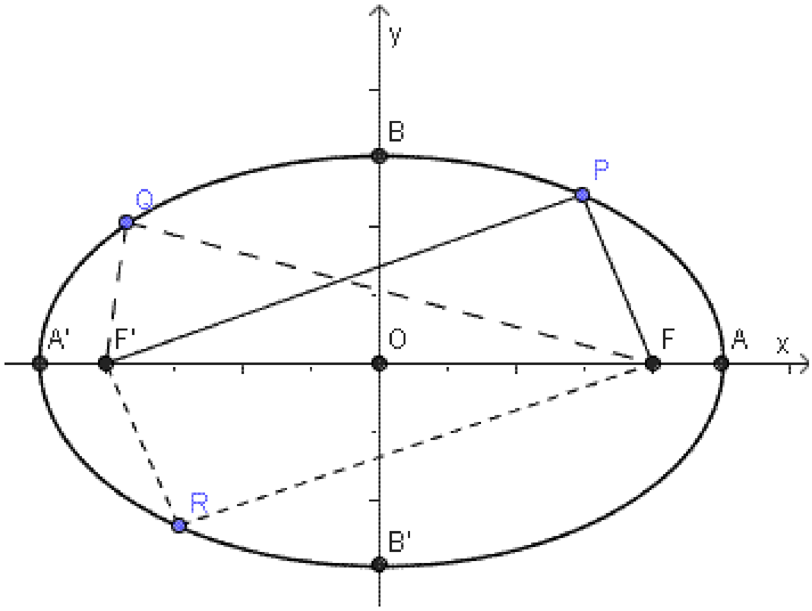
Geometria Analitica – Domande, Risposte & Esercizi

L'ellisse

1. Dare la definizione di ellisse come luogo di punti.

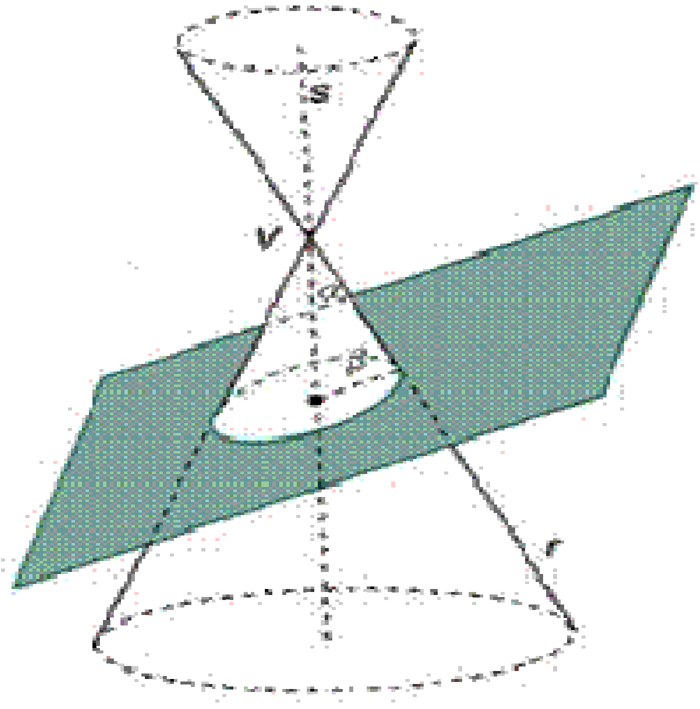
L'ellisse è un *luogo di punti*, è cioè un insieme di punti del piano *le cui distanze da due punti fissi F e F' detti fuochi, hanno somma costante (=2a).*

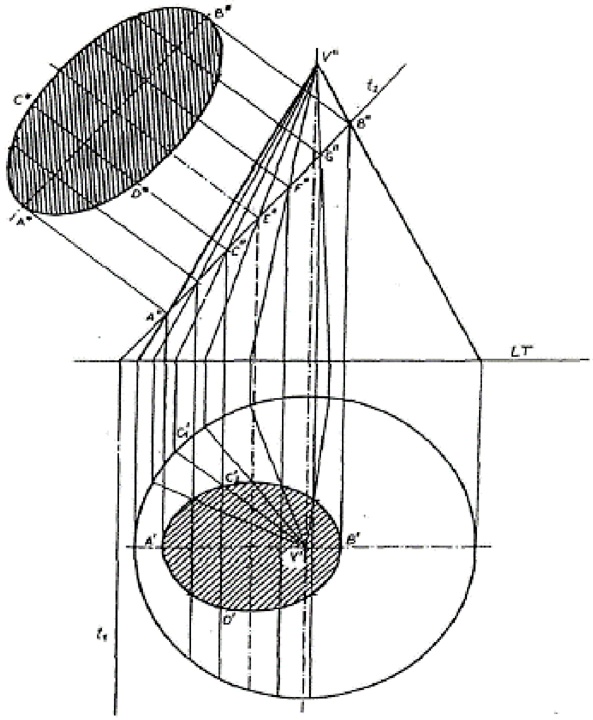
Con riferimento alla figura si ha $\overline{PF}+\overline{PF'}=\overline{QF}+\overline{QF'}=\overline{RF}+\overline{RF'}=costante$



