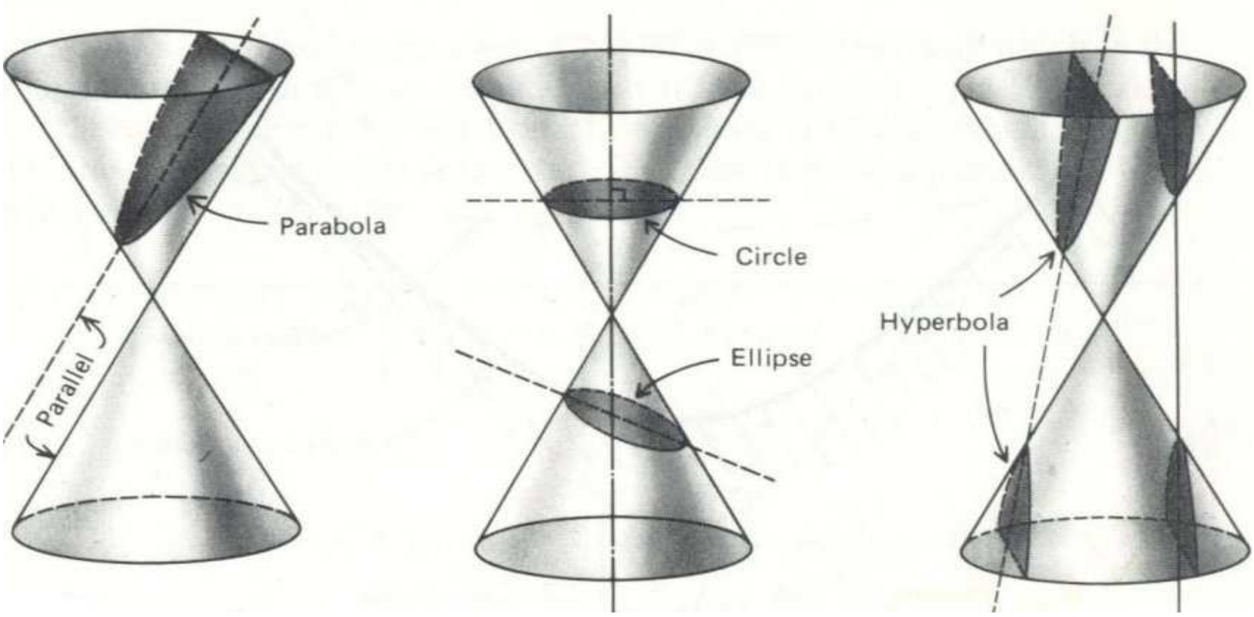
Le Coniche

Introduzione storica. Le coniche sono curve studiate sin dall'antichità e molti matematici hanno dato il loro contributo allo studio di tali curve. Sembra che per primo Menecmo (375-325 a.C.), un matematico greco discepolo di Platone e di Eudosso di Cnido e maestro di Alessandro Magno, si sia imbattuto nelle coniche nel tentativo di risolvere uno dei tre famosi problemi della matematica greca (i problemi di Delo). Apollonio di Perga (262-190 a.C.), conosciuto come il Grande Geometra, consolidò ed approfondì i precedenti risultati sulle coniche nell'opera *Le Coniche*, esponendo la maggior parte delle proprietà tuttora note. Apollonio di Perga fu il primo a dimostrare che era possibile ottenere tutte e tre le sezioni coniche intersecando un cono con un piano e facendo poi variare l'inclinazione di tale piano. Fu anche il primo ad attribuire i nomi di *ellipsis* (mancanza), *hyperbola* (lanciare al di là), *parabola (*porre accanto o confrontare).

Apollonio di Perga

Tali nomi erano adattamenti di termini usati precedentemente forse dai pitagorici nella soluzione di equazioni di secondo grado mediante l'applicazione di aree.



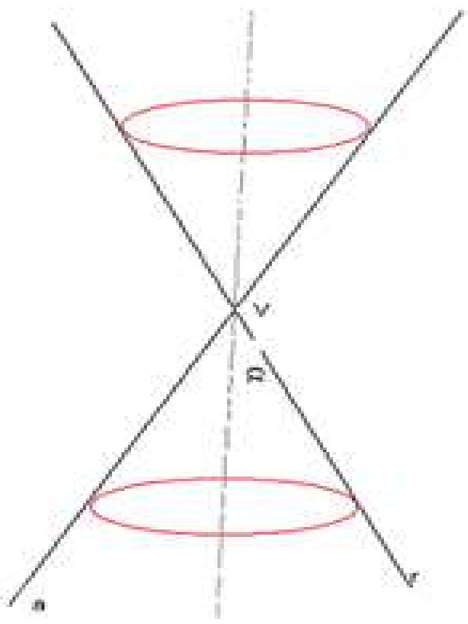
Successivamente le leggi di **Keplero** (1609 – 1618) sui movimenti dei pianeti diedero una notevole applicazione delle coniche e delle loro proprietà geometriche. La prima legge di Keplero afferma che l'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

Lo studio matematico delle coniche iniziato storicamente per via geometrica è stato poi sviluppato e approfondito da **Cartesio** nella sua opera *"La Geometria"* (1637), con la quale il noto filosofo e matematico francese introduce la Geometria Analitica. Cartesio espone la scoperta che le equazioni indeterminate in due incognite corrispondono a luoghi geometrici, cioè ad insiemi di punti del piano che verificano determinate proprietà. Le curve cartesiane che verificano un'equazione algebrica di secondo grado sono proprio le coniche di Apollonio, e questo è il motivo per cui le coniche vengono anche dette *curve del secondo ordine*.

Caratterizzazione geometrica

Il termine conica è un aggettivo sostantivato che sostituisce abitualmente l'espressione esatta ma più lunga *sezione conica*; si indica così una curva ottenuta secando un cono di rotazione con un piano non passante per il suo vertice.

Siano *a* una retta dello spazio e *r* un'altra retta che incontri la prima in un punto V formando un angolo α minore di 90°; si chiama **superficie conica indefinita** la superficie generata in una rotazione completa della retta *r* attorno alla retta *a*.
Le due porzioni della superficie conica, quella superiore e quella inferiore si chiamano **falde** della superficie conica, la retta *a* si chiama **asse**, la retta *r* si chiama **generatrice** e l'angolo α **apertura** della superficie conica.



Chiamiamo π un generico piano non passante per il vertice del cono e chiamiamo β l'angolo acuto che esso forma con l'asse della superficie conica.

- Se il piano secante forma con l'asse *a* un angolo β maggiore dell'angolo α e diverso da 90° cioè se β > α la sezione conica è una **ellisse** (fig. 1).
- Se il piano secante è perpendicolare all'asse della superficie conica cioè se β = 90°, la sezione è una **circonferenza** (fig. 2).
- Se il piano secante forma con l'asse *a* un angolo minore dell'angolo α cioè se β < α la sezione è un'**iperbole** (fig. 3).
- Se il piano secante è parallelo alla direttrice cioè se β = α , allora taglia una sola falda della superficie conica e la sezione si chiama **parabola** (fig. 4).

