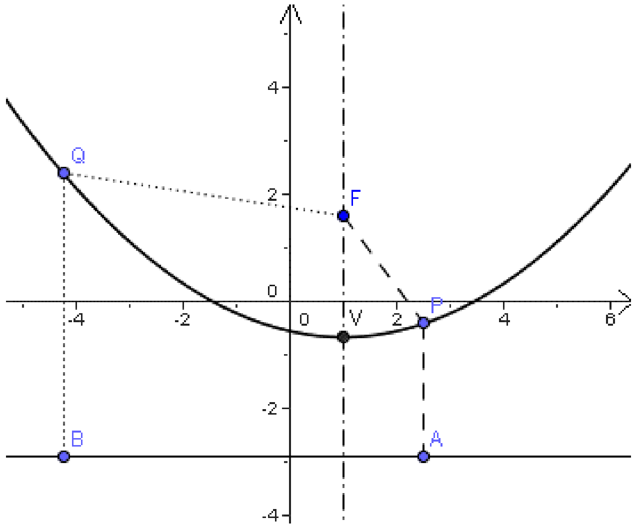
# Geometria Analitica – Domande, Risposte & Esercizi

## La parabola

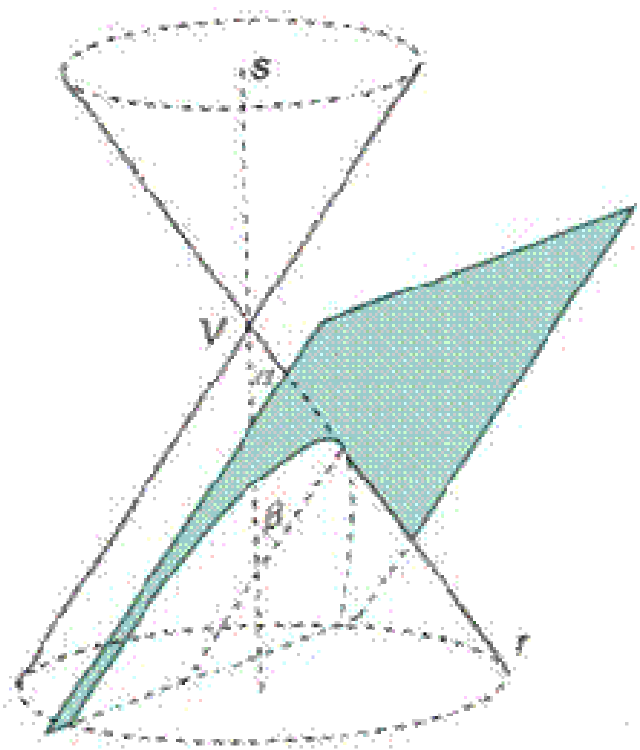
### 1. Dare la definizione di parabola come luogo di punti

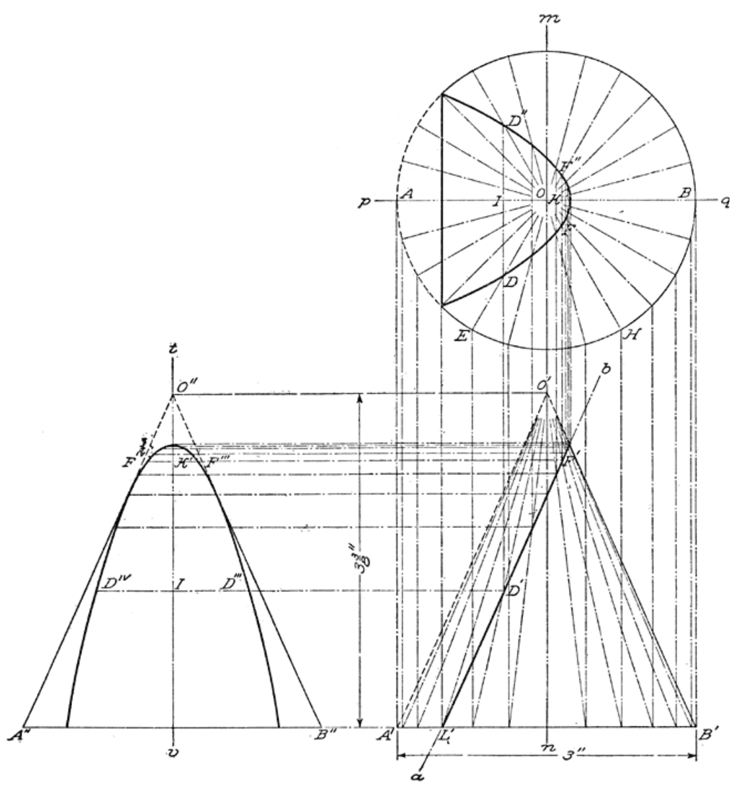
La parabola è un *luogo di punti*, è cioè un insieme di punti del piano che verificano tutti una stessa proprietà; la parabola è il luogo dei punti del piano *le cui distanze da un punto fisso F detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice sono uguali*. Con riferimento alla figura si ha $\overline{PF} = \overline{PA}$ e $\overline{QF} = \overline{FB}$ .




