MANUALE DI GEOMETRIA

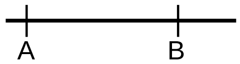
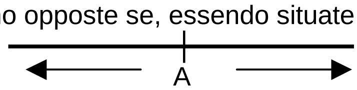
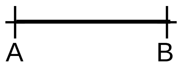
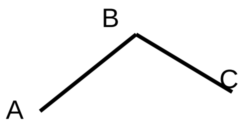
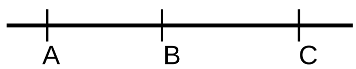
A cura di Valter Gentile

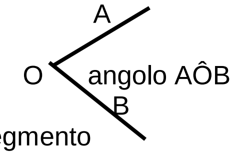
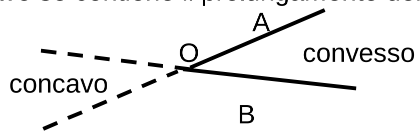
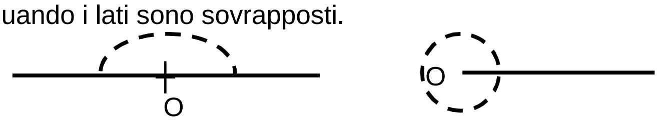
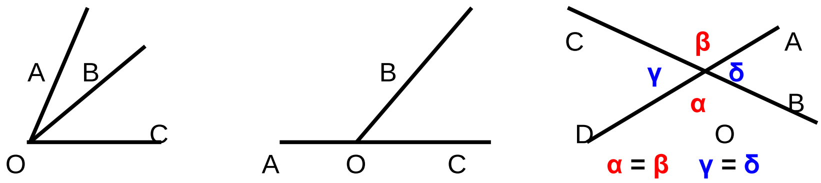
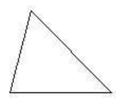
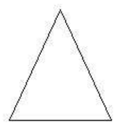
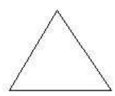
BiN
Biblioteca di Ingegneria
Università degli studi di Siena

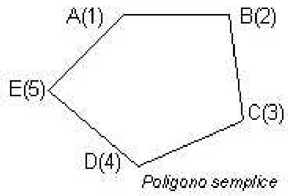
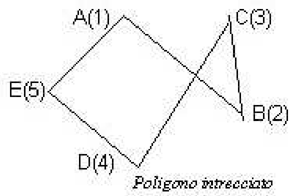
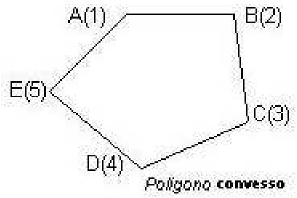
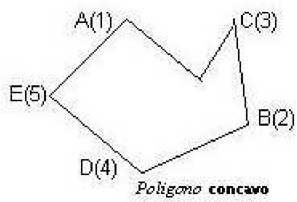
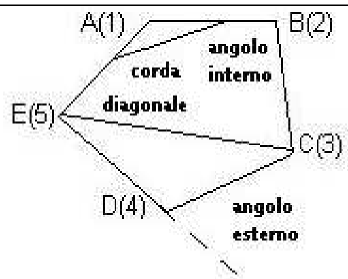
E-Notes pubblicata dalla Biblioteca Centrale di Ingegneria
Siena, 12 settembre 2006

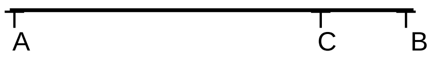
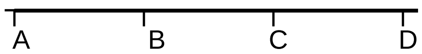
Indice

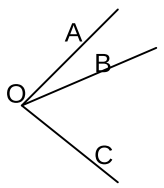
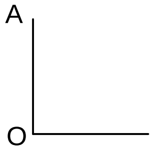
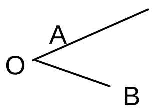
GEOMETRIA PIANA	**Concetti fondamentali. Segmenti, semipiani ed angoli. Triangoli. Poligoni. Uguaglianza e disuguaglianza dei segmenti**
LE FIGURE DEL PIANO	

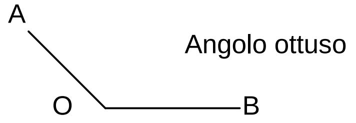
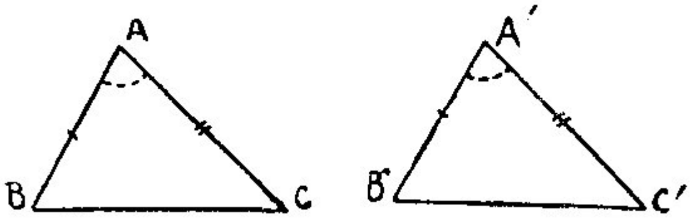
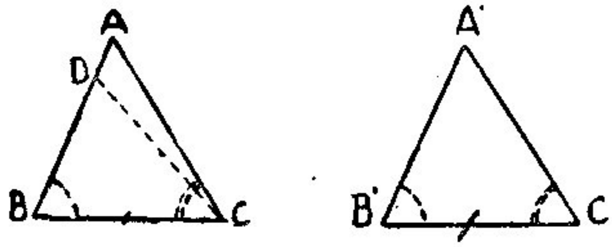
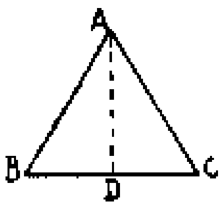
Concetti fondamentali	
Elementi della geometria :	gli elementi fondamentali della geometria sono il punto, la retta, il piano
Concetto di punto :	Ci si forma il concetto di punto, osservando corpi minutissimi (granello di sabbia); lo si rappresenta con un segno piccolissimo della matita sulla carta, lo si indica con una lettera maiuscola.
Concetto di retta :	Ci si forma il concetto di retta, osservando un filo teso, prolungato all’infinito da ambo le parti. Una retta si indica con una lettera dell’alfabeto minuscola, o con due lettere maiuscole indicanti due qualsiasi dei suoi punti.
Concetto di piano :	Ci si forma il concetto di piano osservando la superficie levigata di un tavolo, prolungata all’infinito da ogni parte. Un piano si indica con una lettera dell’alfabeto greco (α = alfa, β = beta etc…)
Definizione di spazio :	Dicesi spazio l’insieme di tutti i punti esistenti
Definizione di figura :	Si chiama figura geometrica un qualsiasi gruppo di punti
Definizione di geometria :	Si chiama geometria la scienza che tratta delle figure geometriche; geometria piana quella che tratta di figure costituite da punti di uno stesso piano; geometria solida, quella che tratta di figure costituite da punti non giacenti tutti sullo stesso piano , e cioè di figure nello spazio.
Postulato della retta :	per due punti distinti passa una retta ed una sola, i punti di una retta sono ordinati in due versi distinti, opposti l’uno all’altro, in modo che non v’è né un primo né un ultimo punto e che fra i due punti, vi sono infiniti punti intermedi.
Postulato del piano :	Data una retta qualsiasi di un piano, i punti del piano vengono da essa divisi in due gruppi o semipiani tali che : 1) ogni punto del piano appartiene all’uno o all’altro dei due semipiani 2) la retta che congiunge due punti situati in semipiani opposti incontra la retta data, in un punto compreso fra di essi, mentre la retta individuata da due punti situati nello stesso semipiano non ha in comune con la retta alcun punto compreso fra essi.
Definizione di semiretta :	Si chiama semiretta quella parte di retta costituita da un suo punto (origine) e dai suoi successivi in uno dei due versi segnati sulla retta  semiretta AB Due semirette si dicono opposte se, essendo situate sulla stessa retta, hanno versi opposti 
Segmenti, semipiani ed angoli	
Segmenti :	Chiamasi segmento la figura formata da due punti distinti (estremi) e da quelli della retta da essa determinata, che sono fra essi compresi  segmento AB
Segmenti consecutivi ed adiacenti :	Due segmenti si dicono consecutivi se hanno solo un estremo in comune o gli altri due da parti opposte; adiacenti se, oltre ad essere consecutivi giacciono su di una stessa retta.  segmenti consecutivi  segmenti adiacenti Osservazione: Se due segmenti non hanno estremi in comune possono trovarsi in tre posizioni diverse : 1) un estremo di uno è interno all’altro; in tal caso si dice che si separano 2) i punti di uno sono tutti interni all’altro e allora si dice che uno è interno all’altro 3) I punti di ciascuno sono estremi all’altro e allora si dice che uno è tutto esterno all’altro.
Semipiani ed angoli:	Si dice semipiano la figura costituita dai punti di una retta e dai punti del piano , che si trovano dalla stessa parte rispetto a quella della retta, la quale si dice contorno.

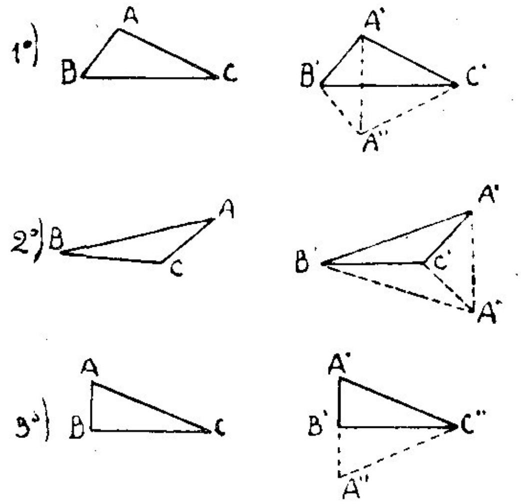
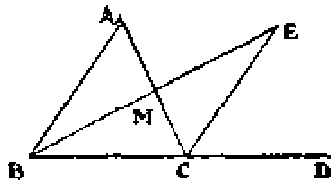
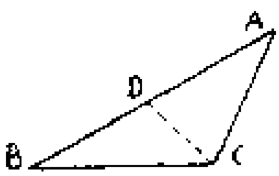
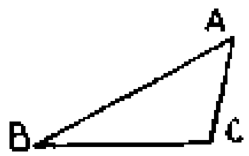
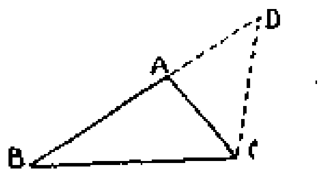
Angolo:	Si dice angolo una delle due parti in cui viene diviso il piano da due semirette uscenti da uno stesso punto; oppure Si dice angolo l'insieme dei punti comuni a due semipiani i cui contorni si incontrano in un punto detto vertice, mentre le semirette che lo limitano si dicono lati.  Osservazione : 1) Un angolo si può considerare generato dalla rotazione di una semiretta attorno ad un punto 2) Due punti interni ad un angolo sono estremi di un segmento tutto interno all'angolo, mentre un segmento che congiunge un punto interno con un punto esterno incontra certamente uno dei lati dell'angolo 3) Una retta passante per il vertice e per un punto interno ad un angolo lascia i lati da parti opposte, mentre una retta passante per il vertice e per un punto esterno, lascia i lati dalla stessa parte.
Angolo convesso e concavo:	Un angolo dicesi convesso se non contiene il prolungamento dei suoi lati; Un angolo dicesi concavo se contiene il prolungamento dei suoi lati 
Angolo piatto e giro:	Un angolo si dice piatto quando i suoi lati sono semirette opposte; giro quando i lati sono sovrapposti.  angolo piatto angolo giro
Angoli consecutivi, adiacenti, opposti al vertice:	Due angoli si dicono: 1) consecutivi quando hanno un lato in comune e gli altri due da parti opposte rispetto a questo lato; 2) adiacenti quando, oltre ad essere consecutivi hanno gli altri due lati sulla stessa retta e opposti; 3) opposti al vertice quando i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro; due angoli opposti sono congruenti.  Angoli consecutivi angoli adiacenti angoli opposti al vertice
Triangoli	
Definizione I^	Dicesi triangolo la figura costituita dai punti comuni a tre semipiani i cui contorni abbiano a due a due un punto in comune. I punti si dicono vertici e i segmenti che congiungono questi punti due a due, si dicono lati.
Definizione II^	Un vertice ed un lato si dicono opposti quando non si appartengono.
Definizione III^	Un angolo si dice interno ad un triangolo quando i suoi punti sono tutti interni al triangolo
Classificazione dei triangoli rispetto ai lati	**Scaleno** se ha tutti i lati disuguali  **Isoscele** se ha due lati uguali  **Equilatero** se ha tutti i lati uguali 