2. Come si ottiene l'ellisse come sezione conica?

Consideriamo il cono circolare retto costituito dalle rette generatrici che con il suo asse formano un angolo di ampiezza α. Consideriamo poi un piano secante che forma un angolo β con l'asse del cono. Se si ha β > α la sezione ottenuta è un'ellisse.





3. Qual è l'equazione dell'ellisse in forma canonica?
L'equazione dell'ellisse in forma canonica (centro nell'origine e assi paralleli agli assi *x* e *y*) è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(Nella nostra analisi supponiamo $a > b$).

4. Quali sono le coordinate dei vertici dell'ellisse?
L'ellisse interseca gli assi coordinati *x* e *y* in 4 punti detti vertici; i vertici sull'asse *x* sono denominati *A* e *A'*; i vertici sull'asse *y* sono denominati *B* e *B'*; essi hanno coordinate:
A'(-a; 0), A (a; 0), B'(0; -b), B (0; b).

5. Quali sono le coordinate dei fuochi dell'ellisse?
I due fuochi *F* ed *F'* hanno coordinate:
F'(-c; 0) e *F (c; 0).*

6. Quale relazione matematica esiste tra i parametri *a, b* e *c*?
Tra i parametri a, b e c sussiste una relazione: $c^2 = a^2 - b^2$ oppure $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

7. Cosa sono gli assi e i semiassi dell'ellisse?
Il segmento *A'A* è detto *asse maggiore* dell'ellisse, di lunghezza *2a*; *OA* e *OA'* sono i *semiassi maggiori*, di lunghezza *a*. Analogamente, il segmento *B'B* è detto *asse minore* dell'ellisse, di lunghezza *2b*; *OB* e *OB'* sono i *semiassi minori*, di lunghezza *b*.

8. Che cos'è la semidistanza focale?
Il segmento *F'F* è detto *distanza focale;*i segmenti *OF'* e *OF*, di lunghezza *c*, rappresentano la *semidistanza focale* (distanza dei fuochi dal centro).

9. Che cos'è l'eccentricità dell'ellisse?
L'*eccentricità*, indicata con il simbolo *e*, misura lo schiacciamento dell'ellisse. Essa si definisce:

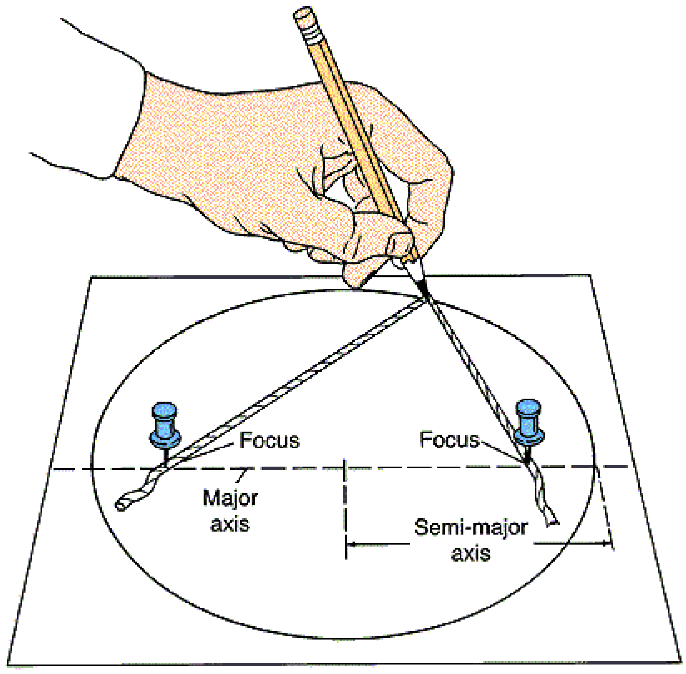
$$e=\frac{c}{a}$$

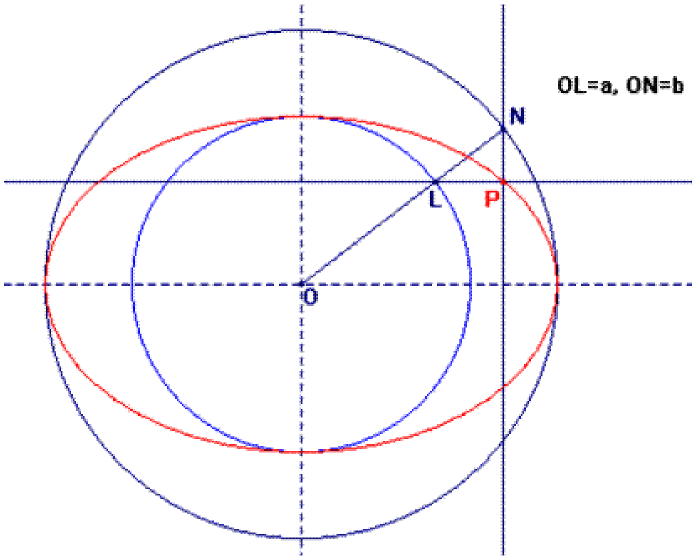
e per quanto detto prima risulta

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\ .$$

Poiché nell'ellisse risulta sempre $c < a$, l'eccentricità varia da 0 ad 1 ($0 \leq e < 1$).

10. Come si traccia il grafico dell'ellisse?
Le costruzioni geometriche più usate per tracciare il grafico dell'ellisse sono:
1. la *costruzione del giardiniere*, che fa uso di una cordicella inestensibile, di lunghezza *2a*, i cui estremi sono fissati ai fuochi;
2. la *costruzione delle due circonferenze* o del doppio ribaltamento, che si ottiene tracciando due circonferenze di raggi *a* e *b*.





costruzione del giardiniere ***costruzione delle due circonferenze o del doppio ribaltamento***

11. Quali sono le equazioni esplicite dell'ellisse?

L'equazione dell'ellisse in forma canonica non è esplicita nel senso che non è possibile ricavare in modo diretto da essa i valori della y a partire da valori assegnati della x.
Risolvendo l'equazione rispetto alla variabile y si ottengono le due equazioni esplicite:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

So osservi come le equazioni siano una da considerare con il segno +, per le y positive, nel I e II quadrante, e l'altra con il segno -, per le y negative, III e IV quadrante.

Come si può osservare, la variabile indipendente x non può assumere tutti i possibili valori, ma dev'essere:

$$-a \le x \le a \quad (\textit{Campo di esistenza dell'ellisse})$$

Analogamente si verifica per la variabile dipendente y:

$$-b \le y \le b \quad (\textit{Codominio dell'ellisse})$$

Da quanto detto sopra, il grafico dell'ellisse risulta compreso all'interno del rettangolo delimitato dai vertici A'-A e B'-B.

12. Come si traccia il grafico dell'ellisse attraverso l'equazione esplicita?

Per tracciare il grafico dell'ellisse, oltre alla costruzione attraverso il metodo delle due circonferenze, si possono seguire i seguenti passi:

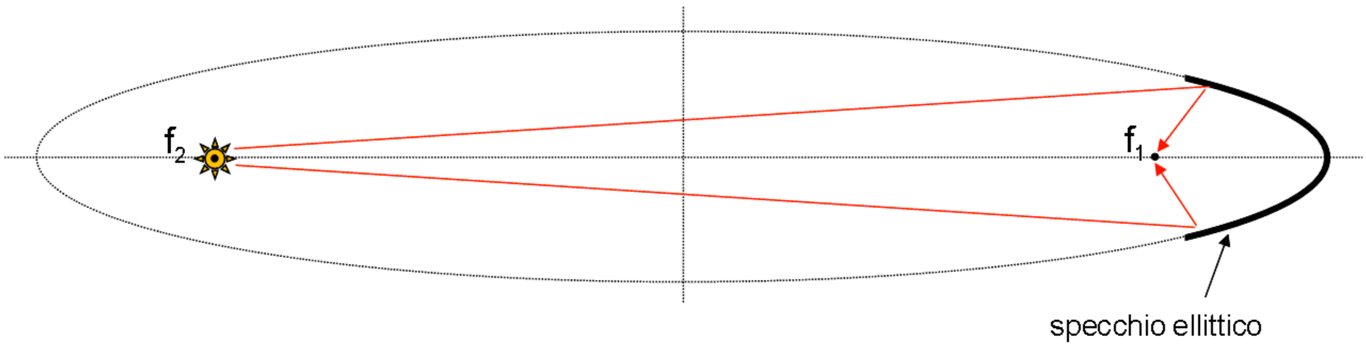
1) Si traccino sul piano cartesiano i vertici A, A', B e B'.
2) Utilizzando l'equazione esplicita, tramite la tabella x-y si ricavino vari punti in successione con ascissa x a partire da 0 e fino al valore a.

