Geometria Analitica

Distanza tra due punti nel piano cartesiano

$$\boxed{\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Punto medio di due punti nel piano cartesiano

$$M(x_M\ ; y_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Area di un triangolo nel piano cartesiano a partire dalle coordinate dei suoi punti $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ e $C(x_3 ; y_3)$: $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

Geometria Analitica La retta

Equazione della retta in forma esplicita: $y = mx + q$

Equazione della retta in forma implicita: $ax + bx + c = 0$

Equazione della retta verticale: $x = h$

Equazione della retta orizzontale: $y = q$

Equazione dell'asse delle ordinate (asse y): $x = 0$

Equazione dell'asse delle ascisse (asse x): $y = 0$

Equazione della generica retta passante per l'origine: $y = mx$

Equazione della retta bisettrice del I-III quadrante: $y = x$ oppure $x - y = 0$

Equazione della retta bisettrice del II-IV quadr.: $y = -x$ oppure $x + y = 0$

Rette parallele $y = mx + q$, $y = m'x + q'$: $\boxed{m = m'}$

Rette perpendicolari $y = mx + q$, $y = m'x + q'$: $\boxed{m = -\frac{1}{m'}}$

Equazione del fascio proprio di rette passanti per P_0 è: $y - y_0 = m\cdot(x - x_0)$

Equazione della retta passante per due punti $P_1(x_1 ; y_1)$ e $P_2(x_2 ; y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

distanza di un punto da una retta

$$d = \frac{|y_0 - (mx_0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}} \qquad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Parabola (asse verticale)

Equazione in forma canonica $y = ax^2 + bx + c$

Concavità:
Se a > 0 concavità rivolta verso l'alto $\cup$
Se a < 0 concavità rivolta verso il basso $\cap$ Equazione dell'asse: $x = -\frac{b}{2a}$

Coordinate del vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Coordinate del fuoco: $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{+1-\Delta}{4a}\right)$

Equazione della retta direttrice: $y = \frac{-1-\Delta}{4a}$

Coordinate del punto d'intersezione con l'asse y: $I_y(0; c)$

Coordinate dei punti d'intersezione con l'asse x: $I_{x1}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$ $I_{x2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$

Casi particolari:

b = 0 → $y = ax^2 + c$ → l'asse della parabola coincide con l'asse y

c = 0 → $y = ax^2 + bx$ →parabola passante per l'origine

b = c = 0 → $y = ax^2$ → parabola passante per l'origine e con asse l'asse y

Ellisse

Equazione in forma canonica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Coordinate dei vertici: *A'(-a; 0), A (a; 0), B'(0; -b), B (0; b).*

Coordinate dei fuochi: *F'(-c; 0)* e *F (c; 0).*

Relazione tra *a, b,* e *c (a > b)* : $c^2=a^2-b^2$ oppure $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Eccentricità: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$

Equazione esplicite: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

Campo di esistenza delle (funzioni) equazioni esplicite: $-a\le x\le a$

Codominio delle (funzioni) equazioni esplicite: $-b\le y\le b$

Iperbole

Equazione in forma canonica $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Coordinate dei vertici: *A'(-a; 0), A (a; 0).*

Coordinate dei fuochi: *F'(-c; 0)* e *F (c; 0).*

Relazione tra *a, b,* e *c*: $c^2=a^2+b^2$ oppure $c=\sqrt{a^2+b^2}$

Eccentricità: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

Equazione esplicite: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

Campo di esistenza delle (funzioni) equazioni esplicite: $x\le -a \cup x\ge a$

Codominio delle (funzioni) equazioni esplicite: $\mathbb{R}$

Circonferenza

equazione a partire dal centro $C(x_0\,;y_0)$ e dal raggio *r*: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

equazione canonica: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

centro a partire dall'equazione canonica: $C(x_0\,;y_0)$ *con* $x_0=-\frac{a}{2}$ *e* $y_0=-\frac{b}{2}$

raggio a partire dall'equazione canonica:

$r=\left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}\right)=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2-c}$