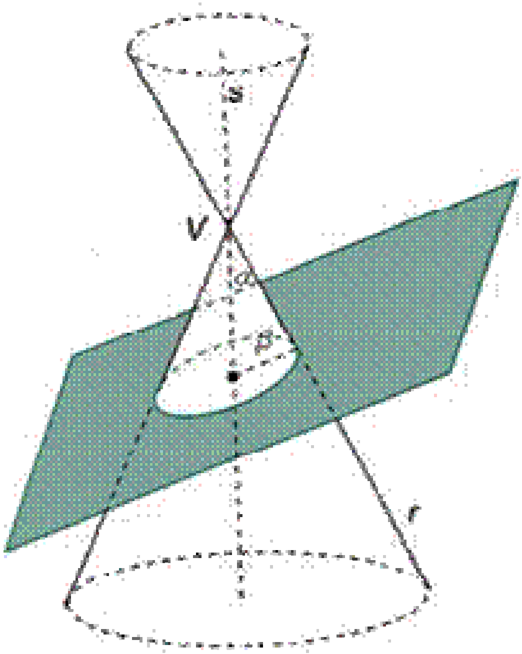


fig. 1 ellisse

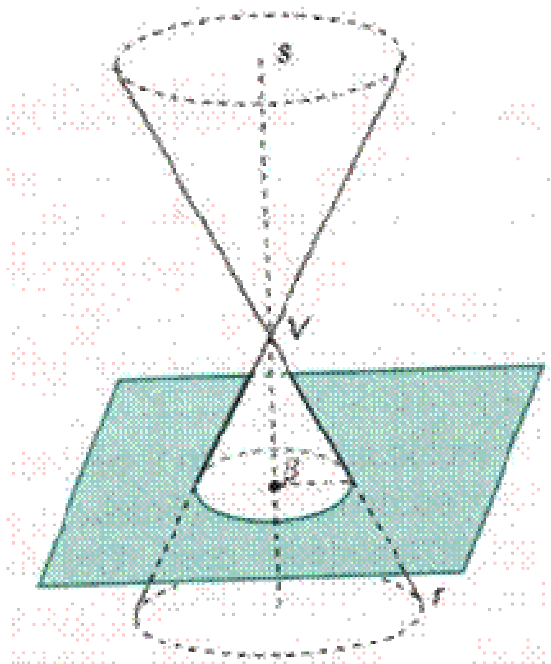


fig. 2 circonferenza

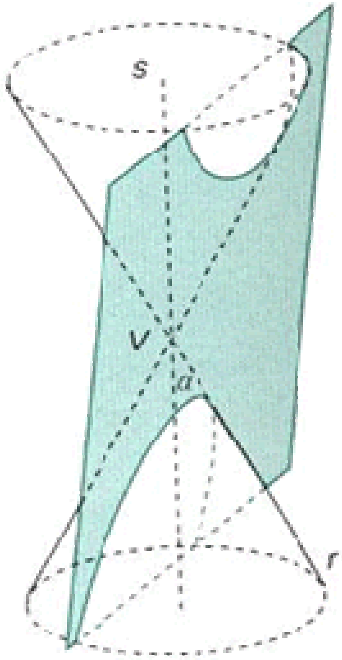


fig. 3 iperbole

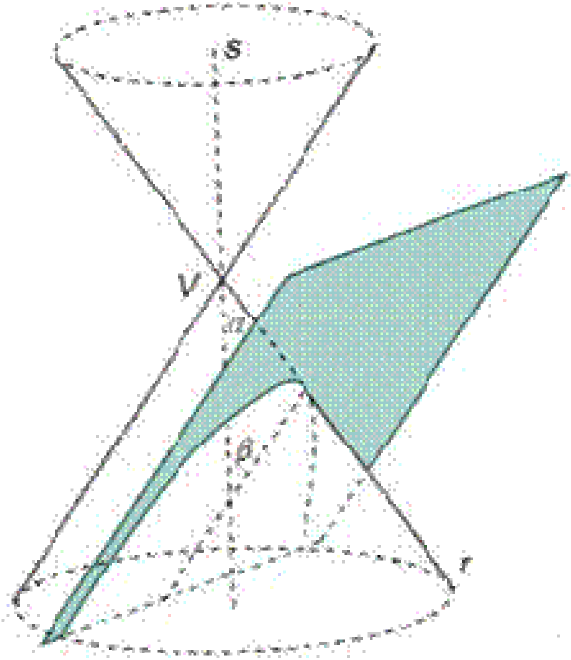
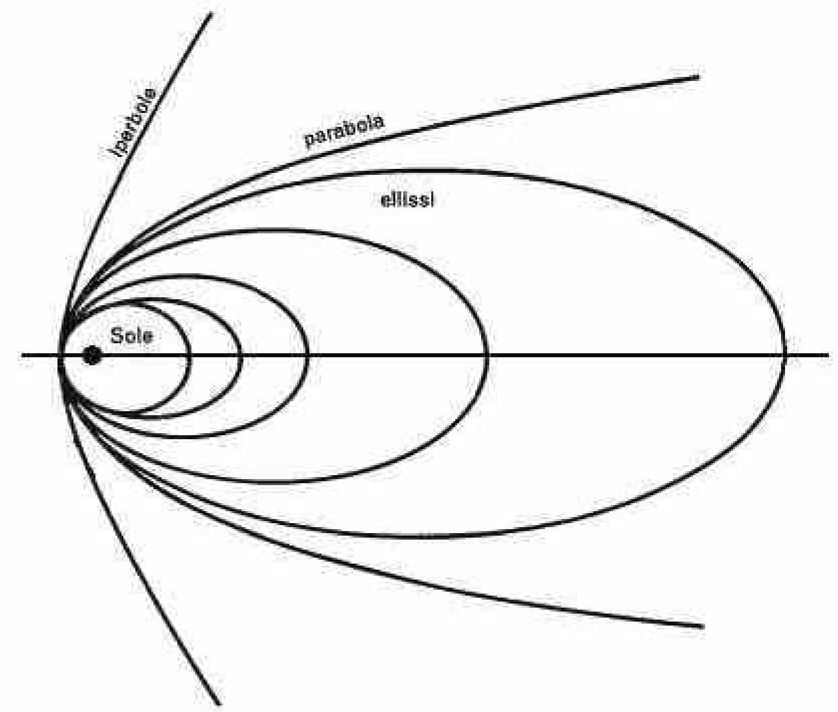


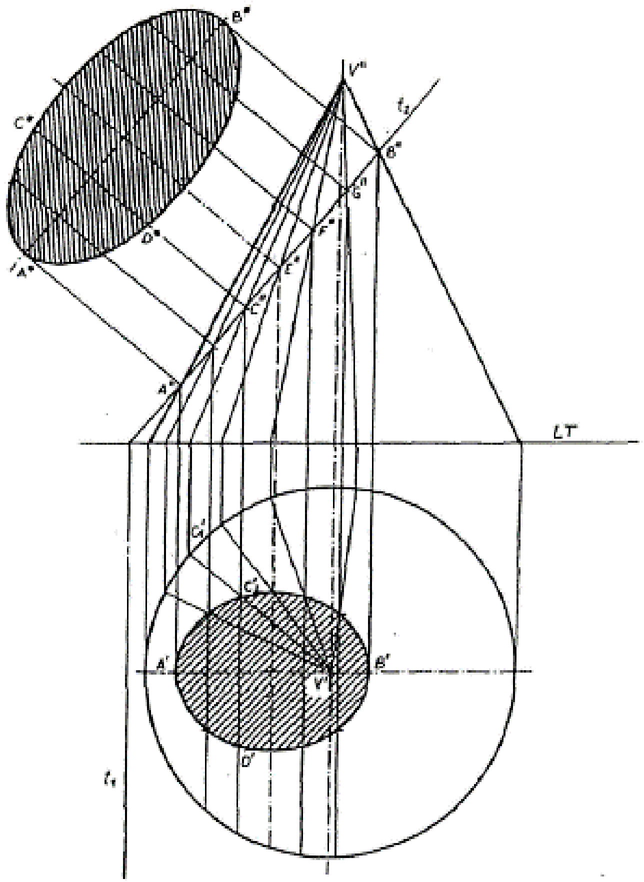
fig. 4 parabola

Le coniche in Astronomia.