13. Qual è l'area delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

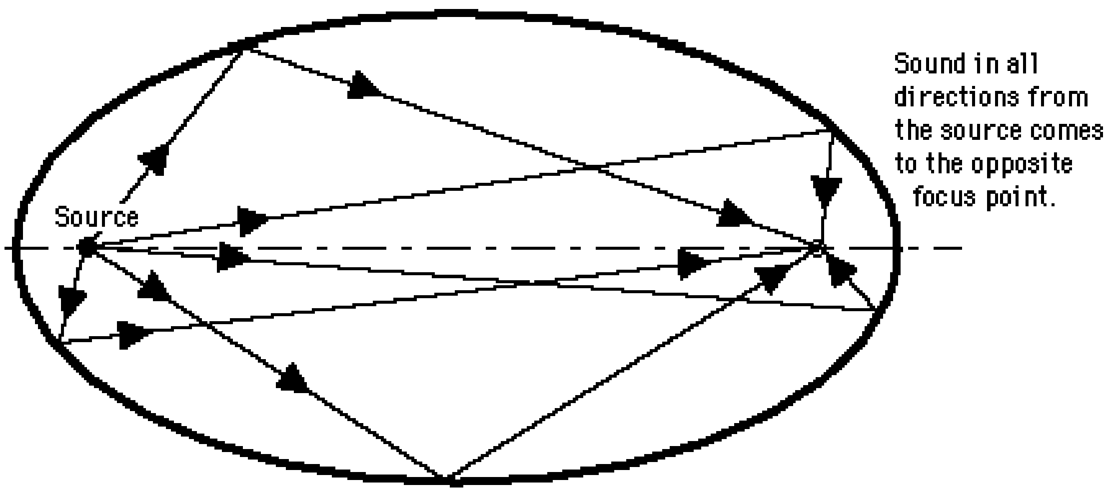
Si può vedere che l'area racchiusa dall'ellisse è pari a πab.

14. Quali sono le proprietà ottico-acustiche dell'ellisse?

L'ellisse ha interessanti proprietà ottico-acustiche. Supponiamo di avere uno specchio di forma ellittica: se si pone una sorgente di luce in uno dei due fuochi, tutti i raggi riflessi convergono nell'altro fuoco; questo ci dà una spiegazione del nome attribuito a tali punti *F*, *F'*.
Supponiamo adesso di essere in un ambiente di forma ellittica. Il suono emesso in uno dei due fuochi, anche se molto debole, si sente molto distintamente nell'altro fuoco. La spiegazione di tali fenomeni deriva dal fatto che in entrambi i casi sia le onde luminose che quelle sonore vengono riflesse dalle pareti e, percorrendo tutte la stessa distanza, giungono contemporaneamente (in fase) all'altro fuoco.



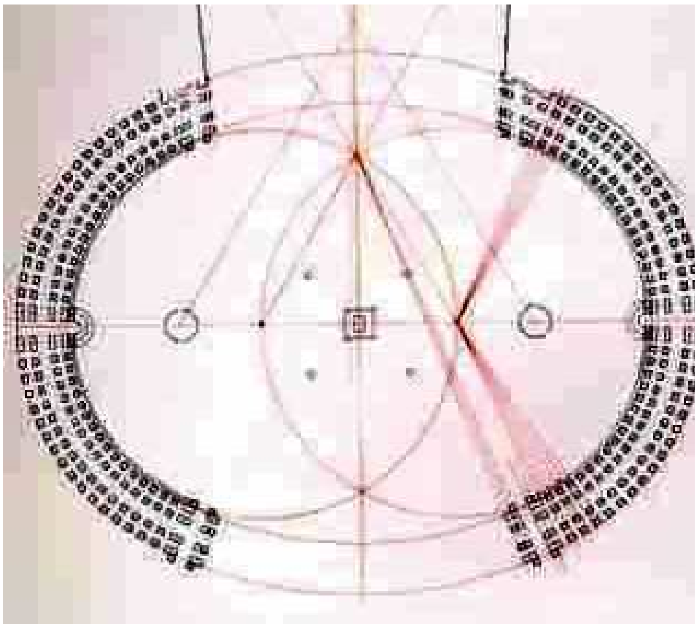
Uno specchio ellittico riproduce nel fuoco f_1 l'immagine di una sorgente puntiforme posta nel fuoco f_2