### 2. Come si ottiene la parabola come sezione conica?

Una parabola si può ottenere sezionando un cono con un piano parallelo ad una retta generatrice del cono stesso, come riportato in figura.

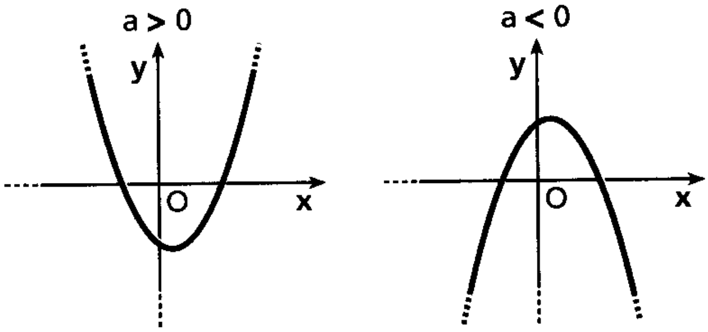


**3. Qual è l'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y?**
Si può vedere che l'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y delle ordinate è: $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

**4. Qual è il significato del primo coefficiente *a*?**
Il segno del primo coefficiente *a* dà informazioni sulla concavità o convessità della parabola:

- se $a > 0$ la parabola rivolge la concavità verso l'alto (*regge l'acqua*).
- se $a < 0$ la parabola rivolge la concavità verso il basso (*non regge l'acqua*).




**5. Qual è l'equazione dell'asse di simmetria della parabola?**
L'asse di simmetria della parabola è una retta verticale di equazione $x = -\frac{b}{2a}$

**6. Quali sono le coordinate del *vertice* della parabola?**
Il vertice della parabola è un punto V che si trova sull'asse e ha per coordinate $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$

**7. Quali sono le coordinate del *fuoco* della parabola?**
Il fuoco della parabola è un punto F che si trova sull'asse e ha per coordinate $F\left(-\frac{b}{2a};\frac{-\Delta+1}{4a}\right)$.

**8. Qual è l'equazione della *direttrice* della parabola?**
La retta direttrice è una retta orizzontale ed ha equazione $y = \frac{-\Delta-1}{4a}$ .

**9. Qual è *intersezione della parabola con l'asse y*?**
L'intersezione $I_y$ della parabola con l'asse y si ottiene risolvendo il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse y: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$, da cui si ottiene $I_y = (0;c)$

**10. Quali sono *le intersezioni della parabola con l'asse x*?**
Le intersezioni $I_{x1}$ e $I_{x2}$ della parabola con l'asse x si ottengono risolvendo il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione dell'asse x: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$, da cui si ottiene $I_{x1}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$ $I_{x2}\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$

## 11. Come si traccia il grafico della parabola?

Per tracciare il grafico della parabola si disegna in primo luogo l'asse, poi il vertice, si trovano ancora le intersezioni con l'asse y e con l'asse x. Si tenga presente che per ogni punto A della parabola trovato, esiste il simmetrico rispetto all'asse di simmetria, posto alla stessa altezza e a uguale distanza dall'asse, ma dalla parte opposta rispetto a questo.
Infine, se i punti trovati non fossero sufficienti, si ricavano altri punti con la tabella x-y e i loro simmetrici rispetto all'asse y.