Casi particolari:

a = 0 → $x^2+y^2+by+c=0$ → centro sull'asse y

b = 0 → $x^2+y^2+ax+c=0$ → centro sull'asse x

c = 0 → $x^2+y^2+ax+by=0$ circonferenza passante per l'origine

a = b = 0 → $x^2+y^2+c=0$ → centro nell'origine

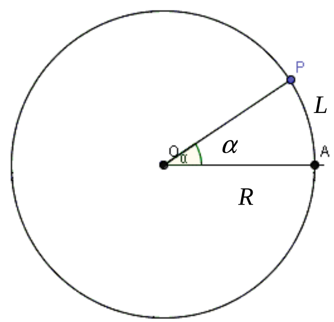
a = c = 0 → $x^2+y^2+by=0$ → centro sull'asse y, circ. passante per l'origine

b = c = 0 → $x^2+y^2+ax=0$ →centro sull'asse x, circ. passante per l'origine

Goniometria

Definizione di radiante:

$\alpha_{RAD}=\frac{L}{R}=\frac{\overset{\frown}{AP}}{\overline{OA}}$



Conversione Angoli (DMS) – Radianti:

da gradi a rad.: $\alpha_{RAD}=\frac{\alpha°}{180°}\cdot\pi$

da rad. a gradi: $\alpha°=\frac{\alpha_{RAD}}{\pi}\cdot 180°$

Lunghezza dell'arco di circonferenza: $L = \alpha_{RAD} \cdot R$

Circonferenza goniometrica: $x^2 + y^2 = 1$

I identità fondamentale: $\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1$

II identità fondamentale: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Cotangente: $cotg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Segni delle funzioni goniometriche nei 4 quadranti

Quadrante	cos (α)	sin (α)	tg (α)	cotg (α)
I	+	+	+	+
II	-	+	-	-
III	-	-	+	+
IV	+	-	-	-

Periodicità delle funzioni goniometriche:

$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$; $\mathrm{sen}(\alpha + 360°) = \mathrm{sen}\alpha$

$\mathrm{tg}(\alpha + 180°) = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{cotg}(\alpha + 180°) = \mathrm{cotg}\alpha$

Dominio delle funzioni goniometriche:

Dominio(coseno) = $\mathbb{R}$ oppure $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ Dominio(seno) = $\mathbb{R}$ oppure $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Dominio(tangente) = $\mathbb{R} - \{90° + k180°, con\, k \in Z\}$

Dominio(cotangente) = $\mathbb{R} - \{k180°, con\, k \in Z\}$

Codominio delle funzioni goniometriche:

Codominio(coseno) = $[-1;+1]$ Codominio(seno) = $[-1;+1]$

Codominio(tangente) = $\mathbb{R}$. Codominio(cotangente) = $\mathbb{R}$.

Valori delle funzioni goniometriche nei principali angoli

ang. α (°)	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**	**360°**
ang. α (rad)	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2 π
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\mathrm{cotg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Espressione di due delle funzioni goniometriche quando ne è nota una terza

A partire dal **coseno**:

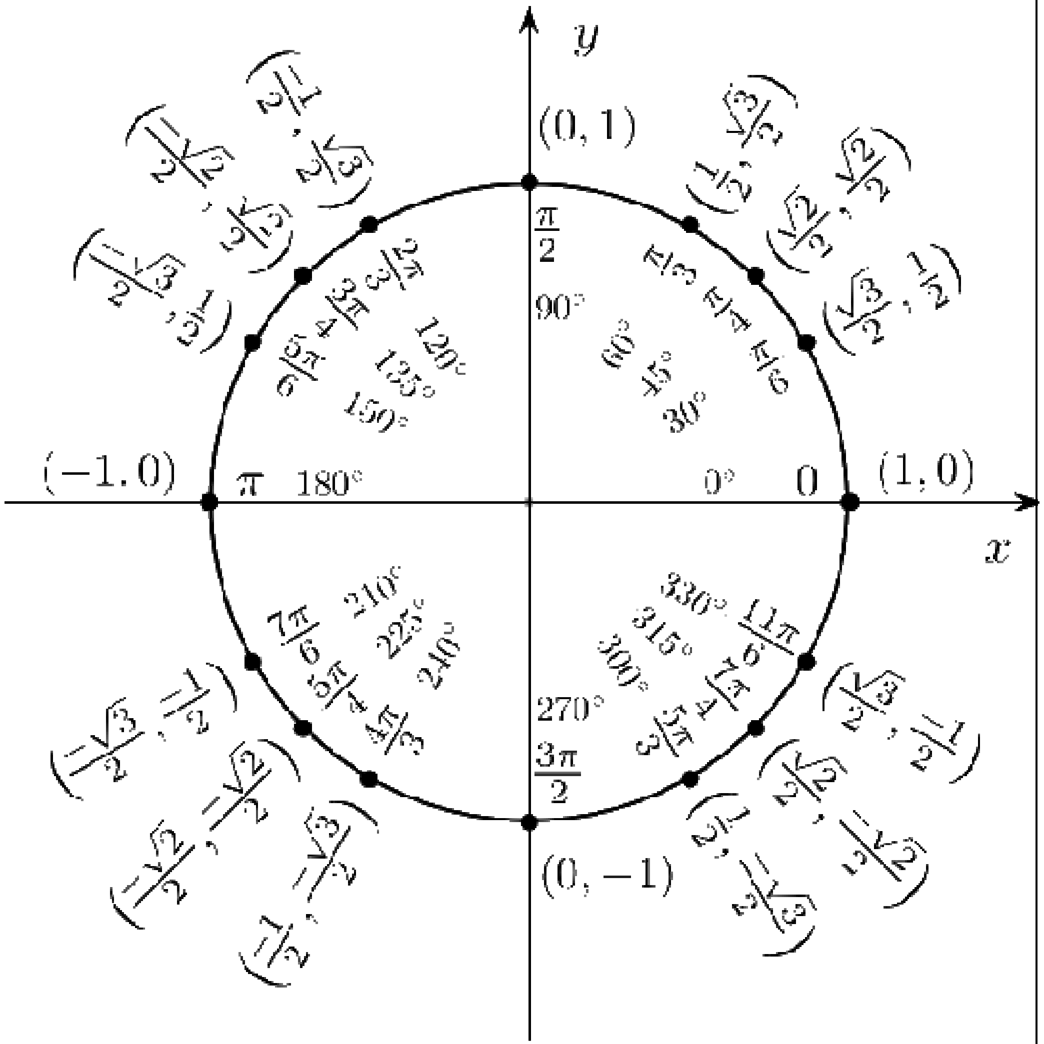
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

A partire dal **seno**:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha}}$$

A partire dalla **tangente**:

$$\mathrm{sen}\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$$



Angoli Associati

angoli opposti: α; -α

cos(-α) = cos(α)
sin(-α) = - sin α
tg(-α) = - tg α
cotg(-α) = - cotg α

angoli esplementari: α; 360°-α

cos(360° - α) = cos α	cos(2π - α) = cos α
sin(360° - α) = - sin α	sin(2π - α) = - sin α
tg(360°- α) = - tg α	tg(2π - α) = - tg α
cotg(360°-α) = - cotg α	cotg(2π-α) = - cotg α

angoli supplementari: α; 180°-α

cos(180° - α) = - cos α	cos(π - α) = - cos α
sin(180° - α) = sin α	sin(π - α) = sin α
tg(180° - α) = - tg α	tg(π - α) = - tg α
cotg(180° - α) = - cotg α	cotg(π - α) = - cotg α

angoli complementari: α; 90°-α

sin(90° - α) = cos α	sin(π/2 - α) = cos α
cos(90° - α) = sin α	cos(π/2 - α) = sin α
tg(90° - α) = cotg α	tg(π/2 - α) = cotg α
cotg(90° - α) = tg α	cotg(π/2 - α) = tg α

angoli che differiscono di 90°: α; 90°+α

cos(90° + α) = - sin α	cos(π/2 + α) = - sin α
sin(90° + α) = cos α	sin(π/2 + α) = cos α
tg(90° + α) = - cotg α	tg(π/2 + α) = - cotg α
cotg(90° + α) = - tg α	cotg(π/2 + α) = - tg α

angoli che differiscono di 180°: α; 180°+α

cos(180° + α) = - cos α	cos(π + α) = - cos α
sin(180° + α) = - sin α	sin(π + α) = - sin α
tg(180° + α) = tg α	tg(π + α) = tg α
cotg(180° + α) = cotg α	cotg(π + α) = cotg α

Formule di addizione

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Formule di sottrazione

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Formule di duplicazione

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,;$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formule di bisezione

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,;\qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,;\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Equazioni goniometriche elementari

Equazioni in coseno $\cos x=a$

$$\left[\begin{array}{ll} x_1=\alpha+k\cdot 360^\circ & k\in Z \\ x_2=-\alpha+k\cdot 360^\circ & k\in Z \end{array}\right.$$