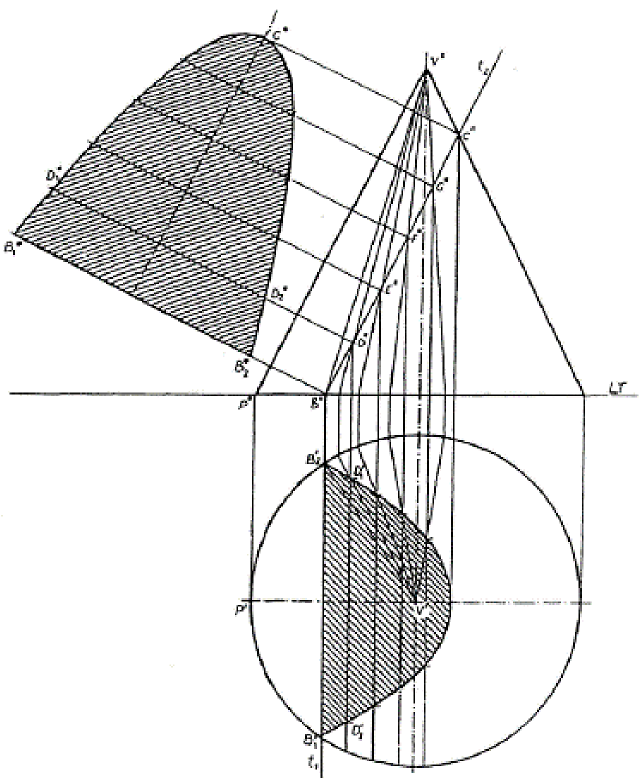
In termini moderni possiamo dire che ogni corpo dotato di massa determina intorno a sé una zona di spazio in cui le altre masse risentono della sua attrazione, un *campo gravitazionale*. Un corpo che si muove in un campo gravitazionale, può descrivere tre diversi tipi di traiettorie: ellittica, iperbolica o parabolica. Tali traiettorie dipendono dalla velocità iniziale e dalla direzione del corpo. Nel caso di orbite ellittiche si parla di traiettoria chiusa (per es. la terra intorno al sole, la luna intorno alla terra). Nel caso di orbite iperboliche e paraboliche si parla di orbite aperte (per es. una cometa intorno al sole).



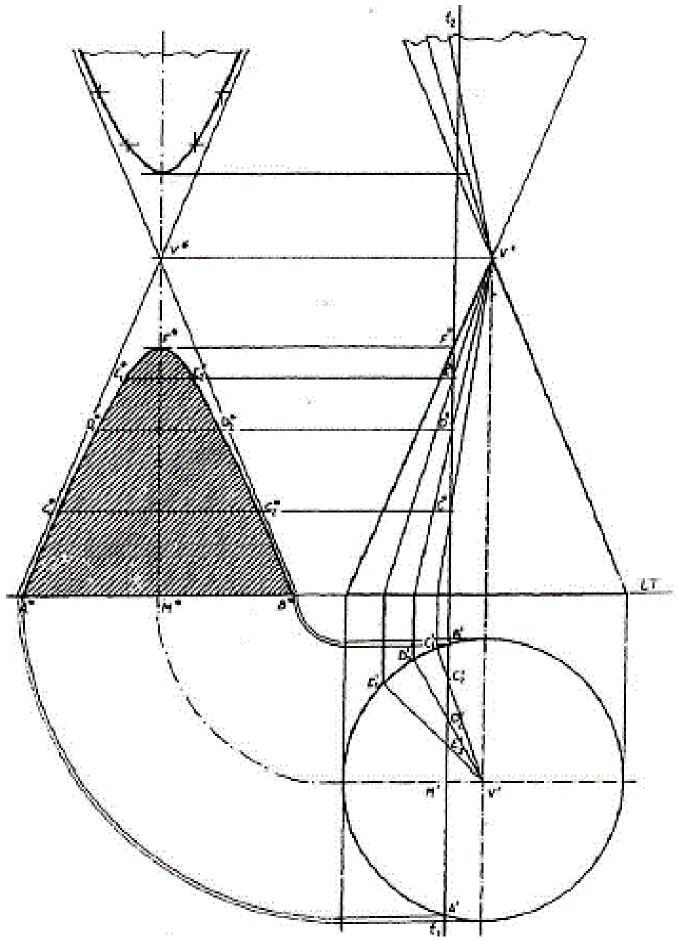
Le Sezioni Coniche nel Disegno Geometrico



ellisse



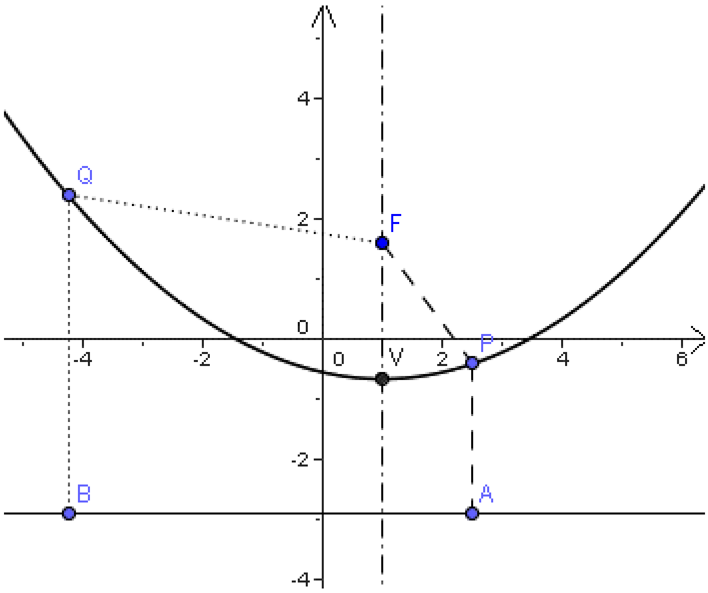
parabola



iperbole

Parabola

Definizione. La parabola è un *luogo di punti*, è cioè un insieme di punti del piano che verificano tutti una stessa proprietà; essa si definisce come *il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze da un punto fisso F detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice sono uguali*. Con riferimento alla figura si ha $\overline{PF} = \overline{PA}$ e $\overline{QF} = \overline{FB}$.

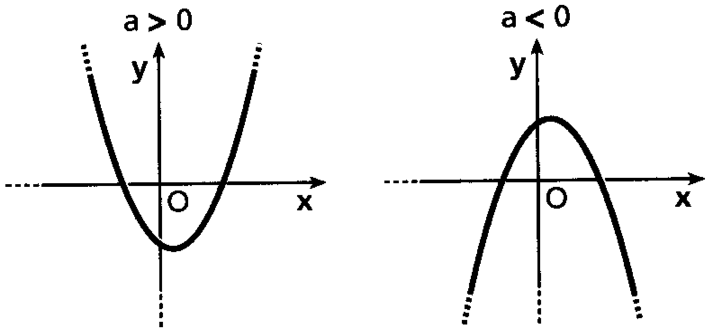


Restringiamo l'analisi alle parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate y.
Si trova che l'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y delle ordinate è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

con $a \neq 0$.

Se $a > 0$ la parabola rivolge la concavità verso l'alto (*regge l'acqua*).
Se $a < 0$ la parabola rivolge la concavità verso il basso (*non regge l'acqua*).