## 12. Quali sono i casi particolari della parabola?

- Se $b = 0$ la parabola $y = ax^2 + c$ ha per asse l'asse $y$, di equazione $x = 0$.
- Se $c = 0$ la parabola $y = ax^2 + bx$ passa per l'origine.
- Se $b = c = 0$ la parabola $y = ax^2$ passa per l'origine e ha per asse l'asse $y$.

## 13. Data la retta di equazione $y = mx + q$ e la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto alla parabola e calcolare gli eventuali punti di intersezione.

**Svolgimento.** Per verificare se la retta è tangente, secante o esterna rispetto alla parabola è sufficiente impostare il sistema algebrico tra la retta e la parabola.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}.$$

Tale sistema si può risolvere per confronto: si ottiene un'equazione di II grado di cui si calcolerà il $\Delta$; potremo avere tre casi possibili:

a) se $\Delta > 0$ il sistema avrà due soluzioni distinte $\Rightarrow$ i punti di intersezione tra la parabola e la retta saranno due distinti $\Rightarrow$ la retta sarà **secante** la parabola;
b) se $\Delta = 0$ il sistema avrà due soluzioni coincidenti $\Rightarrow$ ci sarà un unico punto di intersezione tra la retta e la parabola $\Rightarrow$ la retta sarà **tangente** alla parabola;
c) se $\Delta < 0$ il sistema non avrà soluzioni reali $\Rightarrow$ non vi saranno punti di intersezione tra la parabola e la retta $\Rightarrow$ la retta sarà **esterna** alla parabola.

**Esempio numerico n° 1. Data la retta di equazione $x + y - 2 = 0$ e la parabola di equazione $y = x^2 - 2x$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto alla parabola e calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.**

Nel nostro caso impostiamo subito il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$ riporto la retta in forma esplicita:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x + 2 \end{cases}$$ eseguo il confronto tra i due secondi membri:

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x + x - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$ risolvo l'equazione di II grado:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 > 0$ Ne segue che la retta è secante.

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \\ y = -x + 2 \end{cases}$$ le soluzioni saranno due:

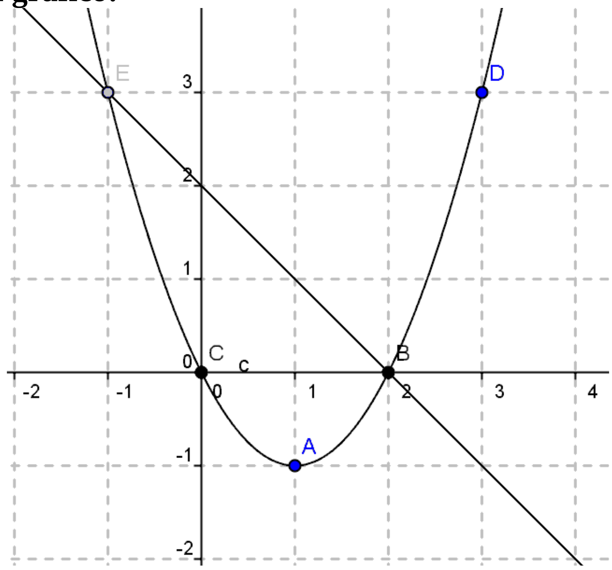
**A)** $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1 \\ y_1 = -x_1 + 2 = +1 + 2 = 3 \end{cases}$$

**B)** $\begin{cases} x_2 = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = +2 \\ y_2 = -x_1 + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases}$

I punti di intersezione A e B hanno allora coordinate:

$A(-1;3) \quad B(2\ ;\ 0)$

**Il grafico:**




**Esempio numerico n° 2. Data la retta di equazione $y = -2x + 14$ e la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 5$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto alla parabola e calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.**

Nel nostro caso impostiamo subito il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 5 \\ y = -2x + 14 \end{cases}$$

eseguo il confronto tra i due secondi membri:

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 = -2x + 14 \\ y = -2x + 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 5 + 2x - 14 = 0 \\ y = -2x + 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + 6x - 9 = 0 \\ y = -2x + 14 \end{cases}$$

risolvo l'equazione di II grado:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (+6)^2 - 4(-1)(-9) = 36 - 36 = 0$$

Ne segue che la retta è tangente alla parabola ed avremo un solo punto d'intersezione.