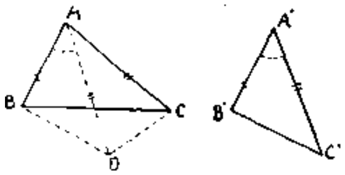
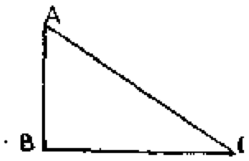
Poligoni		
Poligonale	Dicesi poligonale una figura costituita da n punti di un piano (vertici), dati in un determinato ordine in guisa che tre consecutivi non siano collineari, e dai segmenti(lati), che congiungono ognuno di questi punti col suo consecutivo, intendendo per consecutivo dell'ultimo il primo.	
Poligono	Dicesi poligono la figura formata dai punti di una poligonale e dai punti del piano da essa racchiusi; oppure si chiama poligono l'insieme dei punti comuni ad n semipiani , costituiti da n rette determinate da n punti di un piano considerati due a due.	
Definizione I^	Un poligono si dice semplice se due lati qualsiasi non si incontrano nei vertici; intrecciato in caso contrario.	 
Definizione II^	Un poligono semplice si dice convesso se si trova tutto in una stessa falda rispetto a ciascuna delle rette, che contengono ciascuno dei lati; concavo in caso contrario.	 
Definizione III^	Un poligono convesso si dice regolare se tutti i lati e tutti gli angoli sono eguali tra loro.	
Definizione IV^	Dicesi contorno la figura formata dai punti dei lati; perimetro la somma dei lati.	
Definizione V^	Si chiama corda un segmento che congiunge due punti del contorno; diagonale una corda che congiunge due vertici non consecutivi.	
Definizione VI^	Si dice angolo interno un angolo formato da due lati e situato dalla stessa falda del poligono, rispetto ad un lato; angolo esterno quello adiacente ad un angolo interno.	
Uguaglianza e disuguaglianza dei segmenti		
Segmenti uguali	Se due segmenti sono tali che con un movimento si riesce a sovrapporre ogni punto dell'uno ad ogni punto dell'altro, si dice che i due segmenti sono uguali. *Postulato.* Due segmenti eguali si possono far corrispondere punto per punto in modo che ad ogni segmento contenuto nell'uno corrisponda un segmento eguale contenuto nell'altro. L'eguaglianza dei segmenti gode delle tre proprietà fondamentali dell'eguaglianza e cioè : la proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.	

Segmenti disuguali	Un segmento a si dice maggiore di un altro b (a > b) quando b è uguale ad una parte di a; in questo caso b si dice minore di a (b < a) *Postulato.* Dati due segmenti a e b fra di essi interviene sempre una delle tre relazioni a > b ; a = b ; a < b .
Operazioni sui segmenti **Somma**	Dicesi somma di due segmenti quel segmento che si ottiene portando sopra una determinata retta due segmenti consecutivi rispettivamente uguali ai segmenti dati  AC = AB + BC Dicesi somma di più segmenti il segmento che si ottiene sommando il primo col secondo, il risultato col terzo e così di seguito. La somma di più segmenti gode delle proprietà fondamentali della somma e cioè: commutativa, associativa e dissociativa.
Differenza	Si chiama differenza di due segmenti quel segmento che, sommato col minore, dà per risultato il maggiore  AC = AB – CB perché AC + CB = AB
Moltiplicazione	Dicesi multiplo di un segmento dato, secondo un numero dato o prodotto di un segmento per un numero, la somma di tanti segmenti eguali al dato quante sono le unità del numero.  AD = AB x 3 AD multiplo di AB secondo 3
Divisione	Un segmento dicesi sottomultiplo di un altro o quoto di un altro per un numero, se questo è multiplo del primo. AB : m = CD se CD x m = AB

	Uguaglianza delle figure piane	
Concetti fondamentali	Si dice che fra due piani esiste una eguaglianza quando si può stabilire tra i punti dei due piani una corrispondenza tale che: 1) Ad ogni punto dell'uno corrisponda un determinato punto dell'altro (corrispondenza biunivoca). 2) Ad ogni segmento dell'uno corrisponda un segmento uguale dell'altro. Due figure si dicono eguali od omologhe quando sono figure corrispondenti di due piani fra i quali si è stabilità un'uguaglianza. Se due figure sono eguali esiste un movimento che porta a coincidere ogni punto dell'uno con ogni punto dell'altro. L'uguaglianza delle figure gode delle tre proprietà fondamentali dell'uguaglianza e cioè: riflessiva, simmetrica e transitiva.	
	Uguaglianza e disuguaglianza degli angoli	
Angoli uguali	Due angoli si dicono eguali quando si corrispondono in una eguaglianza fra i loro piani, cioè quando esiste un movimento per mezzo del quale si può far sovrapporre ogni punto dell'uno ed ogni punto dell'altro. L'uguaglianza degli angoli gode delle tre proprietà fondamentali dell'uguaglianza. *Teorema* . Dato un angolo ed un semipiano esiste uno ed un solo angolo eguale al dato e avente un lato sopra una semiretta assegnata. Si dimostra facilmente col concetto di eguaglianza.	
Angoli disuguali	Un angolo si dice maggiore di un altro quando questo è uguale ad una sua parte. Dati due angoli **α** e **β**, fra di essi esiste una ed una sola delle tre relazioni: **$\alpha > \beta$; $\alpha = \beta$; $\alpha < \beta$**	
Operazioni sugli angoli	*Somma.* La somma di due o più angoli è quell'angolo che si ottiene costruendo tanti angoli consecutivi, rispettivamente eguali agli angoli dati. La somma di più angoli gode delle proprietà commutativa, associativa, dissociativa.	 AÔC = AÔB + BÔC
	Differenza. La differenza di due angoli è quell'angolo che sommato al secondo, dà per risultato il secondo	
	Moltiplicazione. Dicesi multiplo di un angolo secondo un numero dato o prodotto dell'angolo per il numero, quell'angolo eguale alla somma di tanti angoli eguali al dato, quante sono le unità del numero.	
	Divisione. Un angolo dicesi sottomultiplo di un altro o quotodell'angolo per un numero, se questo è multiplo del primo.	
	Bisettrice di un angolo. Si chiama bisettrice di un angolo quella semiretta, che, partendo dal vertice, divide l'angolo in due parti eguali.	
	Angolo retto. Si chiama angolo retto la metà di un angolo piatto.	 Angolo retto
	Angolo acuto. Un angolo si dice acuto quando è minore dell'angolo retto.	 Angolo acuto

	Angolo ottuso. Un angolo si dice ottuso quando è maggiore dell'angolo retto, ma minore dell'angolo piatto. 
	Angoli supplementari. Due angoli si dicono supplementari quando la loro somma è un angolo piatto. Due angoli adiacenti sono supplementari.
	Angoli complementari. Due angoli si dicono complementari quando la loro somma è un angolo retto.
Triangoli	
Eguaglianza	*Definizione.* Due triangoli si dicono eguali quando hanno ordinatamente eguali tutti gli angoli e tutti i lati.
Primo criterio di egualianza	**Teorema.** Due triangoli sono eguali se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso. Ip. : A B = A' B' A C = A' C BAC = B'A'C T.: ABC= A'B'C Infatti tra i piani contenenti i due triangoli (piani che si possono anche considerare sovrapposti) si può stabilire una uguaglianza tale che in essa il punto A corrisponda al punto A' e la retta A B alla retta A B', per cui essendo B A C '= B' A' C, la retta A O coinciderà con la retta A' C e, poiché A B = A'-B' e A C = A' C' il punto B coinciderà con B' e C con C. Dunque tutto il triangolo A B C coinciderà con il triangolo *A.'* B' C'. 
Secondo criterio di eguaglianza.	**Teorema.** Due triangoli sono eguali se hanno ordinatamente eguali due angoli e il lato da essi compreso. Ipotesi: BC=B'C B = B' C = C' Tesi: ABC = A'B'C Si dimostra come il precedente o per assurdo.  *Corollario* .° Gli angoli alla base di un triangolo isoscele so no eguali. Ipotesi: A B = A C Tesi: A B C = A C B Infatti esiste un movimento, ossia una corrispondenza di eguaglianza, per cui A B coincide con A C e A O con A B perciò B C coincide con CB e quindi ABC con ACB.  *Corollario* 2.° Se un triangolo ha due angoli eguali, i lati op posti a questi angoli sono pure eguali. Si dimostra come il precedente.

Terzo criterio di eguaglianza.	Due triangoli sono eguali se hanno i tre lati ordinatamente uguali. Ipotesi: AB = A'B' AC = A'C BC=B'C Tesi: ABC = A'B'C  Si dimostra costruendo un triangolo B' A" C = A B C, dalla parte opposta del triangolo A' B' C e congiungendo A' con A". Dalla considerazione dei triangoli isosceli B' A' A" e O' A' A", che ne risultano si deduce che gli angoli A' e A" sono angoli alla base di un triangolo, isoscele (3° caso) oppure somma o differenza di angoli alla base di triangoli isosceli (1° o 2° caso), Questi angoli sono perciò eguali, per cui si ricade nel primo criterio di eguaglianza.
Quarto criterio di eguaglianza.	Due triangoli sono eguali se hanno ordinatamente uguali due angoli e il lato opposto a uno di essi. Si dimostra per assurdo tenendo conto del teorema sulle proprietà generali del triangolo.
Proprietà generali 	**Teorema 1.°** In un triangolo un angolo esterno (formato da un lato e dal prolungamento di un altro lato) è sempre maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti. Ipotesi: ACD angolo esterno BAC angolo Interno Tesi: ACD> BAC Si dimostra congiungendo il punto di mezzo M del lato A C col vertice B e prolungando il segmento BM di un segmento M E = B M. Il triangolo MEO = AB M per il 1° criterio, per cui MCE = BAM. E poich é O E è interno ad ACD, sarà ACD> BAC *Corollario.* La somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti.
	**Teorema 2.°** Se in un triangolo due lati sono disuguali, a lato maggiore sta opposto angolo maggiore. Ip.:AB>AC T.:ACB>ABC Per la dimostrazione si costruisce AD = AC; si considera il triangolo ADC il quale ha A D = A 0 per cui A D C = A C D. Ma ADC è esterno rispetto al triangolo B D C, perciò A D C> A B C. Allora anche A C D > A B C e quindi a maggior ragione, ACB <ABC.
	**Teorema 3.°** (Inverso del precedente). Se in un triangolo due angoli sono disuguali, ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore. Ip.: ACB>ABC T.: AB>AC Si dimostra per assurdo, facendo notare che, negando la tesi, si deve negare il teorema precedente, già dimostrato.
	**Teorema 4.°** In ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. T.: BC<BA+AC AB>BC — AC Per la dimostrazione della prima parte della tesi si prolunga, il lato BA di un segmento AD = AC; si considera il triangolo ADO isoscele, per cui ADC = ACD. Allora nel triangolo BCD, sarà BCD>BDC, per cui, per il teorema 3°, si può dire BD> BC ossia BC<BA+ADe cioè BC < B A + AC. Per la seconda parte della tesi basta sottrarre dai due membri della disuguaglianza, che rappresenta la, prima parte, il segmento AC; si ottiene allora AB <DC — AC.