Asse. La parabola ha un asse di simmetria, consistente in una retta verticale, di equazione $x = -\frac{b}{2a}$

Vertice. Il vertice della parabola è l'intersezione della parabola stessa con il suo asse. Esso ha coordinate: $V = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a} \right)$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$, come di consueto.

Fuoco. Il fuoco della parabola ha coordinate $F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{+1-\Delta}{4a} \right)$

Direttrice. La retta direttrice è una retta orizzontale ed ha equazione $y = \frac{-1-\Delta}{4a}$

Intersezioni della parabola con l'asse y. L'intersezione I_y della parabola con l'asse y si ottiene risolvendo il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse y:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$$

Si ottiene così semplicemente: $I_y = (0; c)$

Intersezioni della parabola con l'asse x. Le eventuali intersezioni I_{x1} e I_{x2} della parabola con l'asse x si ottiene risolvendo il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse x:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Le ascisse delle intersezioni si ottengono quindi risolvendo l'equazione di II grado $ax^2+bx+c=0$. Si avrà dunque: $I_{x1}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$ $\quad I_{x2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$.

Grafico della parabola. Per tracciare il grafico della parabola si disegna in primo luogo l'asse, poi il vertice, si trovano ancora le intersezioni con l'asse y e con l'asse x. Si tenga presente che per ogni punto A della parabola trovato, esiste il simmetrico rispetto all'asse di simmetria, posto alla stessa altezza e a uguale distanza dall'asse, ma dalla parte opposta rispetto a questo.
Infine, se i punti trovati non fossero sufficienti, si ricavano altri punti con la tabella x-y e i loro simmetrici rispetto all'asse.

Casi particolari.

- Se $b = 0$ la parabola $y=ax^2+c$ ha per asse l'asse y, di equazione $x = 0$.
- Se $c = 0$ la parabola $y=ax^2+bx$ passa per l'origine.
- Se $b = c = 0$ la parabola $y=ax^2$ passa per l'origine e ha per asse l'asse y.

Proprietà ottiche della parabola. La parabola gode di un'importante proprietà ottica, detta **proprietà focale**: "*ogni raggio passante per il fuoco F si riflette in un raggio parallelo all'asse della parabola e, viceversa, ogni raggio parallelo all'asse della parabola si riflette nel fuoco F.*"

Se poniamo nel fuoco F della parabola una sorgente luminosa puntiforme e la "parete" interna della parabola è rivestita da materiale riflettente, ogni raggio luminoso che parte dal fuoco si riflette in un raggio perpendicolare alla direttrice, cioè parallelo all'asse della parabola. I fari delle automobili, tutti i fari in genere, le torce elettriche, vengono realizzati in base a questa proprietà.
È inoltre proprio per questo che il punto F viene chiamato *fuoco*. La retta *d* viene chiamata *direttrice* perché stabilisce la direzione dei raggi riflessi (tutti perpendicolari ad essa).

Viceversa, se dei raggi paralleli all'asse di una parabola vengono riflessi dalla superficie della parabola stessa, essi saranno tutti concentrati nel fuoco. Le ben note antenne *paraboliche*, i radiotelescopi, i telescopi a riflessione, i microfoni parabolici funzionano proprio in questo modo.

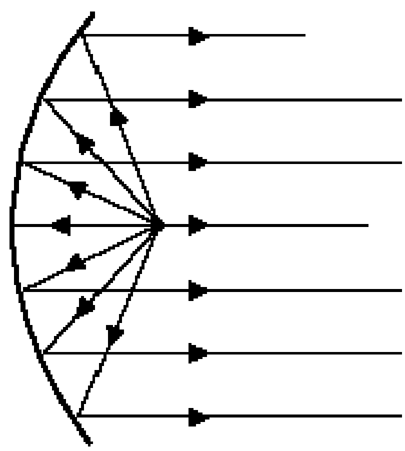


fig. a: i raggi uscenti dal fuoco vengono riflessi dalla superficie della parabola tutti parallelamente all'asse

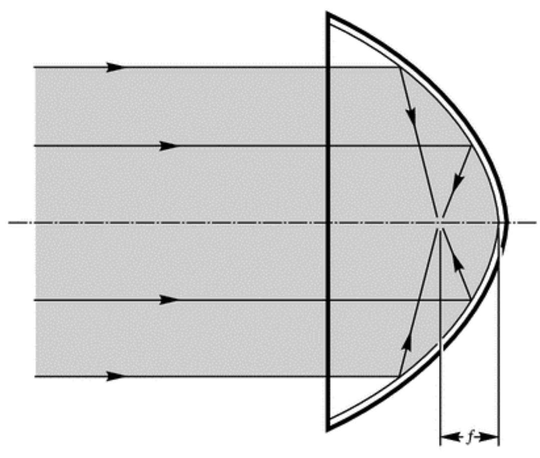
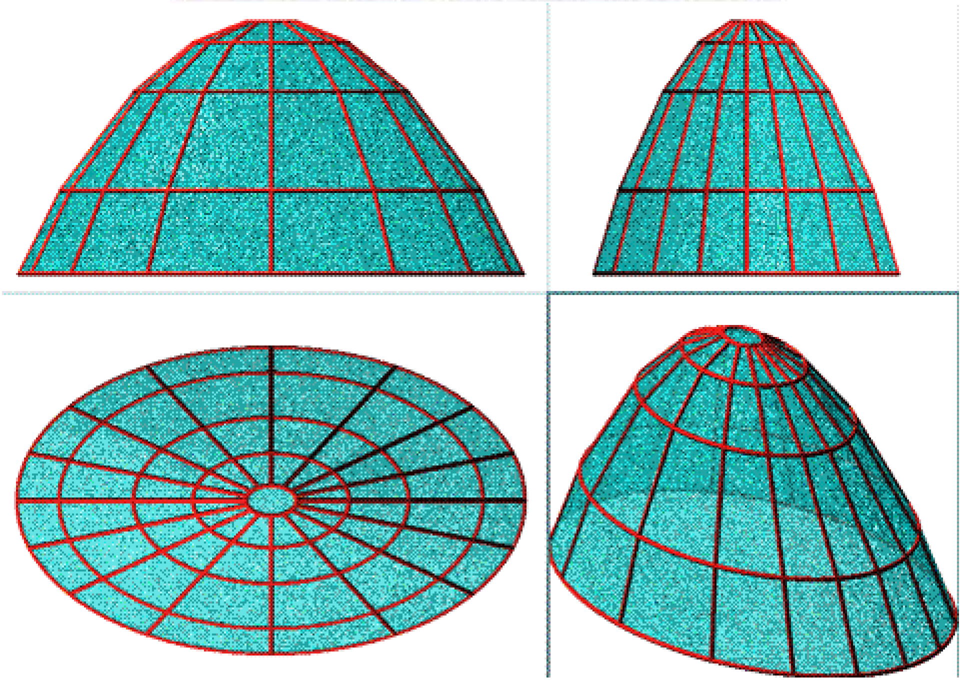