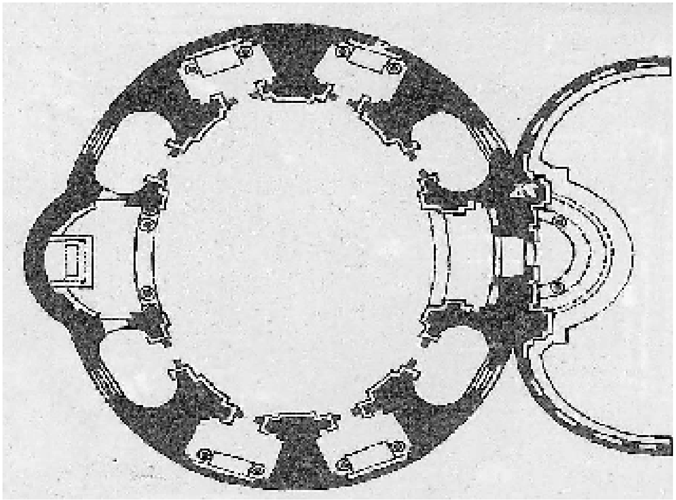
riflettore acustico ellittico

15. Ci sono esempi di ellissi nell'Architettura?

L'ellisse è una curva molto usata nell'architettura. L'esempio più famoso è senza dubbio il colonnato del Bernini in Piazza San Pietro a Roma. Sempre del Bernini, ricordiamo anche S. Andrea al Quirinale

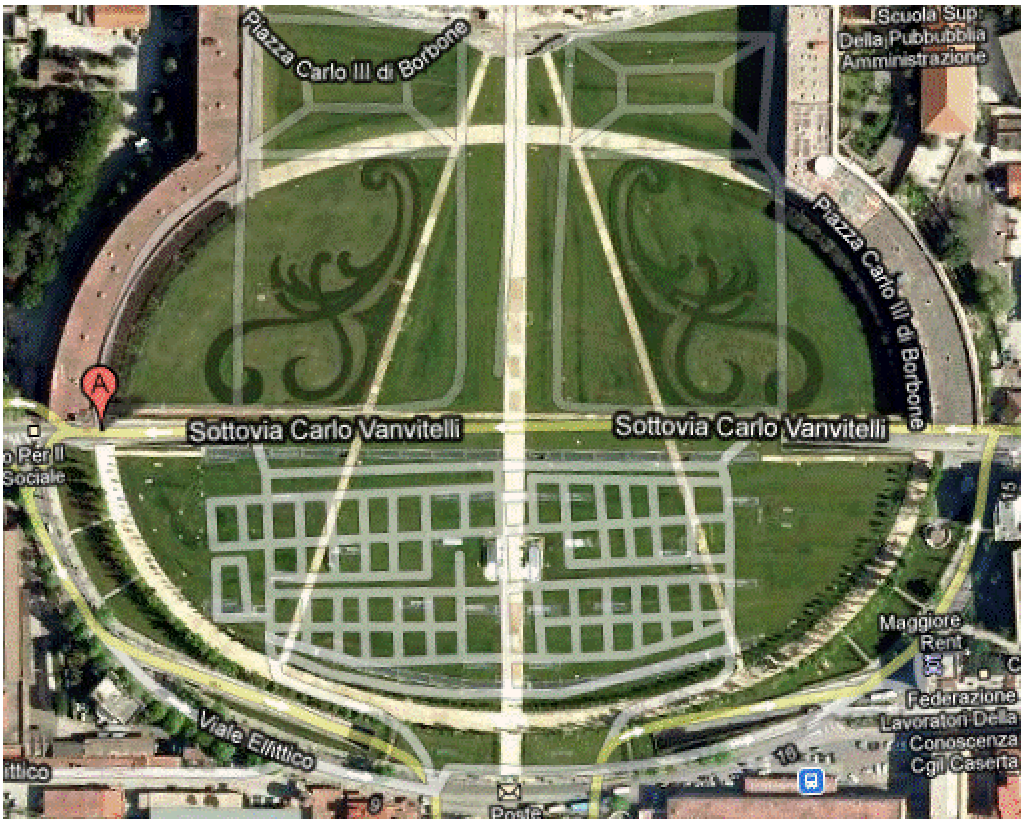


G.L. Bernini – Colonnato di Piazza San Pietro – Roma



G.L. Bernini – S. Andrea al Quirinale

Senza andare troppo lontano, ricordiamo infine il Viale Ellittico, nello spazio antistante la Reggia di Caserta.