	**Teorema 5.°** Se due triangoli hanno due lati dell'uno rispettivamente eguali a due lati dell'altro, e l'angolo compreso disuguale, i terzi lati sono disuguali, e ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore. I p . : A B = A'B' AC=A'C BAC >B'À'C T.: BC> B'C' Per la dimostrazione si conduce, a partire dal punto A. una semiretta formante col lato AB, non maggiore di AC, un angolo eguale a B'A'C, e su di essa si prende A D = A' C'. Il triangolo B A D sarà eguale al triangolo B' A' C (primo criterio), per cui BD = B'C; inoltre ADC è isoscele, per cui ADC = ACD; quindi B D C> B C D. Per il teorema 3° è, dunque, B C> B D ossia B C > B' C.
	Teorema 6.° Se due triangoli hanno due lati eguali e il terzo disegual hanno pure diseguali gli angoli opposti a questi lati, ed a lato maggiore sta opposto angolo maggiore. È il teorema inverso del precedente e perciò si dimostra facilmente per assurdo.
Triangoli rettangoli	**Rette perpendicolari**. Due rette, che si tagliano, si dicono *perpendicolari* quando formano quattro angoli eguali e quindi retti. **Teorema.** Per un punto passa una retta ed una sola perpendicolare ad una retta data.
 **AB, BC cateti CA ipotenusa**	**Definizione.** Un triangolo si dice ***rettangolo*** quando ha un angolo retto. Si chiamano *cateti* i lati che comprendono l'angolo retto, *ipotenusa* il lato opposto a l'angolo retto. **Teorema.** L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è sempre maggiore di ciascuno dei cateti. AC> AB e BC Si può considerare corollario del teorema 3° sulle proprietà generali dei triangoli.

Criteri di uguaglianza dei triangoli rettangoli.

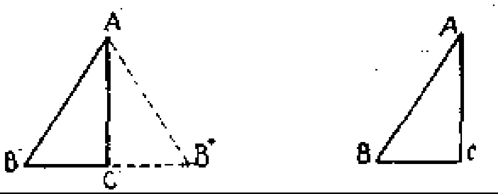
I criteri di eguaglianza dei triangoli rettangoli si possono riassumere nel seguente

Teorema: due triangoli rettangoli sono eguali se hanno ordinatamente uguali:

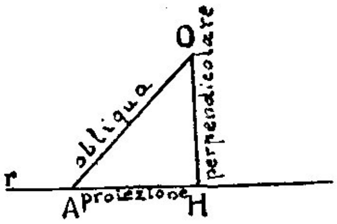
a) *i cateti,* oppure
b) *un cateto e un angolo acuto,* oppure
c) *l'ipotenusa e un angolo acuto,* oppure
d) *l'ipotenusa e un cateto.*

Il primo caso si può considerare un corollario del primo criterio di uguaglianza, dei triangoli in generale ; il secondo e il terzo caso sono corollari del secondo criterio.

Per dimostrare il quarto caso, considerando eguali le ipotenusa AB e A'B', e i cateti AC e A'C; si prolunga il lato B'C di un segmento CB" = CB; il triangolo A'CB" è uguale al triangolo ABC (1° crite rio), perciò A'B" = AB, da cui A'B' = A'B". Allora il triangolo ABB ' si può dire isoscele, quindi B' = B", e, poiché B" = B sarà pure B' = B; si ricade così nel terzo caso di eguaglianza.

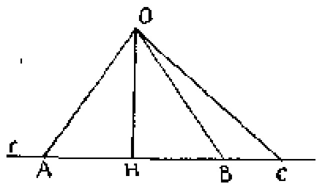


Applicazioni



Perpendicolari ed oblique.

Definizioni. Data una retta *r* ed un punto O fuori di essa, si chiama *perpendicolare* alla retta *r* per il punto O il segmento di questa perpendicolare compreso fra O ed r. Si chiama *piede della perpendicolare* il suo punto d'incontro con la retta ; si chiama *obliqua* qualunque altro segmento che congiunge il punto dato con qualsiasi altro punto della retta : piede *dell'obliqua* il suo punto d'incontro con la retta e *proiezione dell'obliqua*, sulla retta data il segmento compreso fra il piede della perpendicolare il piede dell'obliqua.

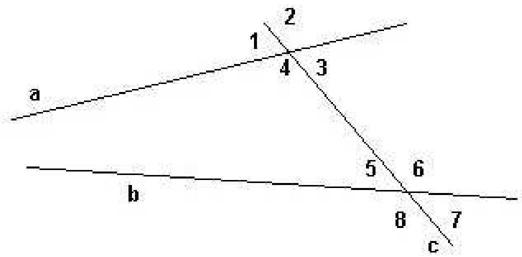
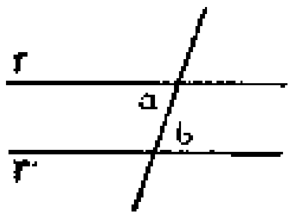
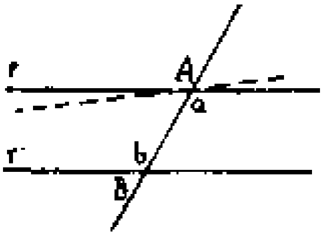
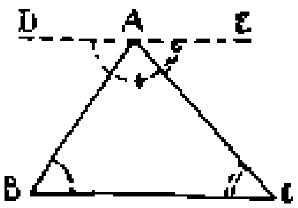


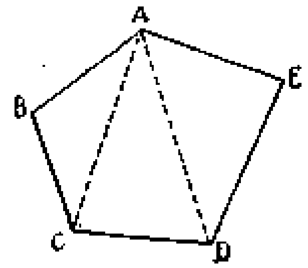
Teorema. Data una retta e un punto fuori di essa:
1° la perpendicolare, abbassata dal punto sulla re tta, è minore di ogni obliqua;
2° se due oblique hanno proiezioni eguali sono egua li e viceversa;
3° se due oblique sono disuguali è maggiore quella che ha proiezione maggiore e viceversa.
Ipotesi : $OH \perp r$ O A, O B, OC oblique O A = O B H C > H A e d i H B
Tesi : OH<OA HA = HB OC>OB

La prima parte della tesi è conseguenza del teorema sui triangoli rettangoli (l'ipotenusa è maggiore di un cateto). Per dimostrare la seconda parte si considerano i triangoli rettangoli AOH e BOH eguali per il 4° criterio, da cui si deduce che HA. = HB. Per dimostrare la terza, parte si considera il triangolo OBC, in cui l'angolo OBC è ottuso ed OCB acuto, perciò. per il 3° teorema sullo proprietà generali, sarà OC> OB. I teoremi inversi si dimostrano tutti per assurdo.

Definizione. Si chiama *distanza* di un punto da una retta la lunghezza, della perpendicolare condotta da quel punto alla retta.

I Poligoni

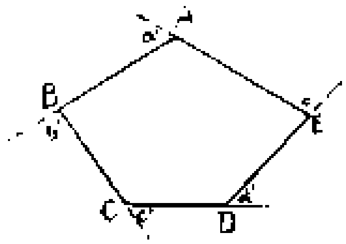
Rette parallele	**Rette parallele.** Due rette di un piano si dicono *parallele* quando non hanno alcun punto in comune. Si può anche dire che due rette sono *parallele* quando sono perpendicolari ad una stessa retta, e dimostrare che due rette soddisfacenti a questa condizione non hanno punti in comune.	
Angoli di due rette con una trasversale	Due rette di un piano tagliate da una terza *trasversale* formano con questa otto angoli, i quali due a due prendono nomi diversi:	
		
	4 e 6 ; 3 e 5 sono detti alterni interni	4 e 5 ; 3 e 6 sono detti coniugati interni
	2 e 8 ; 1 e 7 sono detti alterni esterni	1 e 8 ; 2 e 7 sono detti coniugati esterni
	1 e 5 ; 4 e 8 ; 2 e 6 ; 3 e 7 sono detti corrispondenti	
	**Teorema 1°**Se due rette di un piano, tagliate da una trasversale, formano angoli alterni *uguali* oppure angoli corrispondenti *uguali,* oppure angoli coniugati *supplementari,* le due rette sono parallele. Ipotesi: *a*= *b* Tesi: *r**r'* Si dimostra per assurdo, cioè supponendo che le rette *r* ed *r'* abbiano un punto in comune, e deducendo da ciò che la, somma di due angoli di un triangolo sarebbe uguale a due angoli retti. ***Corollario.*** Due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele. ***Postulato di Euclide.*** Per un punto fuori di una retta non può passare che una sola retta parallela alla retta data. ***Corollario* 1.°** Due rette parallele ad una terza sono parallele fra di loro. ***Corollario* 2.°** Se due rette di un piano .sono parallele, ogni retta che incontra l'una incontra anche l'altra.	
	**Teorema 2°** Se due rette sono parallele tagliate da una trasversale, formano: angoli alterni uguali: angoli corrispondenti uguali; angoli coniugati supplementari. Ipotesi: *r* || *r"* Tesi: *a* = *b* Si dimostra pure per assurdo supponendo cioè che gli angoli *a* e *b* non siano eguali, e costruendo per il punto A una retta che formi con la *r* un angolo eguale a b. Si viene così a negare il postulato di Euclide. ***Corollario.*** Se due rette sono parallele ogni retta perpendicolare all'una è perpendicolare anche all'altra	
Proprietà Generali Dei Poligoni. 	**Teorema 1.**° La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto (180 gradi). Tesi: BAC + ABC + ACB=P (angolo piatto). Si dimostra tracciando da A la retta D E parallela a BC e osservando che ABC = DAB perché alterni interni delle rette parallele DE e BC tagliate dalla trasversale AB . e che ACB = EAC, per ragione analoga. E poiché DAB+BAC+CAE = P è pure ABC + BAC + A C B = P ***Corollario.*** Un angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due interri opposti.	



Teorema 2.° La somma degli angoli interni di un poligono convesso è eguale a tanti angoli piatti, quanti ne indica il numero dei lati diminuito di 2.

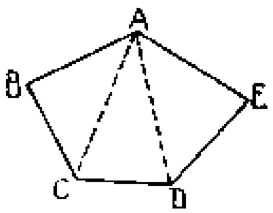
Tesi: A + B + C + ... = (n — 2) x P = nP-360°

Si dimostra scomponendo il poligono in triangoli per mezzo delle diagonali, uscenti da uno stesso vertice, e ricordando che la somma dogli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto. Da ciò, poiché i triangoli sono
n — 2, si deduce la tesi.



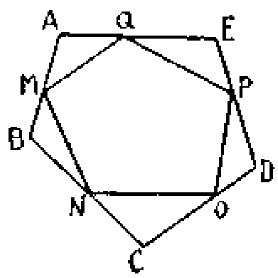
Corollario. La somma degli angoli esterni di un poligono convesso è sempre uguale a quattro angoli retti.
Ipotesi : *a', b',c', ecc.* angoli esterni del poligono A B C D E
Tesi: *a'+ b' + c' + d'...* = 360°

Si dimostra osservando che ogni angolo esterno è adiacente, e perciò supplementare ad un angolo interno *e* ricordando il teorema precedente.



***Teorema* 3°** In un poligono ogni lato è minore della somma di tutti gli altri.
Ip. : A B C D E poligono qualsiasi. Tesi : AB<BC+CD+DE+EA

Si dimostra scomponendo il poligono in triangoli, ricordando la, proprietà analoga relativa ai triangoli, e sommando membro a membro lo disuguaglianze che in questo modo si ottengono.