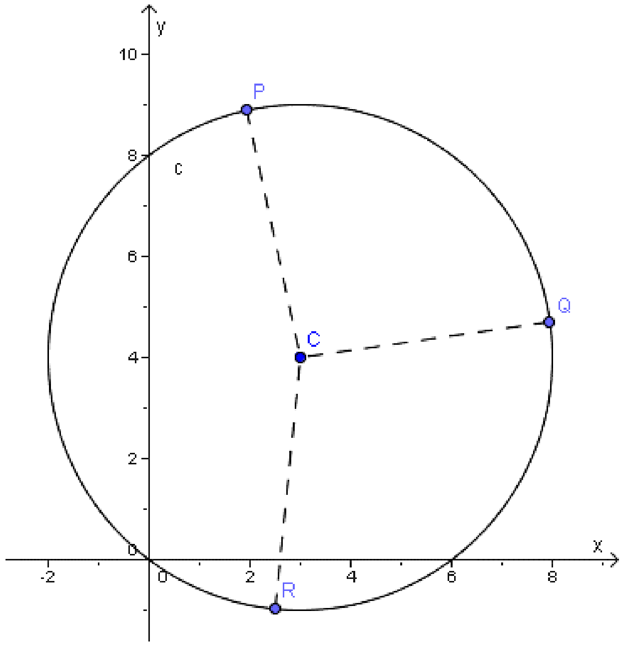
fig. b: i raggi paralleli giungono sulla superficie della parabola da grande distanza e convergono nel fuoco

La proprietà focale è conosciuta fin dall'antichità, infatti in questo modo furono costruiti i fari all'imbocco dei porti. Ricordiamo la famosa leggenda degli *specchi ustori* di Archimede di Siracusa: secondo tale leggenda Archimede avrebbe infatti distrutto la flotta romana durante l'assedio di Siracusa nel 213 a.C. concentrando i raggi solari con appositi specchi.
Gli specchi, le antenne paraboliche, i fari, ecc. sono in realtà figure tridimensionali, chiamate *paraboloidi*. Un paraboloide si ottiene facendo ruotare una parabola attorno al proprio asse di simmetria.



Circonferenza

Definizione. La circonferenza è un *luogo di punti*, è cioè un insieme di punti del piano che verificano tutti una stessa proprietà; essa si definisce come *il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze da un punto fisso C detto centro sono tutte uguali.* Con riferimento alla figura si ha $\overline{CP} = \overline{CQ} = \overline{CR} = r = raggio$.



Utilizzando la formula della distanza tra due punti si ottiene l'equazione generale della circonferenza di centro *C* (x_0 ; y_0) e raggio *r*:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \quad \text{(eq. 1)}$$

e, eseguendo qualche passaggio:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \quad \text{(eq. 2)}$$

Centro. A partire dall'equazione 2 le coordinate del centro si ricavano mediante le formule:

$$C(x_0\,;y_0)\;con\quad x_0=-\frac{a}{2}\quad e\quad y_0=-\frac{b}{2}$$

Raggio. A partire dall'equazione 2 e dalla conoscenza del centro, la misura del raggio si ricava mediante la formula:

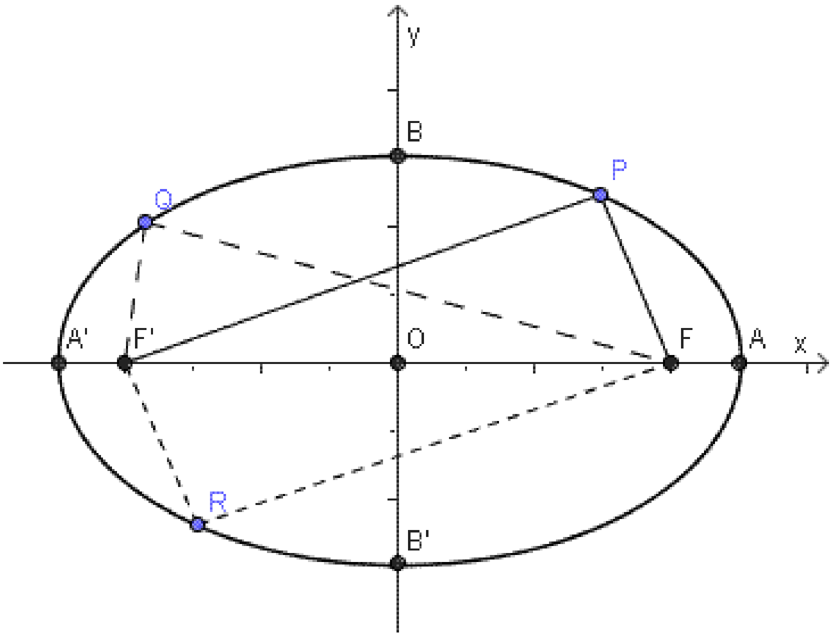
$$r=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2-c}$$

Casi particolari.

- Se b = 0 il centro della circonferenza $x^2+y^2+ax+c=0$ giace sull'asse x: $C(x_0\,;y_0)=C\left(-\frac{a}{2};0\right)$.
- Se a = 0 il centro della circonferenza $x^2+y^2+by+c=0$ giace sull'asse y: $C(x_0\,;y_0)=C\left(0;-\frac{b}{2}\right)$.
- Se a = b = 0 la circonferenza $x^2+y^2+c=0$ ha il centro nell'origine: $C(x_0\,;y_0)=C(0;0)$.
- Se c = 0 la circonferenza $x^2+y^2+ax+by=0$ passa per l'origine.

Ellisse

Definizione. L'ellisse, come la parabola e l'iperbole, è un *luogo di punti*, cioè un insieme di punti del piano che verificano tutti una stessa proprietà; *l'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze da due punti fissi F e F' detti fuochi, hanno somma costante (=2a).* Con riferimento alla figura si ha $\overline{PF} + \overline{PF}' = \overline{QF} + \overline{QF}' = \overline{RF} + \overline{RF}' = costante$



Si trova che l'equazione dell'ellisse *in forma canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Nella nostra analisi supponiamo *a* > *b*).

Semiassi, assi. Il segmento *A'A* è detto *asse maggiore* dell'ellisse, di lunghezza *2a*; *OA* e *OA'* sono i *semiassi maggiori*, di lunghezza *a*. Analogamente, il segmento *B'B* è detto *asse minore* dell'ellisse, di lunghezza *2b*; *OB* e *OB'* sono i *semiassi minori*, di lunghezza *b*.

Distanza focale. Il segmento *F'F* è detto *distanza focale;*i segmenti *OF'* e *OF*, di lunghezza *c*, rappresentano la *semidistanza focale* (distanza dei fuochi dal centro).

Tra i parametri *a*, *b* e *c* sussiste una relazione: $c^2 = a^2 - b^2$ oppure $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Vertici. L'ellisse ha 4 vertici, di coordinate *A'(-a; 0), A (a; 0), B'(0; -b), B (0; b).*

Fuochi. I fuochi hanno coordinate *F'(-c; 0)* e *F (c; 0).*

Eccentricità. L'*eccentricità*, indicata con il simbolo *e*, misura lo schiacciamento dell'ellisse. Essa si definisce:

$$e = \frac{c}{a}$$

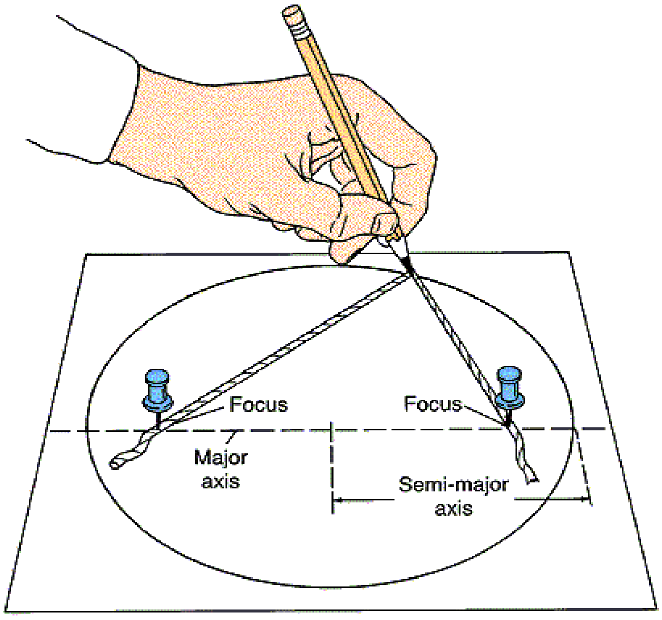
e per quanto detto prima risulta

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\,.$$

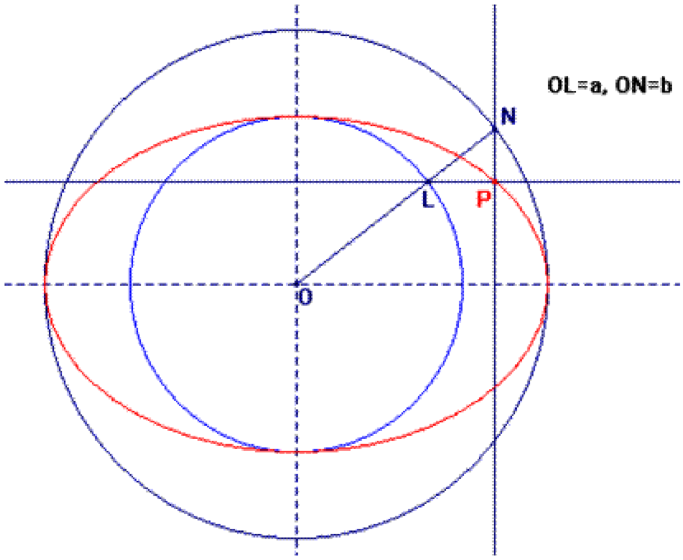
Poiché nell'ellisse risulta $c<a$, l'eccentricità varia da 0 ad 1 ($0\le e<1$).

Costruzioni geometriche.
Le costruzioni geometriche più usate sono:

a) la costruzione del giardiniere, che fa uso di una cordicella inestensibile, i cui estremi sono fissati ai fuochi;
b) la costruzione dei due cerchi o del doppio ribaltamento, che si ottiene tracciando due circonferenze di raggi *a* e *b*.



costruzione del giardiniere



costruzione dei due cerchi o del doppio ribaltamento

Equazioni esplicite. Risolvendo l'equazione in forma canonica rispetto alla variabile *y*, si ha:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

So osservi come le equazioni siano due, una per le *y* positive, nel I e II quadrante, l'altra per le *y* negative, III e IV quadrante.
Come si può osservare, la variabile indipendente x non può assumere tutti i possibili valori, ma dev'essere:

$$-a\le x\le a$$

Analogamente si verifica per la variabile dipendente y:

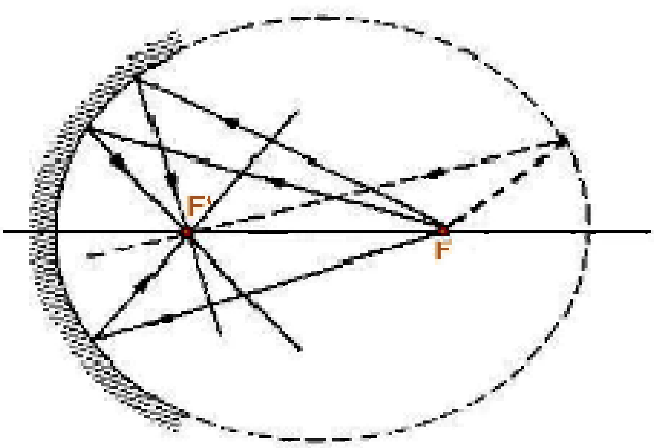
$$-b\le y\le b$$

Costruzione geometrica attraverso l'equazione esplicita. Per tracciare il grafico dell'ellisse, oltre alla costruzione attraverso il metodo delle due circonferenze, si possono seguire i seguenti passi:

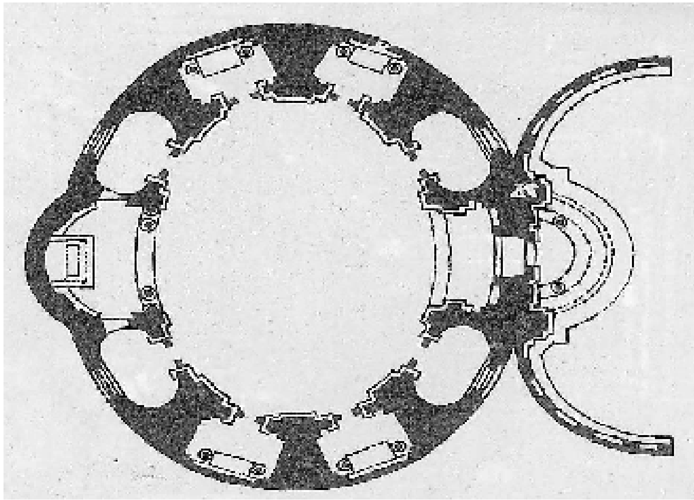
1) Si traccino sul piano cartesiano i vertici *A*, *A'*, *B* e *B'*.
2) Utilizzando l'equazione esplicita, tramite la tabella x-y si ricavino vari punti in successione con ascissa *x* a partire da 0 e fino al valore *a*.

Circonferenza come caso particolare dell'ellisse. Se nell'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ risulta $a=b$, l'equazione diviene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ e, infine $x^2+y^2=a^2$, che rappresenta una circonferenza di centro l'origine e raggio a. Pertanto la circonferenza è un'ellisse con gli assi congruenti. I fuochi di una circonferenza risultanti coincidenti con il centro della circonferenza stessa. L'eccentricità e di una circonferenza risulta pari a 0.

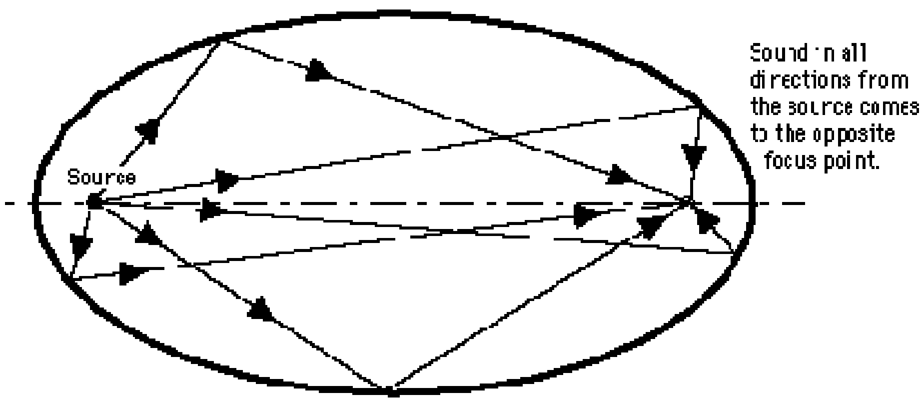
Proprietà dell'ellisse. Anche l'ellisse, come la parabola, ha interessanti proprietà ottico-acustiche. Supponiamo di avere uno specchio di forma ellittica: se si pone una sorgente di luce in uno dei due fuochi, tutti i raggi riflessi convergono nell'altro fuoco; questo ci dà una spiegazione del nome attribuito a tali punti F, F'. Supponiamo adesso di essere in un ambiente di forma ellittica. Il suono emesso in uno dei due fuochi, anche se molto debole, si sente molto distintamente nell'altro fuoco. La spiegazione di tali fenomeni deriva dal fatto che in entrambi i casi sia le onde luminose che quelle sonore vengono riflesse dalle pareti e, percorrendo tutte la stessa distanza, giungono contemporaneamente (in fase) all'altro fuoco.