Esercizio 1. Analisi dell'ellisse. **Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, determinare:**

a) **le coordinate dei vertici A', A, B', B;**
b) **le coordinate dei fuochi F', F;**
c) **l'eccentricità *e;***
d) **le due equazioni esplicite;**
e) **tracciare il grafico su carta millimetrata attraverso il metodo dei due cerchi.**

Svolgimento.

a) VERTICI

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

- $a^2=25 \Rightarrow a=5$
- $b^2=9 \Rightarrow b=3$
- $A(a;0)=A(5;0)$ • $A'(-a;0)=A'(-5;0)$
- $B(0;b)=B(0;3)$ • $B'(0;-b)=B(0;-3)$

b) FUOCHI

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$$

- $F(c;0)=F(4;0)$ • $F'(-c;0)=F'(-4;0)$

c) ECCENTRICITÁ

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

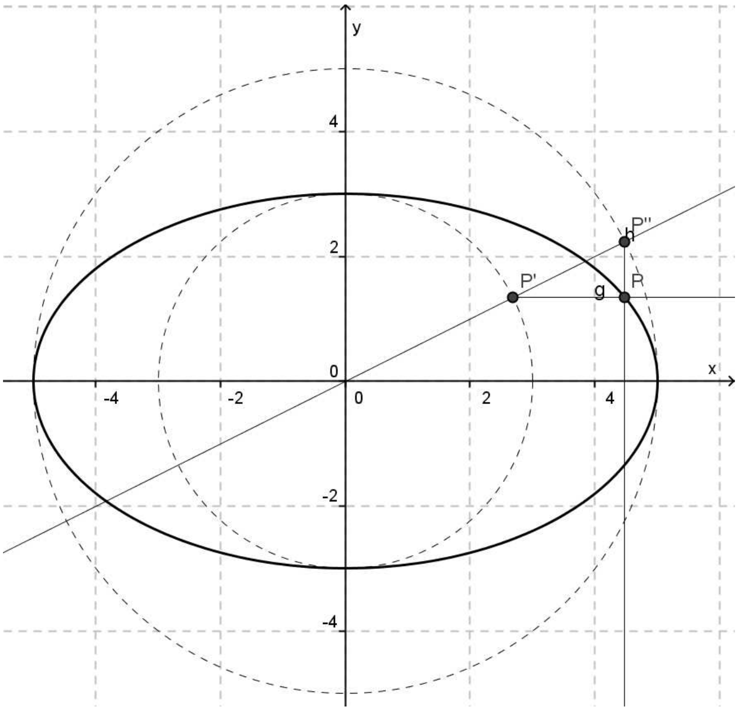
d) EQUAZIONI ESPLICITE

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$$

d) GRAFICO METODO 2 CIRCONFERENZE

Le due circonferenze vanno tracciati con centro in O(0;0) e raggi uguali ad *a = 5* quello più grande e *b = 3* quello più piccolo



Esercizio 2. Intersezione ellisse-retta. **Data la retta di equazione $y=mx+q$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto all'ellisse e calcolare gli eventuali punti di intersezione.**

Svolgimento. Per verificare se la retta è tangente, secante o esterna rispetto all'ellisse si possono seguire due strade: quella grafica e quella algebrica; nel primo caso è sufficiente tracciare sullo stesso piano cartesiano i grafici della retta e dell'ellisse ed osservare le posizioni relative, ricavando in maniera approssimativa le coordinate degli eventuali punti di intersezione.
Nel secondo caso, basta impostare il sistema algebrico tra la retta e l'ellisse.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+q \end{cases}.$$

Tale sistema si può risolvere per <u>sostituzione</u>: si ottiene un'equazione di II grado di cui si calcolerà il Δ; potremo avere tre casi possibili:

a) se Δ > 0 il sistema avrà due soluzioni distinte $\Rightarrow$ i punti di intersezione tra l'ellisse e la retta saranno due distinti $\Rightarrow$ la retta sarà **secante** l'ellisse;
b) se Δ = 0 il sistema avrà due soluzioni coincidenti $\Rightarrow$ ci sarà un unico punto di intersezione tra la retta e l'ellisse $\Rightarrow$ la retta sarà **tangente** all'ellisse;
c) se Δ < 0 il sistema non avrà soluzioni reali $\Rightarrow$ non vi saranno punti di intersezione tra l'ellisse e la retta $\Rightarrow$ la retta sarà **esterna** all'ellisse.