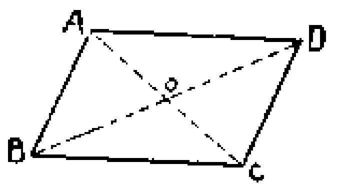
Teorema 4° Se un poligono è inscritto in un altro (cioè ha i vertici sui lati di questo) il perimetro del primo è minore di quello del secondo.
Ip. : MNOPQ poligono inscritto in A B C D E
Tesi: MN+ N0+ ... < AB+ BO ...

Per la dimostrazione si considerano i triangoli del tipo lei triangolo MQA si applica in ciascuno di essi la proprietà generale dei triangoli (un lato ; minore della somma degli altri due), e si sommano, membro a membro, le disuguaglianze che così si ottengono.

Uguaglianza dei poligoni.
Teorema. Due poligoni di egual numero di lati, sono eguali se si sa che hanno ordinatamente uguali tutti i lati e tutti gli angoli compresi tra i lati uguali, eccettuati :
a) *due angoli consecutivi ed il lato ad essi comune;*
b) oppure, *due lati e l'angolo da essi compreso;*
c) oppure, *tre angoli consecutivi*
sui quali elementi non si fa nessuna ipotesi.

I Quadrilateri

Parallelogramma

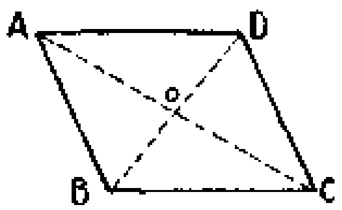


Definizione I.[a] Si chiama *trapezio* un quadrilatero che ha due lati paralleli.
Definizione 2.[a] Si chiama *parallelogramma* un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.
Teorema 1.° In ogni parallelogramma:
a) i lati opposti sono eguali;
b) gli angoli opposti sono eguali;
c) le diagonali si bisecano scambievolmente.

Ip.: AB||CD; AD||BC
T.: AB = CD; AD = BC A = C; B= D 'AO = OC; BO = OD

Per la dimostrazione della prima e seconda parte della, tesi si considerano i due triangoli ADC e ABC, che risultano eguali per il secondo criterio di eguaglianza. Per la terza parte della tesi si considerano i triangoli A O D e B O C, tenendo conto della dimostrazione della prima parte; dall'eguaglianza di questi triangoli si deduce la tesi.

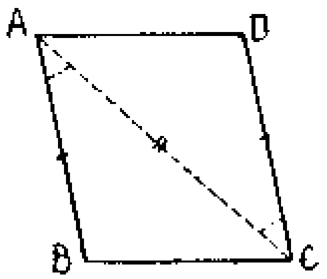
Corollario. Due parallelogrammi aventi due lati e l'angolo compreso eguali sono eguali.
Dal teorema precedente si deduce, infatti, che i due parallelogrammi hanno pure eguali gli altri elementi



Teorema 2°(inverso del precedente). Un quadrilatero è un parallelogramma:
a) se ha i lati opposti eguali;
b) oppure, se ha gli angoli opposti eguali;
c) oppure se le diagonali si dimezzano scambievolmente.

Ip.: A B = CD;AD=BC A=C; B = D ' AO=OC; BO = OD
Tesi: AB||CD; AD || BC

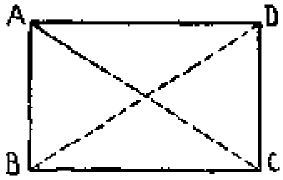
Per dimostrare il teorema, tenendo conto della prima ipotesi, si considerano i triangoli ADC e ABC che risultano eguali per il terzo criterio di eguaglianza; dalla quale uguaglianza si deduce che le rette A D e B C, come pure A B e CD sono parallele per formare angoli alterni interni uguali con una trasversale.
Per dimostrare il teorema, tenendo conto della, seconda parte dell'ipotesi, si osserv che la somma degli angoli di un quadrilatero è di 360°, e poiché A = O e B = C e B = D sarà A+ B = 180° e C+ D = 180°, per cui i l ati opposti sono paralleli formando essi con una trasversale angoli coniugati supplementari. Se si tiene conto della 3[a] ipotesi si considerano i triangoli A O D e B O G, i quali risultano eguali per il primo criterio. Da ciò si deduce che AD =BC; in modo analogo si dimostra che A B = D C, così che si ricade nella prima ipotesi.

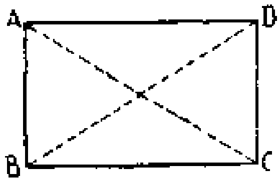


Teorema 3..°Un quadrilatero è un parallelogramma sé ha due lati opposti eguali e paralleli.
Ip.: AB = CD; AB||CD   T.: ABCD parallelogramma

Per la dimostrazione si considerano i triangoli ABC e A D C, i quali risultano eguali per il primo criterio; da ciò si deduce che AD = BC e quindi si ricade nel teorema 2°.

Rettangolo





Definizione. Si dice *rettangolo* un parallelogramma avente gli angoli retti.

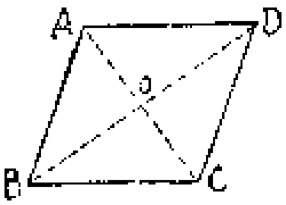
Teorema 1.° In un rettangolo le diagonali sono eguali.
Ipotesi : ABCD rettangolo. Tesi: AC= BD

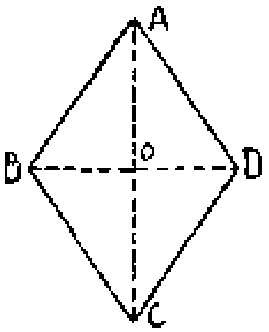
Per la dimostrazione si considera no i triangoli ABC e D C B i quali sono eguali per avere B C in comune A B = CD e B = C; dall'eguaglianza di questi triangoli si deduce che A C = B D.

Teorema 2.° (inverso del precedente). Se un parallelogrammo ha le diagonali eguali, è un rettangolo.
Ipotesi : ABCD parallelogramma A C = D B . Tesi : A B C D rettangolo.

Per la dimostrazione si considerano ancora i triangoli ABC e BOB, i quali risultano eguali per avere eguali i tre lati (terzo criterio di eguaglianza). Da ciò sì deduce che B = C; e poiché questi angoli sono supplementari, essendo il quadrilatero un parallelogramma, ciascuno dì essi deve essere un angolo rotto; per cui il quadrilatero è un rettangolo.

Rombo





Definizione. Si chiama *rombo* o *losanga* un parallelogramma che ha i lati uguali.
Teorema 1.° Le diagonali di un rombo bisecano gli angoli e sono tra loro perpendicolari.
Ipotesi : ABCD rombo Tesi ADB =CDB AC $\perp$ BD

Per la dimostrazione si considerano i due triangoli A O D e DOC, i quali risultano eguali per avere i tre lati eguali; da ciò si deduce che A D O = C D O che è I la prima parte della tesi. Inoltre A O D = D Ò C e, poiché questi angoli sono adiacenti, ciascuno di essi deve essere retto, il che vuoi dire che A C è perpendicolare a B D.

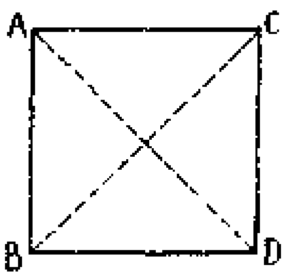
Teorema 2.° (teorema inverso del precedente). Un parallelogramma è un rombo:

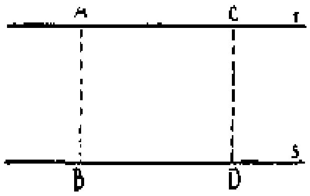
a) se le diagonali sono perpendicolari;

b) oppure, se le diagonali bisecano gli angoli:

Ipotesi: ABCD parallelogrammo AC $\perp$ BD BAC = CAD
Tesi: ABCD rombo

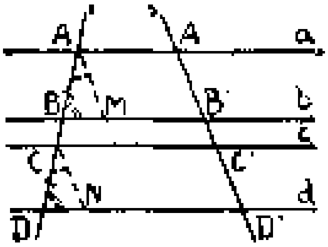
Per dimostrare il teorema, tenendo conto della prima ipotesi, si considerano i triangoli rettangoli A O B e AOD, i quali sono eguali per avere eguali due lati e l'angolo compreso. Da ciò si ricava che AB = A D, il che vuol dire che il parallelogramma è un rombo. Se si tiene conto della seconda ipotesi si considera il triangolo A B D che risulta isoscele per avere gli angoli alla base uguali, come metà di angoli eguali; perciò A B= A D. Il parallelogramma è dunque un rombo.

<table>
<tr><td>Quadrato

</td><td>Definizione. Si chiama quadrato un parallelogramma che ha i lati e gli angoli eguali.
Teorema 1.° In ogni quadrato le diagonali sono eguali e perpendicolari; ciascuna di esse è bisettrice degli angoli.
Ipotesi: ABCD quadrato
Tesi: $AD \perp BC$ $AD = BC$ $ADB = ADC = 45°$
Questo teorema si può considerare come un corollario dei teoremi relativi al rettangolo e al rombo, poiché il quadrato è contemporaneamente rettangolo e rombo.

Teorema 2.° Un parallelogramma è un quadrato:
a) se ha le diagonali uguali e perpendicolari;
c) oppure, se ha le diagonali uguali e bisettrici degli angoli.
Ipotesi: ABCD parallelogramma $AC = BD$; $AC \perp BD$ $AC = BD$; $ADB = BDC$
Tesi: ABCD quadrato
Questo teorema si può considerare corollario dei teoremi inversi sul rettangolo e sul quadrato</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Applicazioni</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Teorema I.° Se due rette sono parallele, tutti i punti dell'una hanno egual distanza dall'altra.

Ip.: $r \parallel s$ $AB \perp s$: $CD \perp r$ T.: $AB = CD$

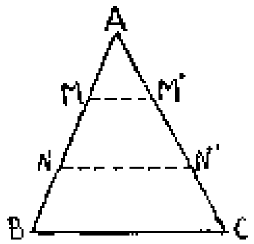
Per la dimostrazione si considera il quadrilatero ABCD che è un rettangolo, per le costruzioni fatte : per cui $AB = CD$</td></tr>
<tr><td>Distanza di due rette parallele.</td><td>Definizione. Si chiama distanza dì due rette parallele la distanza di un punto qualunque dell'una dall'altra</td></tr>
</table>



Teorema 2.° Date più rette parallele tagliate da duo trasversali, se due o più segmenti dell'una sono eguali, i segmenti ad essi corrispondenti sull'altra (si dicono *corrispondenti* due segmenti compresi fra le stesse parallele), sono pure eguali fra loro.
Ipotesi : *a, b, c, d* parallele ; *r, s* trasversali A B = C D Tesi : A'B' = C' D''

Per la dimostrazione si conducono AM e CN parallele alla retta s, e si considerano i triangoli ABM e C D N, i quali risultano eguali per avere eguali due angoli e il lato da essi compreso (secondo criterio dell'eguaglianza); per cui sarà A M = C N. Dalla considerazione, poi, dei parallelogrammi AMB'A' e C N D' C' si deduce che AM=A'B'eCN=C'D', per cui si può dire che A'B' = CD'.

***Corollario* 1.°** Se un lato di un triangolo è diviso in *n* parti eguali, e se per i punti di divisione si conducono le parallele ad un altro lato, il terzo lato viene da questo diviso in *n* parti eguali.

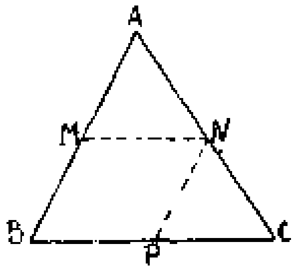


Se AM è 1/n di AB, AM' è 1/n di A C.

***Corollario* 2.°** Se due lati di un triangolo vengono divisi in uno stesso numero di parti uguali, le rette che congiungono i punti di divisione corrispondenti sono parallele al terzo lato.