Riflettore ellittico

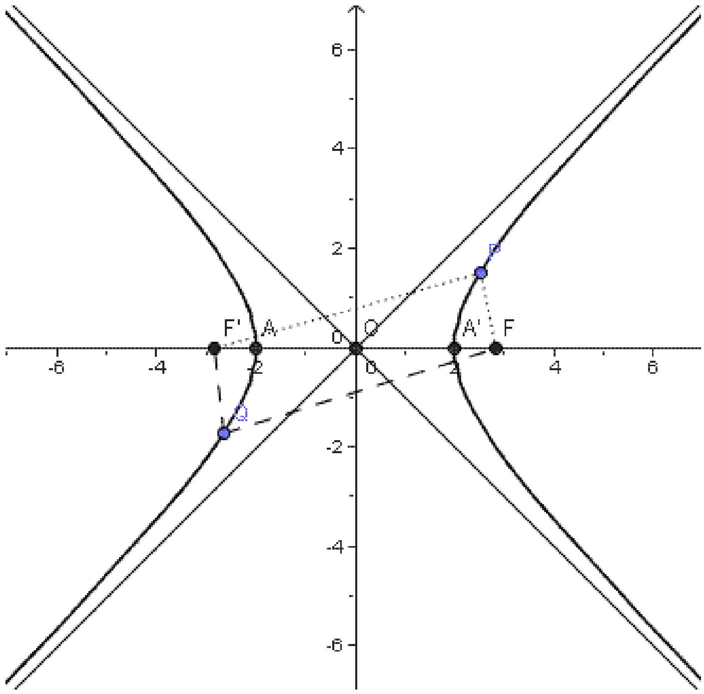


G.L. Bernini – S. Andrea al Quirinale



Iperbole

Definizione. L*'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano le cui distanze da due punti fissi F e F' detti fuochi, hanno differenza costante in valore assoluto (=2a).* Con riferimento alla figura si ha $\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right| = \left|\overline{QF}-\overline{QF'}\right| = costante$



Si trova che l'equazione dell'iperbole *in forma canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Semiassi, assi. Il segmento *A'A* è detto *asse trasverso* dell'iperbole, di lunghezza *2a*; *OA* e *OA'* sono i *semiassi trasversi*, di lunghezza *a*.

Distanza focale. Il segmento *F'F* è detto *distanza focale;*i segmenti *OF'* e *OF,* di lunghezza *c*, rappresentano la distanza dei fuochi dal centro.

Tra i parametri *a*, *b* e *c* sussiste una relazione: $c^2 = a^2 + b^2$ oppure $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

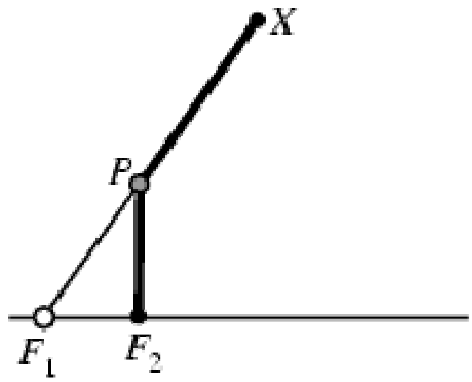
Vertici. L'iperbole ha solo 2 vertici, di coordinate *A'(-a; 0), A (a; 0).*

Fuochi. I fuochi hanno coordinate *F'(-c; 0)* e *F(c; 0).*

Asintoti. Gli asintoti dell'iperbole sono due rette passanti per l'origine, centro dell'iperbole, di equazioni rispettive: $y = -\frac{b}{a}x$ e $y = +\frac{b}{a}x$. Gli asintoti sono rette tangenti all'iperbole all'infinito. Si può cioè vedere che la distanza tra asintoto ed iperbole tende a zero via via che ci si allontana dall'origine.

Eccentricità. L'*eccentricità,* indicata con il simbolo *e*, è paria a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$. Poiché nell'iperbole è $c > a$, l'eccentricità è sempre maggiore di 1 ($e > 1$).

Costruzione geometrica. Esiste una costruzione del giardiniere anche per l'iperbole, ma risulta leggermente più articolata rispetto a quella dell'ellisse. Occorrono una cordicella inestensibile ed un'asticella rigida. L'iperbole può essere costruita congiungendo l'estremo libero X dell'asticella rigida F_1X, dove F_1 è il fuoco, e l'altro fuoco F_2 con la corda F_2PX.
Mentre l'asticella viene ruotata intorno ad F_1 and P è tenuto teso contro l'asticella stessa, il punto P descrive un ramo dell'iperbole.



Equazioni esplicite. Risolvendo l'equazione in forma canonica rispetto alla variabile y, si ha:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Anche qui le equazioni sono due, una per le y positive, nel I e II quadrante, l'altra per le y negative, III e IV quadrante.
Per quanto riguarda i valori possibili per la variabile indipendente x, si ha:

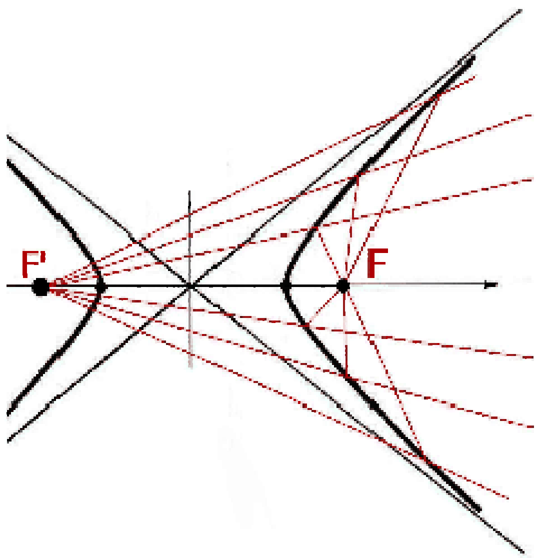
$$x \le -a \cup x \ge a$$

La variabile dipendente y può invece assumere tutti i possibili valori reali.

Costruzione geometrica attraverso l'equazione esplicita. Per tracciare il grafico dell'iperbole si possono seguire i seguenti passi:

1) Si traccino sul piano cartesiano i vertici A e A' e i punti $B(0; b)$ e $B'(0; -b)$, come se volessimo disegnare l'ellisse. Successivamente si disegni il rettangolo con centro nell'origine e passante per i 4 punti suddetti. L'iperbole è tutta al di fuori di questo rettangolo.
2) Si traccino le diagonali del rettangolo e le si prolunghino; i prolungamenti di tali diagonali rappresentano i due asintoti dell'iperbole.
3) Utilizzando l'equazione esplicita, tramite la tabella x-y si ricavino 5 o 6 punti con ascissa x superiore al valore a.

Proprietà dell'iperbole. L'iperbole, come già visto per la parabola e l'ellisse, possiede proprietà ottiche. Supponiamo di avere un riflettore di forma iperbolica, e poniamo una sorgente luminosa in uno dei due fuochi ad esempio F. Allora i raggi vengono riflessi come se provenissero dall'altro fuoco F'. Le traiettorie dei raggi riflessi si ottengono cioè congiungendo l'altro fuoco F' con il punto di riflessione.