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ y = -2x + 14 \end{cases}$$

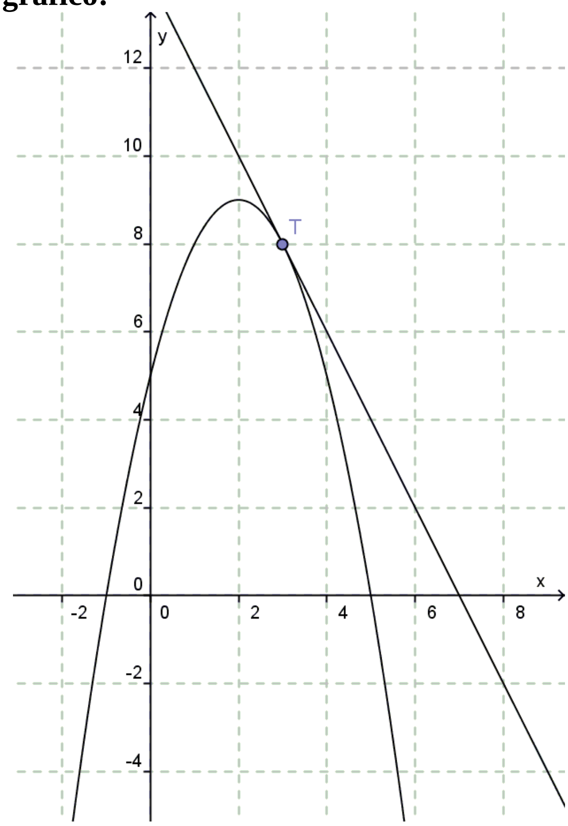
la soluzione è una sola:

T) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2x + 14 = -2 \cdot (3) + 14 = -6 + 14 = 8 \end{cases}$

Il punto di intersezione T ha allora coordinate:

$T(3;8)$

**Il grafico:**



**Esempio numerico n° 3. Data la retta di equazione $y=-2x+2$ e la parabola di equazione $y=x^2-8x+12$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto alla parabola e calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.**

Impostiamo subito il sistema:

$$\begin{cases} y=x^2-8x+12 \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

eseguo il confronto tra i due secondi membri:

$$\begin{cases} x^2-8x+12=-2x+2 \\ y=-2x+14 \end{cases}$$

trasporto a I membro:

$$\begin{cases} x^2-8x+12+2x-2=0 \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

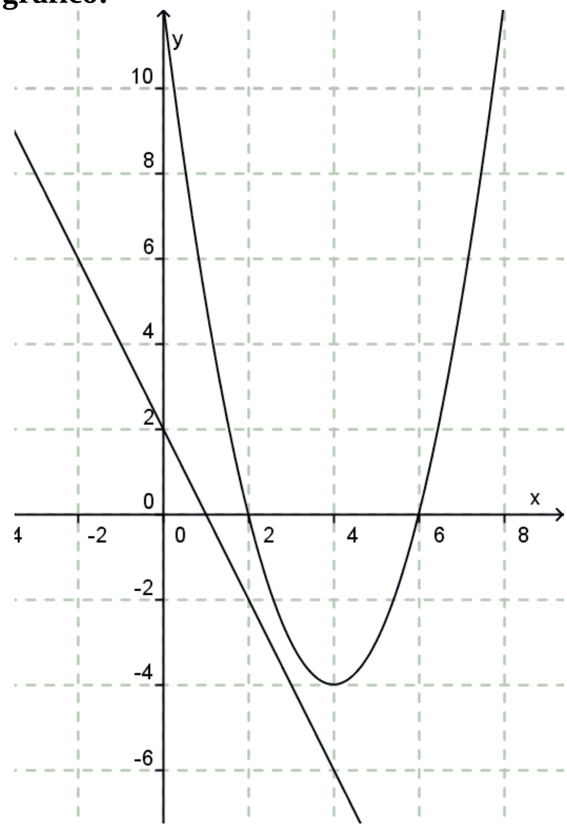
$$\begin{cases} x^2-6x+10=0 \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