Ipotesi: AM= (1/3) AB A'M'=(1/3)AC Tesi: MM'||BC

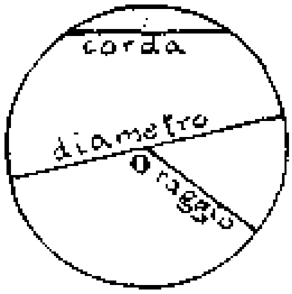
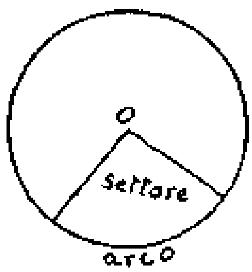
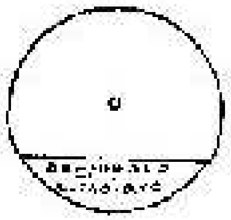
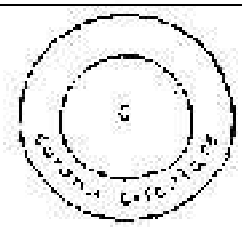
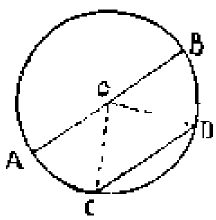
Per la dimostrazione si osserva *che* la parallela per il punto M alla retta BC deve incontrare la retta A C in un punto che disti da A di un segmento eguale ad 1/3 di A C, e perciò deve coincidere con la retta M M'.

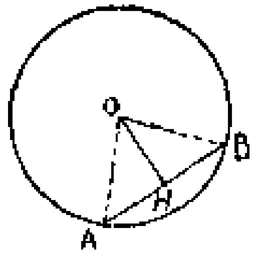


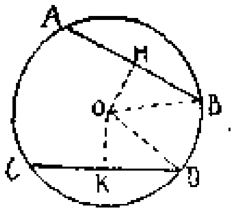
***Corollario* 3°.** Il segmento, che congiunge i punti di mezzo di due lati di un triangolo, è parallelo al terzo lato ed uguale alla metà di esso.

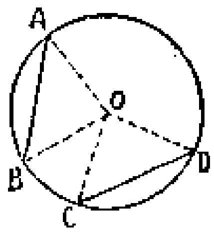
Ipotesi: AM = MB; AN = NC Tesi: MN || BC; MN = (1/2) BC.

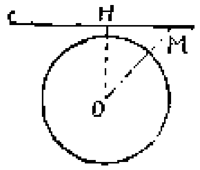
La prima parte della tesi discende subito dal Corollario 2°; per dimostrare la seconda parte si conduce N P parallelo ad AB, si osserva che MNPB è un parallelogramma, per cui M N = B P; inoltre AMN = N P C, per il secondo criterio di eguaglianza; e perciò M N = P C. Il punto P
è, dunque, il punto di mezzo di B C, il che vuoi dire che M N = (1/2) B C.

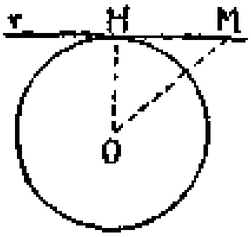
Circonferenza e cerchio	
Definizioni. 	**Definizione I.ª** Si chiama *circonferenza* la figura formata da tutti i punti del piano aventi da un dato punto *(centro)* distanze eguali ad un dato segmento *(raggio)*. Si può anche definire la circonferenza come il *luogo geometrico* dei punti di un piano aventi da un punto fisso distanza eguale ad un segmento dato. **Definizione 2.ª** Un punto si dice *interno* ad una circonferenza se la sua distanza dal centro è minore del raggio; esterno se la sua distanza dal centro è maggiore del raggio. **Definizione 3.ª** Si chiama *cerchio o circolo* la figura costituita dalla circonferenza e dai punti ad essa interni. **Definizione 4.ª** Si chiama *corda* un segmento che congiunge due punti di una circonferenza; *diametro* quella corda che passa per il centro.
	**Definizione 5.ª** Si dice *arco* una parte di circonferenza limitata da due punti. Un arco ed una corda si dicono corrispondenti quando hanno gli estremi in comune. Si dice anche che la corda *sottende* l'arco. **Definizione 6.ª** Si dice *angolo al centro* un angolo avente il vertice nel centro; un angolo al centro si dice *corrispondente ad un arco,* quando i suoi lati passano per gli estremi dell'arco e i punti dell'arco sono interni all'angolo. **Definizione 7.ª** Si dice *settore circolare* la parte di cerchio limitata da due raggi. **Definizione 8.ª** Si dice *semicirconferenza* quell'arco che ha per estremi gli estremi di un diametro; *semicerchio* il settore limitato da un diametro
	**Definizione 9.ª** Si chiama *segmento circolare* una superficie limitata da una corda e da un arco aventi gli stessi estremi.
	**Definizione 10.ª** Si chiama *corona circolare* la superficie racchiusa fra due circonferenze aventi lo stesso centro.
Uguaglianza.	***Definizione* I.ª** Due circonferenze o due cerchi si dicono *eguali* se hanno ugual raggio. ***Definizione* 2.ª** Due archi o due settori si dicono *eguali* se hanno eguali raggio e corrispondono ad angoli al centro eguali.
Proprietà delle corde	
	**Teorema 1.°** Una corda è sempre minore di un diametro. Ipotesi : A B diametro CD corda Tesi: CD<AB Per la dimostrazione si considera il triangolo C O D e si ricorre alla proprietà dei triangoli un lato è minore della somma degli altri due .

<table>
<tr><td>
</td><td>Teorema 2.° In un cerchio il diametro perpendicolare ad una corda la dimezza; e, viceversa, il diametro che dimezza la corda è perpendicolare ad essa.
Ipotesi: OHJ⊥AB Tesi: AH= HB

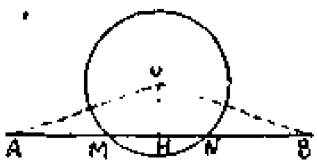
Per la dimostrazione del teorema diretto si considerano i triangoli rettangoli OH A od OHD eguali per avere l'ipotenusa e un cateto eguali ; perciò AH = H B. Per il teorema inverso si considerano ancora gli stessi triangoli, che risultano eguali per avere eguali i tre lati; perciò OHA = OHB, il che vuoi dire che OH e perpendicolare ad AB.</td></tr>
<tr><td></td><td>Teorema 3.° La perpendicolare per il punto di mezzo di una corda passa per il centro. (vedi luoghi geometrici).
Corollario 1.° Per tre punti non allineati passa una circonferenza ed una sola.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Teorema 4.° Se due corde sono eguali hanno egual distanza dal centro; e viceversa.
ipotesi: AB= CD OH⊥AB 0K⊥CD Tesi: 0H=OK

Per la dimostrazione di considerano i due triangoli rettangoli OHB e OKB, i quali risultano eguali per avere eguali l'ipotenusa e un cateto, perciò OH = OK. Il teorema inverso si dimostra in modo analogo.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Teorema 5.° In uno stesso cerchio o in cerchi uguali, se due corde sono eguali, gli archi (minori di una semicirconferenza), che le sottendono, sono eguali; e viceversa.
Ipotesi: AB= CD Tesi : arco A B = arco CD.

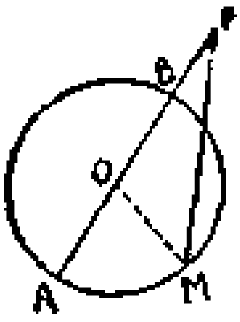
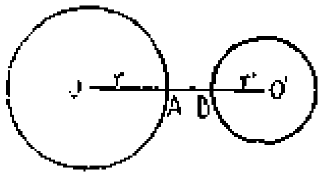
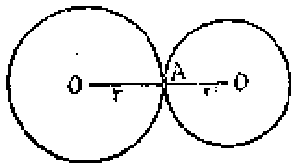
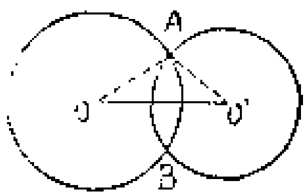
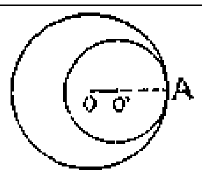
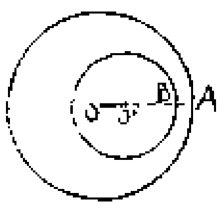
Per la dimostrazione si considerano i triangoli A O B e C O D i quali sono eguali per avere i tre lati eguali, perciò sarà AOB = COD, per cui anche gli archi corrispondenti sono eguali.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posizioni di una retta rispetto ad una circonferenza</td></tr>
<tr><td>Definizioni.</td><td>Una retta si dice esterna ad una circonferenza quando è costituita da punti tutti esterni a questa (cioè non ha con essa alcun punto in comune). Si dice tangente quando ha un sol punto in comune con la circonferenza (punto dì contatto); si dice secante quando ha due punti in comune con la circonferenza.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Teorema 1.° Una retta è esterna ad una circonferenza se la suadistanza dal centro è maggiore del raggio.

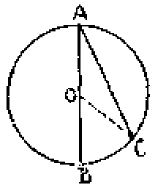
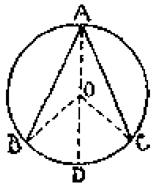
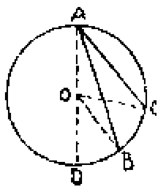
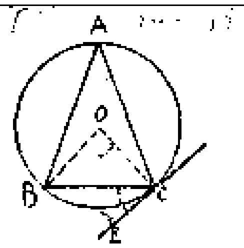
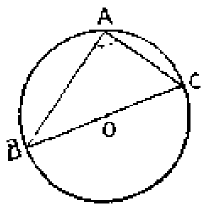
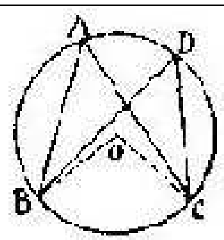
Difatti un qualsiasi punto M della retta r ha da O una distanza OM > OH, perché OM è obliqua, mentre OH è perpendicolare ad r. Perciò r è esterna.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Teorema 2.° Una retta è tangente ad una circonferenza se ha dal centro distanza eguale al raggio.
Difatti il punto H è comune ad r ed alla circonferenza, mentre qualsiasi altro punto M di r è esterno poiché OM è maggiore di OH.

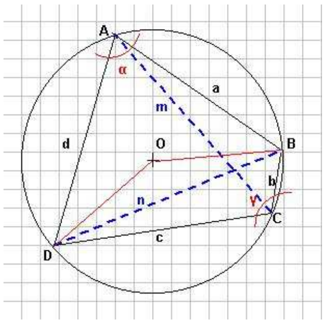
Corollario. La perpendicolare ad un raggio di una circonferenza nel ! suo estremo è tangente. alla circonferenza stessa.

Postulato. Un segmento che ha per estremi un punto interno ed un punto esterno ad una circonferenza incontra la circonferenza in un punto.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Teorema 3.° Se una retta ha dal centro distanza minore del raggio essa è secante.