Esempio numerico 2a. Data la retta di equazione $x+y-2=0$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto all'ellisse e calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.

In primo luogo tracciamo sullo stesso piano cartesiano il grafico dell'ellisse e quello della retta.
L'ellisse è la stessa dell'esercizio precedente;
la retta va prima resa in forma esplicita:

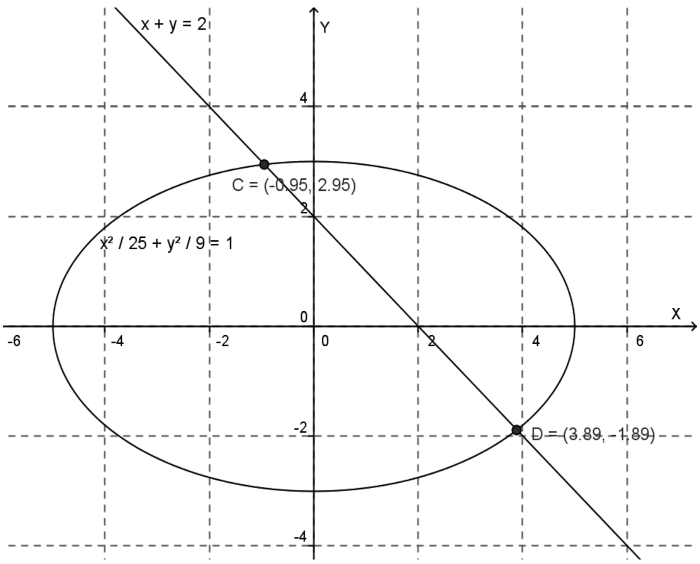
$$x+y-2=0$$

$$y=-x+2$$

Dalla tabella x-y se ne ricava poi il grafico.

Si può subito osservare che la retta è secante, producendosi 2 punti di intersezione.

Ecco il diagramma:



Calcoliamo adesso algebricamente i punti d'intersezione.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

sostituisco:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{(-x+2)^2}{9}=1 \\ y=-x+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{x^2-4x+4}{9}=1 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9x^2+25x^2-100x+100}{225}=\frac{225}{225} \\ y=-x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2+25x^2-100x+100-225=0 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34x^2-100x-125=0 \\ y=-x+2 \end{cases}$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-100)^2-4(34)(-125)=$$
$$=10000+17000=27000>0$$

Poiché il Δ è positivo, ne segue che <u>la retta è secante</u>.

$$\begin{cases} x_{1,2}=\frac{100\pm\sqrt{17000}}{2\cdot 34}=\frac{100\pm 130{,}384}{68} \\ y=-x+2 \end{cases}$$

Le soluzioni saranno due:

C) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{100-164{,}32}{68} = -\dfrac{64{,}32}{68} = -0{,}95 \\ y_1 = -x_1 + 2 = 0{,}95 + 2 = 2{,}95 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x_2 = \dfrac{100+164{,}32}{68} = \dfrac{264{,}32}{68} = 3{,}89 \\ y_2 = -x_2 + 2 = -3{,}89 + 2 = -1{,}89 \end{cases}$

I punti di intersezione C e D hanno allora coordinate:

$C(-0{,}95;\ 2{,}95)\quad D(3{,}89\ ;\ -1{,}89)$

Esempio numerico 2b. Data la retta di equazione $y = \frac{2}{3}x$ e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, verificare se la retta è tangente, esterna o secante rispetto all'ellisse e calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.

In primo luogo tracciamo sullo stesso piano cartesiano il grafico dell'ellisse e quello della retta.
Determiniamo i vertici dell'ellisse:

- $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$
- $b^2 = 36 \ \Rightarrow b = 6$
- $A(a;0) = A(10;0)$ • $A'(-a;0) = A'(-10;0)$
- $B(0;b) = B(0;6)$ • $B'(0;-b) = B(0;-6)$

Tracciamo così il grafico con il metodo delle due circonferenze.