risolvo l'equazione di II grado:

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(10)=36-40=-4<0$$

Ne segue che la retta è esterna rispetto alla parabola e quindi non avremo alcun punto d'intersezione.

**Il grafico:**




**Esempio numerico n° 4. Data la retta di equazione $x=1$ (retta verticale) e la parabola di equazione $y=-x^2+4$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto alla parabola e calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.**

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} y=-x^2+4 \\ x=1 \end{cases}$$

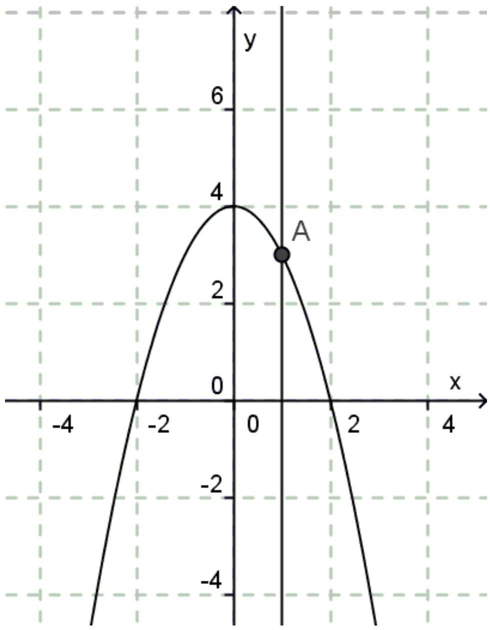
In questo caso, poiché la *x* è già nota (*x = 1*), per determinare la *y* basterà sostituire nella I equazione:

$$\begin{cases} y=-x^2+4=-(1)^2+4=-1+4=3 \\ x=1 \end{cases}$$

<u>Essendo la retta verticale, il punto di intersezione è uno solo</u> e ha per coordinate:

$A(1;3)$

**Il grafico:**



**14. Determinare l'equazione della parabola con asse verticale passante per i tre punti $A(1;3)$, $B(3;-1)$ e $C(4;0)$.**

L'equazione generale della parabola con asse parallelo all'asse y è $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

**A)** Imponendo la condizione di passaggio per il punto *A*, si ha:

$A(1;3) \in \textit{parabola} \Rightarrow 3 = a(1)^2 + b(1) + c$

$3 = a + b + c$ e quindi: $a + b + c = 3$

**B)** Imponendo la condizione di passaggio per il punto *B*, si ha:

$B(3;-1) \in \textit{parabola} \Rightarrow -1 = a(3)^2 + b(3) + c$

$-1 = 9a + 3b + c$ e quindi: $9a + 3b + c = -1$

**C)** Imponendo la condizione di passaggio per il punto *C*, si ha:

$C(4;0) \in \textit{parabola} \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + c$

$0 = 16a + 4b + c$ e quindi: $16a + 4b + c = 0$

Ora le tre condizioni precedenti vanno messe a sistema per determinare i valori *a*, *b* e *c*.