Per la dimostrazione si portano HA ed HB uguali al diametro; si applica, poi, nel triangolo OEA il teorema un lato è maggiore della differenza degli altri due , e si ottiene che AO > raggio, per cui A è esterno. Per il postulato precedente il segmento AH ha un punto M in comune con la circonferenza. In modo analogo si trova il punto N sul segmento HB.</td></tr>
</table>

	Teorema 4.° (Inverso dei tre precedenti). Secondo che una retta è, rispetto ad una circonferenza, esterna, tangente o secante, essa ha dal centro distanza maggiore, uguale o minore del raggio. Si dimostra per assurdo.
	**Teorema 5.°** Se un punto è esterno rispetto ad una circonferenza, di tutti i segmenti, che congiungono questo punto coi punti della circonferenza, è massimo quello che passa per il centro *(normale massima)* e minimo quello tale che il suo prolungamento passa per il centro *(normale minima).* Ip. : P esterno alla circonferenza di centro 0M punto della circonferenza. T . : $PA > PM > PB$. j Per la dimostrazione si considera il triangolo OPM e si applica il teorema un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza. Si ottiene : $PM<PO + OM = PO + OA=PA$ ossia $PM<PA$ $PM>PO — OM = PO — OB = PB$ ossia $PM>PB$.
	Posizioni reciproche di due circonferenze
Definizioni.	Due circonferenze di un piano possono avere fra loro cinque posizioni diverse : si dicono *esterne* l'una all'altra se non hanno punti in comune ed i punti di ciascuna sono tutti esterni all'altra; si dicono *tangenti esternamente* se hanno un punto in comune e gli altri punti di ciascuna esterni all'altra: si dicono *secanti se* hanno due punti in comune; si dicono *tangenti internamente* se hanno un punto in comune e gli altri punti di una interni all'altra; si dicono *interne* l'una all'altra, se tutti i punti di una sono interni all'altra.
	**Teorema 1.°** Se due circonferenze sono esterne l'una, all'altra, la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi. $OO'> r + r''$ Difatti A è esterno alla circonferenza O' e B è esterno alla circonferenza O, per cui $OO'=OA+AB+BO' > r+r'$.
	**Teorema 2.°** Se due circonferenze sono tangenti esternamente la distanza dei centri è uguale alla somma dei raggi. $OO' = r + r''$ Difatti il punto A di contatto si trova sulla retta dei centri poiché O A = *r* e AO' = r', perciò $OO'=r + r'$.
	**Teorema 3.°** Se due circonferenze sono secanti la distanza dai centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza. $r + r' > O O' > r — r''$ Per la dimostrazione si considera il triangolo OAO' e si ricorre al teorema: «un lato è minore della somma degli altri due, e maggiore deila loro differenza ».
	**Teorema 4.°** Se due circonferenze sono tangenti internamente la distanza dei centri è uguale alla differenza dei raggi. $OO'= r — r'$. Difatti il punto A di contatto si trova sulla retta dei centri, ed O, O' dalla stessa parte rispetto ad A, perciò $OO' = O A — O' A = r — r'$.
	**Teorema 5.°** Se due circonferenze sono interne; l'una all'altra, la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi. $OO'< r —r'$. Difatti il punto B della circonferenza O' è interno alla circonferenza O, ed il punto A della circonferenza O è esterno alla circonferenza O'; perciò : $O O' = O A — BA — O'B = r — r' — B A < r — r'$

	***Teorema* 6.°** Se la distanza dei centri di due circonferenze è maggiore della somma dei raggi, le due circonferenze sono esterne; se è uguale alla somma dei raggi le circonferenze sono tangenti esternamente; se è minore della somma, ma maggiore della differenza, sono secanti; se è uguale alla differenza sono tangenti internamente; se è minore della differenza sono interne l'una all'altra.
	Angoli al centro e angoli alla circonferenza
Definizioni.	Dicesi *angolo alla circonferenza* un angolo convesso avente il vertice in un punto di una data circonferenza, e per lati delle rette secanti (delle quali una anche solo tangente). Si dice che un angolo è *inscritto* in un arco quando questo contiene il vertice, e i lati dell'angolo passano per gli estremi dell'arco. Si dice che un angolo alla circonferenza *insiste* su un arco quando i suoi lati passano per gli estremi dell'arco il quale non contiene il vertice. Un angolo al centro si dice *corrispondente* ad un angolo alla circonferenza quando insiste sullo stesso arco.
  	**Teorema 1.°** Ogni angolo alla circonferenza è la metà dell'angolo al centro corrispondente. Ipotesi: BOC angolo al centro ; BAC angolo alla circonferenza Tesi: BAC = ½ (BOC) La figura può presentare tre oasi; per la dimostrazione del 1°, si considera il triangolo AOC isoscele, perciò C = A; ma BOC esterno al triangolo AOC è uguale ad A + C, perciò BAC=1/2(BOC). Per il secondo caso si osserva che BAC è somma di due angoli rispettivamente metà degli angoli di cui è somma BOC, (per il primo caso.) Per il 3°caso si osserva che BAC è differenza di due angoli che sono rispettivamente la metà degli angoli di cui è differenza BOC.
 	***Osservazione*** Come caso particolare dell'angolo alla circonferenza si può considerare l'angolo formato dalla corda e dalla tangente in un estremo dell'arco. Infatti questo angolo BCE rappresenta la posizione dell'angolo BAC quando A coincide con C e quindi BCE = 1/2 (B O C) ***Corollario* 1.°** Un angolo inscritto in una mezzo circonferenza è retto, e viceversa. Infatti l'angolo al centro corrispondente : un angolo piatto. Infatti gli angoli al centro corrispondenti a due angoli opposti hanno una somma di 360°.
	***Corollario* 2.°** Tutti gli angoli alla circonferenza, inscritti nello stesso arco, sono eguali. Infatti essi sono tutti la metà di un medesimo angolo al centro.

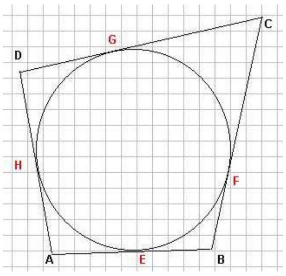


***Corollario* 3.°** Un quadrilatero avente i vertici su una circonferenza (*inscritto* in una circonferenza) ha gli angoli opposti supplementari.

$\alpha + \gamma = 180°$

Corollario 4.° Se un quadrilatero convesso è inscritto in una circonferenza, il rettangolo delle diagonali è equivalente alla somma dei rettangoli che hanno per dimensioni i lati opposti. (Teor. Tolomeo)

$mn = bd + ac$



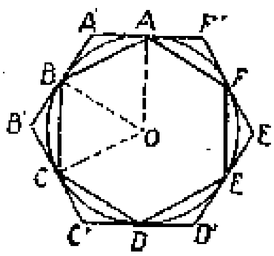
Corollario 5.° In un quadrilatero circoscritto ad un cerchio la somma dei lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

$AB + DC = AD + BC$

Poligoni regolari

Definizione I.ª Un poligono si dice *inscritto* in una circonferenza se tutti i suoi vertici stanno sulla circonferenza. La circonferenza si dice allora *circoscritta* al poligono.

Definizione 2.ª Un poligono si dice *circoscritto* ad una circonferenza se i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. La circonferenza sì dice allora *inscritta* al poligono

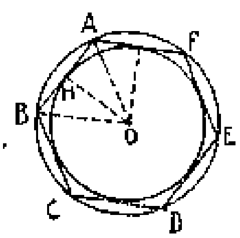


Teorema 1.° Se una circonferenza viene divisa in un certo numero di archi eguali, il poligono inscritto, che ha per vertici gli estremi di questi archi (nell'ordine in cui si susseguono sulla circonferenza) e il poligono circoscritto avente per lati le tangenti in cotesti estremi sono poligoni regolari.

Ip.: *AB* = BC = CD, etc..

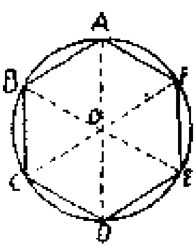
Tesi: ABCD; A',B'C'D' poligoni regolari.

Per il poligono inscritto basta osservare che i lati sono eguali, essendo corde che sottendono archi uguali, e che gli angoli sono eguali perché inscritti in archi uguali. Per la dimostrazione relativa al poligono circoscritto, si osserva che gli angoli BAA', ABA', BOB' ecc. sono eguali perché sottendono archi eguali (v. osservazioni sugli angoli alla circonferenza) ; perciò i triangoli ABA' e BCB' saranno pure eguali per avere eguali un lato e due angoli adiacenti. Da ciò risulta che il poligono A'B'C'D'E'F' è regolare.



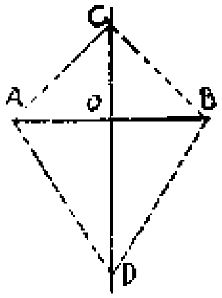
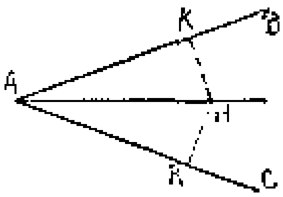
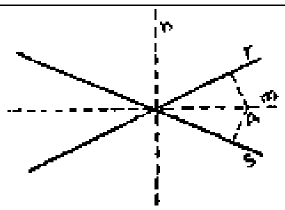
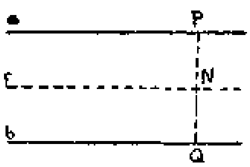
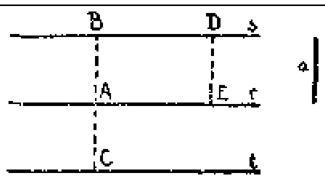
Teorema 2.° Ad ogni poligono regolare si può inscrivere e circoscrivere una circonferenza.

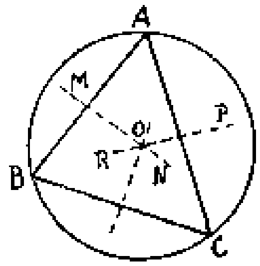
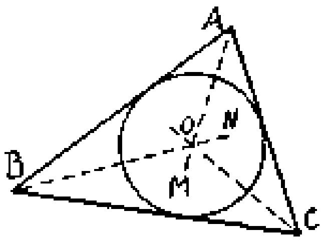
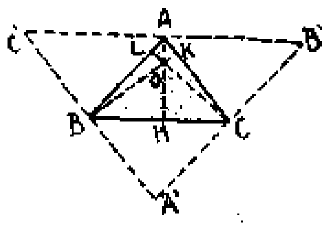
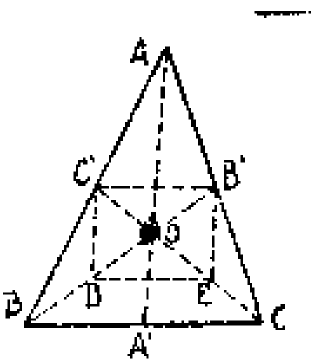
Infatti le bisettrici di due angoli consecutivi A e B si incontrano in un punto O, formando un triangolo isoscele ; perciò AO = BO. In modo analogo si deduce che BO = CO, ecc, onde si può dire che O è equidistante dai vertici e centro della circonferenza circoscritta. Inoltre i lati AB, BC, ecc. come corde di questa circonferenza sono equidistanti dal centro, e perciò la circonferenza, avente per centro O e per raggio questa distanza comune OH, è inscritta.



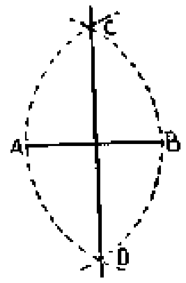
Teorema 3.° Il lato di un esagono regolare inscritto è uguale al raggio.

Infatti gli archi AB, BC, ecc. sono la sesta parte della circonferenza, e perciò gli angoli A O B, BOC, ecc. sono 1/6 di angolo giro, cioè sono di 60°. I triangoli AOB, BOC, ecc. sono dunque equilateri, il che vuoi dire che AB.BC, ecc. sono eguali al raggio.