Equazioni in seno $\sin x=b$

$$\left[\begin{array}{ll} x_1=\beta+k\cdot 360^\circ & k\in Z \\ x_2=180^\circ-\beta+k\cdot 360^\circ & k\in Z \end{array}\right.$$

Equazioni in tangente $\tan x=c$

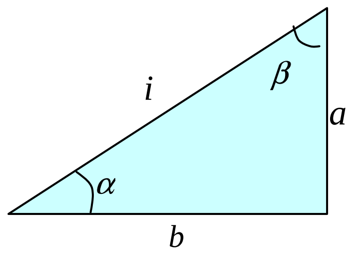
$$x=\gamma+k\cdot 180^\circ \qquad k\in Z$$

Trigonometria

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Teorema di Pitagora:

$$i=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$a=\sqrt{i^2-b^2};\ \ b=\sqrt{i^2-a^2}$$

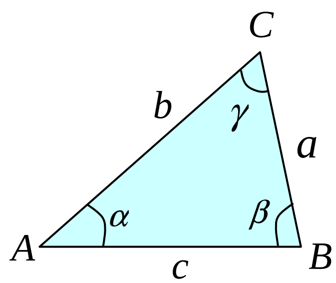


formule dirette	formule inverse - 1	formule inverse - 2
$b=i\cdot\cos\alpha$	$\cos\alpha=b/i$	$i=b/\cos\alpha$
$a=i\cdot\mathrm{sen}\,\alpha$	$sen\alpha=a/i$	$i=a/sen\alpha$
$a=b\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$	$tg\alpha=a/b$	$b=a/tg\alpha$

Risoluzione dei triangoli generici

Teorema dei Seni

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$



Il teorema dei seni può essere utilizzato per la risoluzione dei triangoli generici quando sono noti:

1) 1 lato e 2 angoli;
2) 2 lati e l’angolo non compreso fra essi.

Teorema di Carnot o del Coseno

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

Il teorema di Carnot può essere utilizzato per la risoluzione dei triangoli generici quando sono noti:

1) 2 lati e l’angolo compreso fra essi.
2) 3 lati.

Schema operativo per la risoluzione dei triangoli rettangoli

	dati noti	**a**	**b**	**i**	α	β
Prob. 1	ipotenusa *i* angolo α	$a = i \cdot \text{sen}\alpha$	$b = i \cdot \cos\alpha$	i	α	$\beta = 90° - \alpha$
Prob. 2	cateto *a* angolo opposto α	a	$b = \dfrac{a}{\text{tg}\alpha}$	$i = \dfrac{a}{\text{sen}\alpha}$	α	$\beta = 90° - \alpha$
Prob. 3	cateto *b* angolo adiacente α	$a = b \cdot \text{tg}\alpha$	b	$i = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	α	$\beta = 90° - \alpha$
Prob. 4	cateto *a* ipotenusa *i*	a	$b = \sqrt{i^2 - a^2}$	i	$\alpha = sen^{-1}\dfrac{a}{i}$	$\beta = 90° - \alpha$
Prob. 5	cateto *b* ipotenusa *i*	$a = \sqrt{i^2 - b^2}$	b	i	$\alpha = sen^{-1}\dfrac{a}{i}$	$\beta = 90° - \alpha$
Prob. 6	cateto *a* cateto *b*	a	b	$i = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\alpha = tg^{-1}\dfrac{a}{b}$	$\beta = 90° - \alpha$

Schema operativo per la risoluzione dei triangoli generici

dati noti	**Problema 1** 1 lato *c* e 2 angoli adiacenti α e β	**Problema 2** 2 lati *a* e *b* e l'angolo non compreso α	**Problema 3** 2 lati *a* e *b* e l'angolo compreso γ	**Problema 4** 3 lati a, b e c
a	$a = c \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$	a	a	a
b	$b = c \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$	b	b	b
c	c	$c = a \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$	c
α	α	α	$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$	$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\alpha = ...$
β	β	$\sin\beta = \dfrac{b}{a}\sin\alpha$ $\Rightarrow \beta = ...$	$\sin\beta = \dfrac{b}{c}\sin\gamma$ $\beta = ...$	$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ $\beta = ...$
γ	$\gamma = 180° - \alpha - \beta$	$\gamma = 180° - \alpha - \beta$	γ	$\gamma = 180° - \alpha - \beta$