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = -1 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

Risolvo il sistema colla regola di Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 9 & 3 \\ 16 & 4 \end{matrix} =$$

$$= 3 + 16 + 36 - (48 + 4 + 9) = 55 - 61 = -6$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{matrix} =$$

$$= 9 + 0 - 4 - (0 + 12 - 1) = 5 - 11 = -6$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 9 & -1 \\ 16 & 0 \end{matrix} =$$

$$= -1 + 48 + 0 - (-16 + 0 + 27) = 47 - 11 = 36$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & -1 \\ 16 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & -1 \\ 16 & 4 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 9 & 3 \\ 16 & 4 \end{matrix} =$$

$$= 0 - 16 + 108 - (144 - 4 + 0) = 92 - 140 = -48$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} = \dfrac{36}{-6} = -6 \\ c = \dfrac{\Delta_c}{\Delta} = \dfrac{-48}{-6} = 8 \end{cases}$$

<u>L'equazione della parabola è $y = x^2 - 6x + 8$.</u>

Verifichiamo infine che i punti *A*, *B* e *C* appartengano effettivamente alla parabola trovata.

| $x$ | $y = x^2 - 6x + 8$ |
|---|---|
| 1 | $(1)^2 - 6(1) + 8 = 1 - 6 + 8 = 3$ |
| 3 | $(3)^2 - 6(3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$ |
| 4 | $(4)^2 - 6(4) + 8 = 16 - 24 + 8 = 0$ |

## 15. Quali sono le proprietà ottiche della parabola?

La parabola gode di un’importante proprietà ottica, detta **proprietà focale**: *“ogni raggio passante per il fuoco F si riflette in un raggio parallelo all’asse della parabola e, viceversa, ogni raggio parallelo all’asse della parabola si riflette nel fuoco F.”*

Se poniamo nel fuoco F della parabola una sorgente luminosa puntiforme e la “parete” interna della parabola è rivestita da materiale riflettente, ogni raggio luminoso che parte dal fuoco si riflette in un raggio perpendicolare alla direttrice, cioè parallelo all’asse della parabola. I fari delle automobili, tutti i fari in genere, le torce elettriche, vengono realizzati in base a questa proprietà.
È inoltre proprio per questo che il punto F viene chiamato *fuoco*. La retta *d* viene chiamata *direttrice* perché stabilisce la direzione dei raggi riflessi (tutti perpendicolari ad essa).

Viceversa, se dei raggi paralleli all’asse di una parabola vengono riflessi dalla superficie della parabola stessa, essi saranno tutti concentrati nel fuoco. Le ben note antenne *paraboliche*, i radiotelescopi, i telescopi a riflessione, i microfoni parabolici funzionano proprio in questo modo.

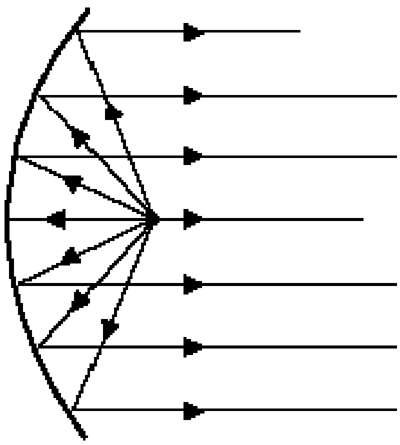


***fig. a: i raggi uscenti dal fuoco vengono riflessi dalla superficie della parabola tutti parallelamente all’asse***

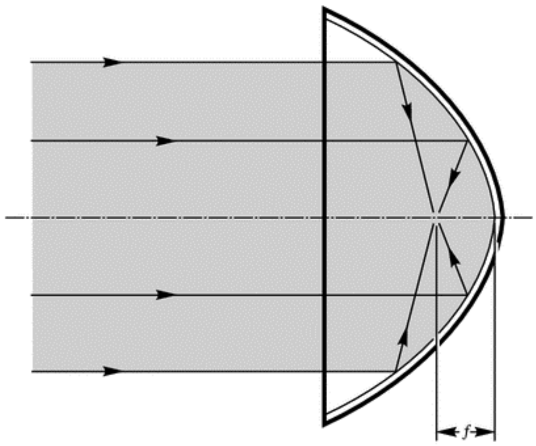



***fig. b: i raggi paralleli giungono sulla superficie della parabola da grande distanza e convergono nel fuoco***

*fig. c: Radiotelescopi*

*fig. d: Faretti*

*fig. e: Microfono Parabolico*