Principali luoghi geometrici	
Definizione.	Chiamasi *luogo geometrico* (o semplicemente *luogo)* Dei punti che godono di una data proprietà , una figura costituita da tutti e soli i punti che godono di quella proprietà. E cioè tale che ogni suo punto goda di quella proprietà, e che ogni punto, che goda di quella proprietà, appartenga alla figura stessa.
	**Teorema 1.°** Il luogo geometrico dei punti di un piano, equidistanti da due punti fissi, è la perpendicolare nel punto di mezzo del segmento da essi determinato *(asse del segmento).* Considerato un punto C dell'asse del segmento AB si dimostra che è equidistante da A e da B, considerando i triangoli COA e COB, (chiamando O il punto d'incontro dell'asse col segmento AB) rettangoli ed eguali, per avere eguali i due cateti. Da cui si deduce che CA = CB. Considerato, invece, un punto D equidistante da A e da B, e, chiamato O il punto di mezzo di AB; si dimostra che DO è l'asse del segmento AB osservando che i due triangoli DAO e DBO sono eguali per avere i tre lati rispettivamente uguali. Perciò $DO \perp AB$.
	**Teorema 2.°** Il luogo geometrico dei punti di un piano (interni ad un angolo convesso) equidistanti dai lati di un angolo, è la semiretta bisettrice dell' angolo. Infatti, considerato un punto H della bisettrice, si dimostra che è equidistante dai lati dell'angolo, osservando che i triangoli rettangoli HAK e HAE sono eguali per avere l'ipotenusa e un angolo acuto eguali: per cui HK = HR. Viceversa se H è un punto equidistante dai lati dell'angolo si dimostra che HA è la bisettrice osservando ancora i triangoli HAK e HAR, i quali risultano eguali per avere l'ipotenusa e un cateto eguali, perciò HAK = HAR, il che vuoi dire che HA è bisettrice dell'angolo BAC.
	***Corollario* 1°.** Il luogo dei punti di un piano, equidistanti da due rette che si tagliano, è la figura formata dall'insieme delle bisettrici (fra loro perpendicolari) delle due coppie di angoli opposti al vertice formati dalle due rette.
	***Corollario* 2°.** Il luogo dei punti di un piano, equidistanti da due rette parallele, è una retta parallela ad entrambe ed equidistante dalle due rette date *(bisettrice della striscia determinata dalle due rette).*
	**Teorema 3.°** Il luogo dei punti di un piano, aventi da una retta data distanza eguale ad un segmento dato, è formato dalle rette parallele alla data situato da bande opposte ad essa e che hanno da essa distanza uguale al segmento dato. Infatti un punto B o C dì una delle due rette *s* o *t,* parallele alla retta r, alla distanza *a* e situate da bande opposte, ha da *r* una distanza BA o CA eguale ad r. Viceversa, considerato un punto D avente da *r* una distanza DE = *a,* si osserva che il quadrilatero D E A B è un parallelogramma per avere DE eguale e parallelo a BA, per cui la retta BD è parallela ad r, ad una distanza *a,* il che vuoi dire che D giace su *s* o su *t.*

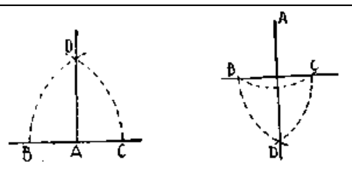
Punti notevoli di un triangolo	
	**Teorema 1.°** In un triangolo i tre assi dei lati passano per uno stesso punto (*circoncentro*) equidistante dai vertici e centro della circonferenza Circoscritta. Difatti, tracciato l'asse MN di AB e l'asse PR di AC e considerato il punto O d'incontro di queste due rette, si osserva che, trovandosi O sul primo, asse, è equidistante da A e da B (Teor. 1°Luoghi Geom.), e che trovandosi sul secondo asse è equidistante anche da A e da C. Esso perciò, essendo equidistante da B e da C, sta pure sull'asse di BC, il che vuoi dire che il terzo asse passa pure per O. Inoltre, essendo O equidistante dai tre vertici, è centro della circonferenza circoscritta.
	**Teorema 2.°** Le tre bisettrici degli angoli di un triangolo passano per uno stesso punto *(incentro)* il quale è equidistante dai lati e centro della circonferenza inscritta. Difatti tracciate le bisettrici AM dell'angolo B À C, e B N dell'angolo ABC, e, considerato il loro punto d'incontro O, si osserva che esso trovandosi su AM, è equidistante da AB e da AC (Teor. 2°sul Luoghi Geo m.), e che, trovandosi su BN, è equidistante da AB e da BC; perciò, essendo equidistante da AC e da BC il punto O si trova pure sulla bisettrice dell'angolo ACB. II che vuoi dire che questa terza bisettrice passa pure per O. Inoltre, essendo O equidistante dai tre lati, è centro della circonferenza inscritta.
Definizione.	Si chiama *altezza* di un triangolo il segmento di perpendicolare compreso fra un vertice e il lato opposto.
	**Teorema 3.°** Le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto *[ortocentro).* Per la dimostrazione si tracciano dai vertici del triangolo dato ABC, le rette parallele ai lati opposti ottenendo il triangolo A'B'C'. Si osserva, poi, che ABC è un parallelogramma, come pure ACBC'. Da ciò si deduce che A è il punto medio di C'B' e AH (altezza del triangolo ABC) è asse del lato CB' del triangolo A'B'C'. Lo stesso succede per le altre altezze; perciò per il teorema 1°, si può dire che le tre altezze si incontrano ne llo stesso punto.
Definizione	Si chiama *mediana* di un triangolo il segmento che congiunge un vertice col punto di mezzo del lato opposto
	**Teorema** 4.°Le tre mediane di un triangolo si incontrano in uno stesso punto *(baricentro),* il quale divide ciascuna di esse in due parti, tali che quella avente un estremo nel vertice è doppia dell'altra. Per la dimostrazione si considera il punto d'incontro O di due mediane ; si congiungono, poi, i punti di mezzo D e E dei segmenti BO e OC; come pure si congiunge B' con C'. Il quadrilatero C'B'ED è un parallelogramma per avere due lati opposti eguali e paralleli, perché entrambi paralleli ed uguali alla metà di BC (Corollario 3°, Applicazioni, sheda poligoni). Le diagonali di questo parallelogramma si dimezzano, perciò DO = OB'; EO = OC, per cui BO = 2 OB' e CO = 2 OC'. Poiché lo stesso dove accadere per la terza mediana, rispetto a una dello altre due, essa deve passare pure per il punto O.
Osservazione.	I punti notevoli di un triangolo sono: *circocentro, incentro, ortocentro* e *baricentro.* Essi stanno su una stessa retta, se il triangolo è isoscele, coincidono, se il triangolo è equilatero

Rette perpendicolari e parallele



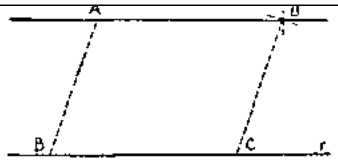
Problema 1.° Costruire l'asse di un segmento.

Centrando successivamente in A e in B con raggio arbitrario, eguale circa ad AB, si costruiscono due circonferenze le quali si incontrano in C e in D.
La retta CD è l'asse di AB, poiché, per la costruzione fatta, essa contiene tutti i punti equidistanti da A e da B.



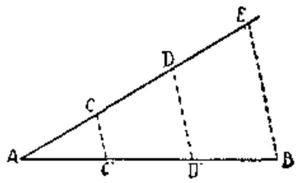
Problema 2.° Condurre per un punto di un piano una retta perpendicolare ad una retta data.

SI opera nel seguente modo, sia che il punto A si trovi sulla retta sia che il punto sia fuori. Fissato un punto B sulla retta, con centro A e raggio A B si descrive una circonferenza che taglia la retta in B in O ; poi centrando in B e in C successivamente con raggio circa BO si descrivono due circonferenze
che si incontrano in D. La retta DA è la retta richiesta perché, contenendo D equidistante da B e da C, è l'asse del segmento B C.



Problema 3.° Condurre per un punto esterno la parallela ad una retta data.

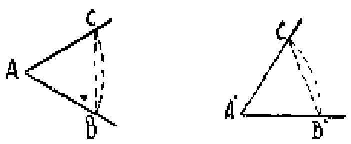
Si segnano su *r* due punti arbitrari B e C; con centro nel punto dato A e raggio BC si costruisce una circonferenza ; poi con centro in O e raggio BA si taglia questa circonferenza in un punto D. AD è la retta richiesta, poiché ABCD, per la costruzione fatta, è un parallelogramma.



Problema 4.° Dividere un segmento in *n* parti uguali.

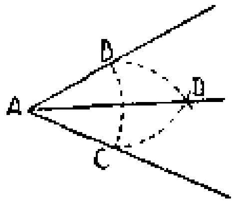
Si traccia da un estremo A, del segmento AB, una semiretta qualsiasi e su di essa si portano n segmenti uguali. Si congiunge l'ultimo punto E con B, e dagli altri punti si tracciano delle parallele alla retta EB, trovando cosi, successivamente i punti C' e D' di divisione. I segmenti A' C, C D', ecc. sono eguali per il Teorema 2°sulle Applicazioni dei parallelogrammi.

Angoli e triangoli



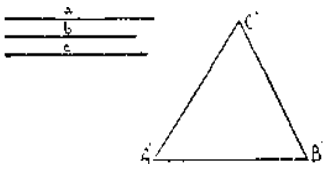
Problema 1.° Costruire un angolo eguale ad un angolo dato.

Con centro nel vertice A dell'angolo dato e raggio ad arbitrio, si traccia una circonferenza, che incontra i lati nei punti B e C. Con centro nell'origine A' di una semiretta *r* e raggio eguale si descrive un arco, che taglia in B'. Con centro in B' e raggio B C si taglia questo arco in C'. L'angolo CA'B' è uguale a CAB, poiché i triangoli ABC e A'B'C' sono eguali per avere i tre lati uguali.



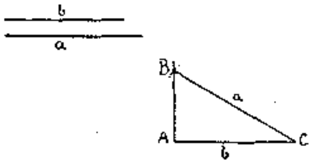
Problema 2.° Costruire la bisettrice di un angolo.

Con centro nel vertice A dell'angolo dato e raggio ad arbitrio si descrive un arco che taglia i lati dell'angolo nei punti B e C. Facendo centro successivamente in B e in C con un unico raggio arbitrario si descrivono due circonferenze che si tagliano in un punto D. La retta DA è la bisettrice, poiché i triangoli ABD e ÀCD sono eguali, avendo per costruzione i tre lati uguali.



Problema 3.° Costruire un triangolo dati tre lati.

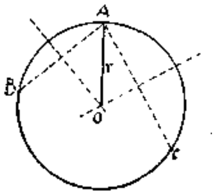
Su di una retta qualsiasi si costruisce un segmento A' B' eguale ad *a.* Centrando successivamente in A, e B, con raggi eguali a *b* e *c* si descrivono due circonferenze che si incontrano in due punti di cui uno è il punto C. Il triangolo A'B'C' è il triangolo richiesto per costruzione. Esso esiste quando i segmenti sono tali che ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.



Problema 4.° Costruire un triangolo rettangolo data l'ipotenusa e un cateto.

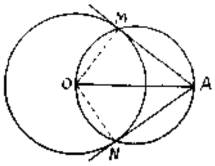
Costruito un angolo retto, si porta su un lato, a partire dal vertice A, un segmento AC uguale al cateto b; con centro nel punto C, e raggio uguale all'ipotenusa *a,* si taglia l'altro lato dell'angolo retto in un punto B. Il triangolo A B C è quello richiesto, per costruzione.

Problemi relativi alla circonferenza



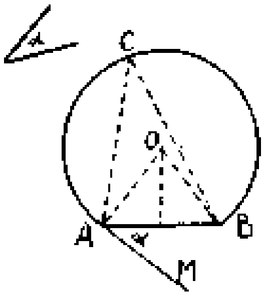
Problema 1.° Costruire una circonferenza passante per 3 punti fissi non allineati (ossia cercare il centro di una data circonferenza).

Dati i tre punti ABC si costruisce l'asse del segmento AB e quello del segmento AC; il loro punto d'incontro O è il centro della circonferenza richiesta, per il Teorema 1° sui punti notevoli di un triangol o. Il raggio è la distanza di O da uno dei punii dati.