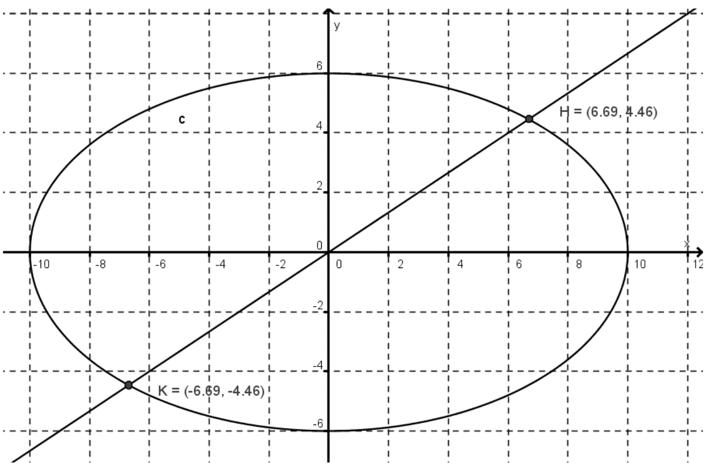
Il grafico della retta si trova con la solita tabella x-y:

x	y
-3	$\frac{2}{3}(-3) = -2$
0	$\frac{2}{3}(0) = 0$

x	y
3	$\frac{2}{3}(3) = 2$
6	$\frac{2}{3}(6) = 4$

Si può subito osservare che la retta è secante, producendosi 2 punti di intersezione.

Ecco il diagramma:



Calcoliamo adesso algebricamente i punti d'intersezione attraverso il sistema.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

sostituisco:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{\left(\dfrac{2x}{3}\right)^2}{36} = 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{\dfrac{4x^2}{9}}{36} = 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{4x^2}{9} \cdot \dfrac{1}{36} = 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{x^2}{81} = 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{81x^2 + 100x^2}{8100} = \dfrac{8100}{8100} \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} 181x^2 = 8100 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{8100}{181} \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\dfrac{8100}{181}} \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{8100}{181}} = \pm 6{,}69 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

Le soluzioni saranno due:

H) $\begin{cases} x_1 = +6{,}69 \\ y_1 = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}\cdot 6{,}69 = 4{,}46 \end{cases}$

K) $\begin{cases} x_1 = -6{,}69 \\ y_1 = \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}\cdot(-6{,}69) = -4{,}46 \end{cases}$

I punti di intersezione H e K hanno allora coordinate:

$H(6{,}69;\ 4{,}46)\quad K(-6{,}69\ ;\ -4{,}46)$

Esercizio 3. Determinazione dell'equazione dell'ellisse

a) Determinare l'equazione dell'ellisse avente per vertici i punti $A'(-7;0)\ A(7;0)\ B'(0;-2)\ B(0;2)$

b) Determinare l'equazione dell'ellisse avente per vertici i punti $A'(-6;0)\ A(6;0)$ e per fuochi i punti $C'(-4;0)\ C(4;0)$.

c) Determinare l'equazione dell'ellisse avente distanza focale *2c = 10* ed eccentricità *c = 0,75.*

<u>Svolgimento 3a</u>)
Dalla conoscenza dei 4 vertici ricaviamo subito i coefficienti *a* e *b*:

- $A'(-7;0)\ A(7;0) \ \Rightarrow\ a = 7$
- $B'(0;-2)\ B(0;2) \ \Rightarrow\ b = 2$

E quindi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ \frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$$

<u>Svolgimento 3b</u>)
Dalla conoscenza dei vertici *A'* e *A* ricaviamo subito il valore del coefficiente *a*:

$A'(-6;0)\ A(6;0) \ \Rightarrow\ a = 6$

Dalla conoscenza dei fuochi *F'* e *F* ricaviamo il valore di *c*:

$C'(-4;0)\ C(4;0) \ \Rightarrow\ c = 4$

Essendo $c=\sqrt{a^2-b^2}$, si eleva al quadrato e si ha:

$c^2 = a^2 - b^2$;

ricaviamo poi b^2 :

$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

e infine *b*:

$b = \sqrt{20} = 4{,}47$

L'equazione risulterà quindi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$$

<u>Svolgimento 3c</u>)
Poiché *2c* = 10 si ha *c = 5*

$e = 0{,}75$

Essendo $e=\frac{c}{a}$ si ricava

$a = \frac{c}{e} = \frac{5}{0{,}75} = 6{,}67$

Risulta poi:

$b^2 = a^2 - c^2 = 6{,}67^2 - 5^2 = 44{,}4 - 25 = 19{,}44$
$b = \sqrt{19{,}44} = 4{,}41$

L'equazione risulterà quindi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{19{,}44}=1$$