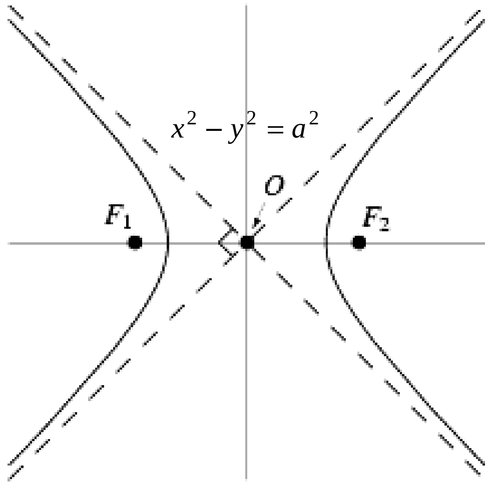
Iperbole equilatera. <u>L’iperbole equilatera è un’iperbole particolare in cui i semiassi *a* e *b* sono uguali</u>.
Imponendo nell’equazione dell’iperbole che $a = b$, si ottiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ o anche più semplicemente

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

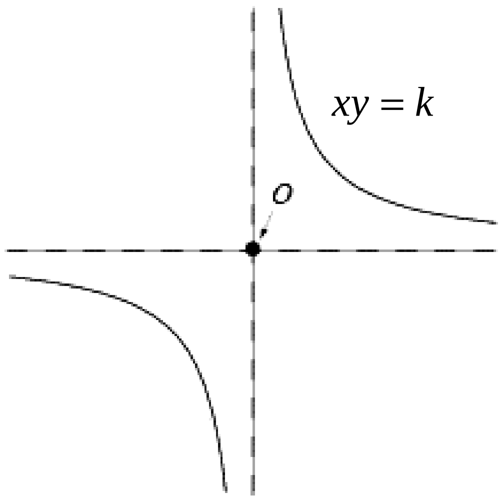
Gli asintoti dell’iperbole equilatera sono le rette bisettrici dei quadranti: $y = \pm x$.

La semidistanza focale *c* vale: $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

L’eccentricità *e* è uguale a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} = 1{,}414$



Iperbole equilatera riferita agli asintoti. Poiché nell’iperbole equilatera i due asintoti sono ortogonali, è possibile assumere come assi del riferimento cartesiano proprio le due bisettrici. Ciò corrisponde ad effettuare una rotazione di 45° gradi in senso orario.
In questo caso l’equazione dell’iperbole equilatera diviene più semplicemente
$xy = \frac{a^2}{2}$, oppure $\boxed{xy = k}$.
Questa è l’equazione della *proporzionalità inversa*. Ricordiamo infatti che due grandezze sono inversamente proporzionali se il loro prodotto è costante.



Problemi con le coniche

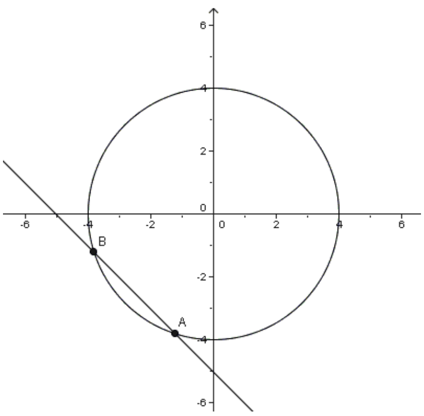
Posizione di una conica e di una retta. Per determinare la posizione di una conica e di una retta occorre impostare il sistema di equazioni tra la conica e la retta:

$$\begin{cases} equazione\ della\ conica \\ y = mx + q \end{cases}$$

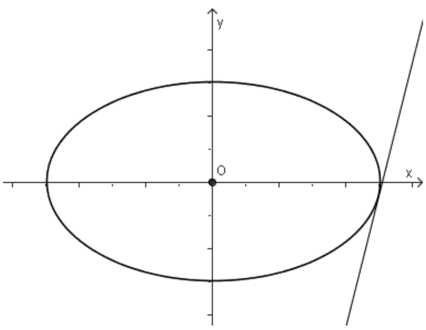
Tale sistema, risolto, fornirà le eventuali intersezioni tra la conica e la retta.

Sostituendo nell'equazione della conica alla y la sua espressione $y = mx + q$ si ottiene un'equazione di II grado, il cui discriminante Δ può essere:

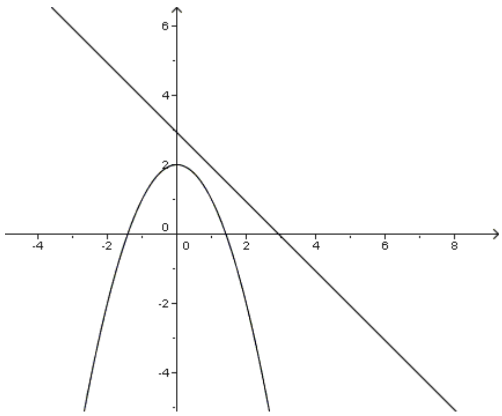
1) $\Delta > 0$. In tal caso esistono due soluzioni reali e distinte, cioè due intersezioni diverse tra la conica e la retta; pertanto la retta sarà **secante** la conica;
2) $\Delta = 0$. In tal caso esistono due soluzioni reali e coincidenti, cioè un'unica intersezione tra la conica e la retta; pertanto la retta sarà **tangente** alla conica;
3) $\Delta < 0$. In tal caso non esistono soluzioni reali, cioè non vi sarà alcuna intersezione tra la conica e la retta; pertanto la retta sarà **esterna** alla conica.



$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$

Rette tangenti condotte da un punto fisso P_0 (x_0 ; y_0) ad una conica assegnata. Per determinare le equazioni delle rette tangenti ad un una conica bisogna:

1. in primo luogo determinare l'equazione del fascio proprio di rette passanti per il punto P_0 ;
   $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
2. impostare il sistema tra l'equazione della conica e il fascio di rette appena trovato;
   $$\begin{cases} equazione\ della\ conica \\ y = y_0 + m \cdot (x - x_0) \end{cases}$$
3. sostituire alla variabile y nella 1ª equazione l'espressione della seconda, ottenendo così un'unica equazione di II grado nel parametro m.
4. Imporre che il discriminante Δ di tale equazione sia pari a 0. Si otterrà così un'equazione in m.
5. Risolvendo tale equazione , avremo i coefficienti angolari delle rette tangenti cercate.

QUADRO RIASSUNTIVO DELLA PARABOLA (asse // asse y)	
equazione in forma canonica	$y = ax^2 + bx + c$
equazione dell'asse	$x = -\frac{b}{2a}$
vertice	$V\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$
fuoco	$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{+1-\Delta}{4a}\right)$
equazione della direttrice	$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$
intersezione con l'asse y	$I_y(0;c)$
intersezioni con l'asse x	$I_{x1}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};0\right) \quad I_{x2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$

QUADRO RIASSUNTIVO DELLA CIRCONFERENZA	
equazione	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ opp. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$
centro	$C(x_0; y_0)$ $con \quad x_0 = -\frac{a}{2} \quad e \quad y_0 = -\frac{b}{2}$
raggio	$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$

QUADRO RIASSUNTIVO DELL'ELLISSE		
equazione in forma canonica	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
semiasse maggiore	a	
semiasse minore	b	
semidistanza focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	
vertici sull'asse x	*A'(-a; 0)*	*A (a; 0)*
vertici sull'asse y	*B'(0; -b)*	*B (0; b)*
centro	*O(0;0)*	
fuochi	*F'(-c; 0)*	*F (c; 0)*
eccentricità	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	
equazione esplicita	$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$	

QUADRO RIASSUNTIVO DELL'IPERBOLE		
equazione in forma canonica	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
semiasse trasverso	a	
semidistanza focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
vertici	*A'(-a; 0)*	*A (a; 0)*
centro	*O(0;0)*	
fuochi	*F'(-c; 0)*	*F (c; 0)*
asintoti	$y = -\frac{b}{a}x$	$y = +\frac{b}{a}x$
eccentricità	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	
equazione esplicita	$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$	