origine si può ricavare dall'equazione generale ponendo $q = 0$. Tale equazione è:

$$y = mx$$

9. Qual è l'equazione della retta bisettrice del I-III quadrante?

La retta bisettrice del I-III quadrante è una retta ascendente, passante per l'origine e, avendo un angolo di 45° rispetto all'asse x , il suo coefficiente angolare è pari a $+1$. Pertanto la sua equazione in forma esplicita risulta:

$$y = x$$

mentre in forma implicita è:

$$x - y = 0$$

10. Qual è l'equazione della retta bisettrice del II-IV quadrante?

La retta bisettrice del II-IV quadrante è una retta discendente, passante per l'origine e, avendo un angolo di 45° rispetto all'asse x , il suo coefficiente angolare è pari a -1 . Pertanto la sua equazione in forma esplicita risulta:

$$y = -x$$

mentre in forma implicita è:

$$x + y = 0$$

11. Come si fa a verificare se un punto appartiene ad una retta?

Per verificare se un punto appartiene ad una retta, si sostituiscono le sue coordinate x e y nell'equazione della retta; se si ottiene un'uguaglianza, allora il punto appartiene alla retta; se si ottiene una disuguaglianza, il punto non appartiene alla retta.

12. Come si effettua l'intersezione tra due rette?

Per effettuare l'intersezione tra due rette si procede in due modi, quello algebrico e quello grafico:

a) **in modo algebrico** si mettono le equazioni delle due rette a sistema e con uno dei metodi studiati al terzo anno (sostituzione, confronto, Cramer, ecc.) si risolve il sistema. I valori della x e della y daranno le coordinate dell'eventuale punto di intersezione.

b) **in modo grafico** si tracciano i grafici delle due rette sullo stesso diagramma, delineando il punto di intersezione; le coordinate di tale punto potranno essere dedotte graficamente.

Ovviamente i risultati ottenuti con i due metodi dovranno essere coincidenti.

Se il sistema algebrico è impossibile vuol dire che non esistono intersezioni, quindi le due rette sono geometricamente parallele; se il sistema algebrico è indeterminato vuol dire che esistono infinite soluzioni, quindi le due rette sono geometricamente coincidenti; infine se il sistema algebrico è determinato, esiste una sola soluzione e le due rette sono incidenti.

13. Quando due rette sono parallele?

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono parallele se hanno gli stessi coefficienti angolari; in altre parole dev'essere:

$$m = m'$$

Se le due rette sono date in forma implicita $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ esse sono parallele se risulta:

$$a : b = a' : b'$$

14. Quando due rette sono perpendicolari?

Due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$ sono perpendicolari se risulta:

$$m = -\frac{1}{m'}$$

Se le due rette sono date in forma implicita $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, esse sono perpendicolari se risulta:

$$a \cdot a' + b \cdot b' = 0$$

15. Cosa si intende per fascio proprio di rette?

Un fascio proprio di rette è l'insieme di tutte le rette del piano passanti per un punto proprio $P_0(x_0; y_0)$. L'equazione del fascio proprio di rette passanti per P_0 è :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

16. Cosa si intende per fascio improprio di rette?

Un fascio improprio di rette è l'insieme di tutte le rette del piano parallele ad una retta data.

Ad esempio, l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta $y = -3x + 5$ è :

$$y = -3x + q$$

dove q è il parametro al cui variare vengono descritte tutte le rette del fascio.

17. Come si trova l'equazione della retta passante per un punto P_0 e parallela ad una retta data r ?

In primo luogo si trova il fascio proprio di rette passanti per P_0 . Successivamente al coefficiente angolare del fascio si sostituisce il valore del coefficiente angolare della retta r assegnata.

Esempio numerico. Si vuole l'equazione della retta passante per $P_0(-2;+3)$ e parallela alla retta $r: y = -3x + 5$.

Il fascio proprio di rette passanti per P_0 ha equazione:

$$y - 3 = m \cdot (x - (-2))$$

$$y - 3 = m \cdot (x + 2)$$

$$y = mx + 2m + 3$$

La retta $r: y = -3x + 5$ ha per coefficiente angolare $m = -3$. Sostituendo tale valore nell'equazione del fascio si ottiene:

$$y = -3 \cdot x + 2 \cdot (-3) + 3$$

$$y = -3 \cdot x - 6 + 3 \text{ e infine}$$

$$y = -3 \cdot x - 3$$

18. Come si trova l'equazione della retta passante per un punto P_0 e perpendicolare ad una retta data r ?

In primo luogo si trova il fascio proprio di rette passanti per P_0 . Successivamente al coefficiente angolare del fascio si sostituisce l'opposto del reciproco del valore del coefficiente angolare della retta r assegnata.

Esempio numerico. Si vuole l'equazione della retta passante per $P_0(-2;+3)$ e perpendicolare alla retta $r: y = -3x + 5$.

Il fascio proprio di rette passanti per P_0 ha equazione:

$$y - 3 = m \cdot (x - (-2))$$

$$y - 3 = m \cdot (x + 2)$$

$$y = mx + 2m + 3$$

La retta $r: y = -3x + 5$ ha per coefficiente angolare $m = -3$. Per avere la retta perpendicolare dobbiamo calcolare l'opposto del reciproco di m , dunque:

$$m = -\frac{1}{(-3)} = \frac{1}{3}$$

Sostituendo nell'equazione del fascio si ottiene :

$$y = \frac{1}{3} \cdot x + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 3$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 3 \text{ e infine}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

19. Come si trova l'equazione della retta passante per due punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$?

In primo luogo si trova il fascio proprio di rette passanti per P_1 . Successivamente al coefficiente angolare del fascio si sostituisce il valore di m così ottenuto:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Esempio numerico. Si vuole l'equazione della retta passante per $P_1(2;3)$ e $P_2(-4;0)$.

Il fascio proprio di rette passanti per P_1 ha equazione:

$$y - 3 = m \cdot (x - 2)$$

$$y = mx - 2m + 3$$

Calcoliamo ora m:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 3}{-4 - 2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

Sostituendo nell'equazione del fascio si ottiene :

$$y = \frac{1}{2} \cdot x - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 + 3 \text{ e infine}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

20. Qual è l'espressione della distanza di un punto da una retta?

Se la retta è data in forma esplicita, la distanza d tra il punto $P_0(x_0; y_0)$ e la retta $y = mx + q$ è :

$$d = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

Se invece la retta è data in forma implicita, la distanza d tra il punto $P_0(x_0; y_0)$ e la retta $ax + by + c = 0$ è

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$