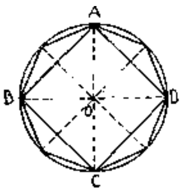
Problema 2.° Per un punto esterno di una circonferenza condurre le tangenti ad essa.

Dato il punto A, esterno alla circonferenza di centro O, prendendo per diametro OA, si costruisce una circonferenza che taglia la circonferenza data in M e in N. Le rette A M e A N sono le tangenti richieste; poiché gli angoli OMA e ONA sono retti essendo inscritti in una semicirconferenza.



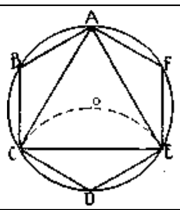
Problema 3.° Costruire su un segmento dato un arco *capace* di un dato angolo (cioè tale che i suoi punti, siano vertici di angoli passanti per gli estremi dell'arco e uguali all'angolo dato).

Dato il segmento AB e l'angolo α, si costruisce in un estremo A un angolo MAB eguale ad OC; si costruisce, poi, l'asse di AB e la perpendicolare ad AM per il punto A. Queste due rette si incontrano in un punto O centro di un arco avente per estremi A e B e che soddisfa alla condizione richiesta.
Infatti l'angolo BAM è formato dalla corda AB e dalla tangente AM nel punto A alla circonferenza di centro O perciò è uguale a qualsiasi altro angolo inscritto nell'arco AB. Di archi che soddisfano a questa condizione ne esistono due situati da bande opposte rispetto alla retta AB.



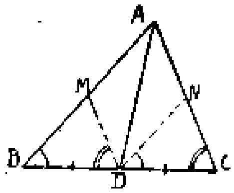
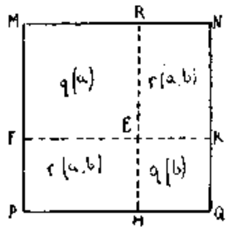
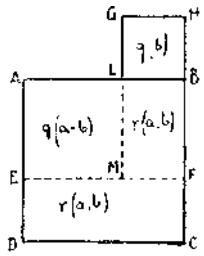
Problema 4.° Inscrivere in una circonferenza un poligono regolare di 2 » lati, per *n* = 2, 3, 4, ... eco.

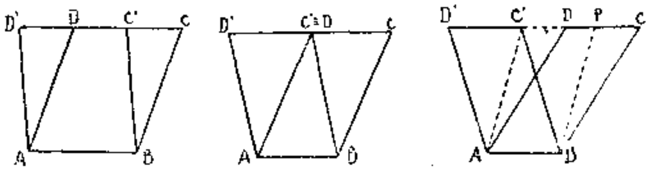
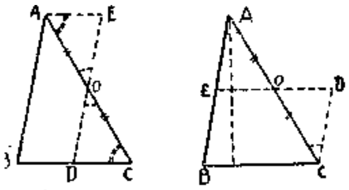
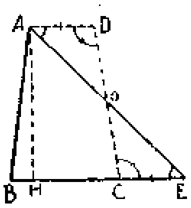
Si costruisce il quadrato inscritto tracciando due diametri fra loro perpendicolari e congiungendo i loro punti di incontro con la circonferenza. Si costruiscono poi i poligoni di 8, 16, 32, ecc. lati tracciando sucsivamente le bisettrici degli angoli al centro.



Problema 5.° Inscrivere in un cerchio un poligono regolare di 3 x 2 " lati, per *n* = 0,1, 2, 3 ...

Si costruisce l'esagono, portando successivamente sulla circonferenza corde uguali al raggio ; si costruisce il triangolo equilatero unendo tre vertici non consecutivi; e i poligoni di 12, 24. ecc. lati costruendo le bisettrici degli angoli al centro corrispondenti ai lati.

Definizioni e proprietà generali	
Definizione.	Due poligoni convessi diconsi *equivalenti* quando si possono scomporre in un egual numero di poligoni convessi rispettivamente uguali.
	**Teorema 1.°** *(Esempio di equivalenza).* Una mediana di un triangolo divide questo in due triangoli equivalenti. Difatti tracciando da D, punto medio di BC, le parallele ai lati AC e AB si scompongono i due triangoli ABD e ADC, in due parti tali che AMD = AND (poiché la diagonale di un parallelogrammo divide questo in due parti uguali), e MBD = DNC per avere un lato e duo angoli uguali. I due triangoli essendo composti di parti uguali sono dunque equivalenti.
	***Corollario* 1.°** L'equivalenza dei poligoni gode delle seguenti proprietà: *riflessiva*, ogni poligono è equivalente a sé stesso; *simmetrica*, se un poligono è equivalente ad un altro, questo è equivalente al primo, *transitiva*, se un poligono A è equivalente ad un poligono B e B equivalente ad un terzo poligono C è pure A equivalente a C.
	Corollario 2°: Somme di poligoni equivalenti sono equivalenti fra di loro.
	**Teorema 2.°** Il quadrato costruito sulla somma di due segmenti è equivalente alla somma di quadrati dei due segmenti e del doppio del loro rettangolo. Difatti, costruito il quadrato su MN = *a* + b, si tracciano da R la parallela ad MP e da *F* la parallela ad MN, scomponendo il quadrato costruito su *a* + b nella somma del quadrato di *a* col quadrato di *b* con due rettangoli, aventi rispettivamente per lati *a* e *b*.
	**Teorema 3.°** Il quadrato della differenza di due segmenti è equivalente alla somma dei quadrati dei due segmenti, diminuita dei due rettangoli che hanno per lati i due segmenti. Difatti, sia AB= a e LB= b per cui AL = *a* — b. Costruito il quadrato ABCD su a e LBHG su b, tracciando dal punto E (in modo che DE = b) la parallela ad AB e da L la parallela a BC fino ad M, si ottiene AEML = *q (a* — b) il quale perciò si può considerare equivalente alla somma di ABCD con BHGL, diminuita dei due rettangoli EDCF e FHGM, che hanno per lati *a* e *b.*

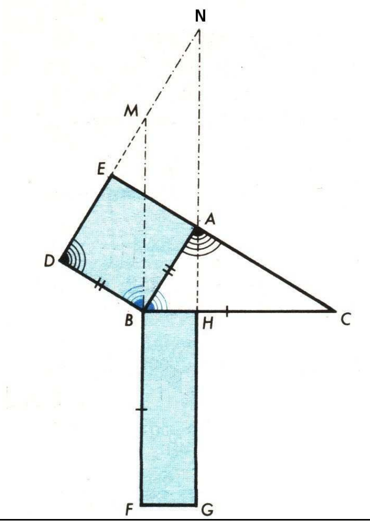
<table>
<tr><th colspan="2">Confronto di superfici polinomiali</th></tr>
<tr><td>Definizione I.ª</td><td>Un poligono si dice prevalente ad un altro se è somma di questo con un terzo poligono. Un poligono si dice suvvalente ad un altro, quando questo è prevalente ad esso.
Corollario I.° Se un poligono è prevalente ad un altro, lo si può scomporre in due poligoni dei quali uno sia equivalente al secondo dei dati.
Corollario 2.° Dati due poligoni qualsiasi uno è sempre equivalente o prevalente o suvvalente rispetto all'altro. Perciò se, dati due poligoni, ciascuno non è né prevalente né suvvalente all'altro, i due poligoni sono equivalenti (criterio generale di equivalenza).
Corollario 3.° Differenze di poligoni equivalenti sono equivalenti.</td></tr>
<tr><td>Definizione 2.ª</td><td>Un poligono si dice multiplo di un altro se è somma di tanti poligoni equivalenti a questo.</td></tr>
<tr><td>Principio di Archimede.</td><td>Dati due poligoni si può sempre trovare un multiplo di uno che sia prevalente all'altro.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Equivalenza di poligoni</th></tr>
<tr><td></td><td>Teorema 1.° Due parallelogrammi aventi la base e l'altezza relativa eguali sono equivalenti.

1° caso 2° caso 3° caso
Supponendo che i due parallelogrammi abbiano la base in comune (posizione a cui si potranno sempre portare), si osservabile i lati opposti alla base si vengono a trovare su una retta parallela alla base, dando luogo, a tre casi a seconda che hanno una parte in comune, un estremo in comune, o sono esterni l'uno all'altro. Nel 1° caso si osserva che i due parallelogrammi sono composti di una parte in comune, di due triangoli uguali per avere due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali; essi perciò sono equivalenti. Il 2° caso sì può con siderare un caso particolare del 1.° Per il 3° si suppone di portare, a partire da C, ta nte volte O'D' finché si ottiene un punto P interno a OD (nel nostro caso una volta sola). Allora il 1° parallelogramma sarà equivalente al 2°, il 2° al 3° ecc. Per la pro prietà transitiva si può concludere che ABCD è equivalente ad ABC' D'.
Corollario. Un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo avente la stessa base e la stessa altezza</td></tr>
<tr><td>
1° caso 2° caso</td><td>Teorema 2.° Un triangolo è equivalente ad un parallelogramm a avente la stessa altezza e metà base; oppure la stessa base e metà altezza.
Per la dimostrazione del 1° caso si osserva che il triangolo ed il parallelogramma sono composti di una parte comune ABDO e di due triangoli DOC e AOE eguali per avere un lato e due angoli eguali. Per il secondo caso si osserva, analogamente, che il triangolo e il parallelogramma sono composti di una parte comune BCOE e dei due triangoli EAO e DCO eguali per avere un lato e due angoli uguali.
Corollario. Se due triangoli hanno le basi e le altezze uguali, essi sono equivalenti.
Infatti essi sono equivalenti a parallelogrammi i quali hanno fra loro eguale base ed eguale altezza.</td></tr>
<tr><td></td><td>Teorema 3.° Un trapezio è equivalente a un triangolo avente per base la somma delle basi e per altezza la stessa altezza.

Per la dimostrazione si osserva che il trapezio e il triangolo sono composti di una parte in comune e di due triangoli ADO e ECO eguali per avere un lato e due angoli eguali</td></tr>
</table>

Teorema 4°. Un poligono circoscritto ad un cerchio (in particolare un poligono regolare) è equivalente ad un triangolo avente per base il perimetro e per altezza il raggio del cerchio inscritto al poligono (apotema del poligono regolare).

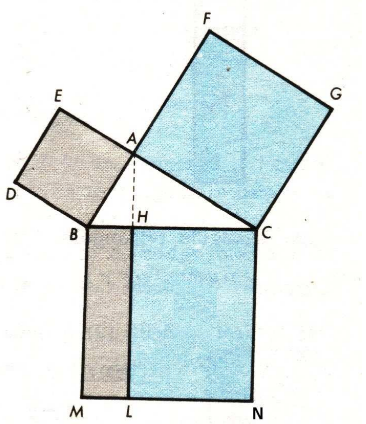
Infatti il triangolo così costruito ed il poligono sono somme di triangoli tutti equivalenti per avere egual base ed eguale altezza.

Teorema di Pitagora

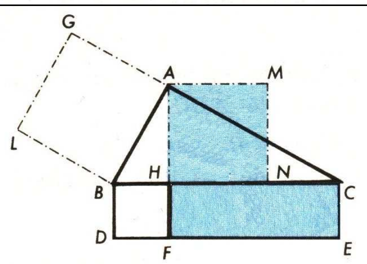


Teorema 1;° (**1° teorema di Euclide**). In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sopra un cateto è equivalente al rettangolo costruito sull'ipotenusa e sulla proiezione di quel cateto sull'ipotenusa.

Costruito il quadrato ABDE sul cateto AB del triangolo rettangolo dato ABC, si traccia l'altezza AH, relativa all'ipotenusa e si prolunga di un segmento HG eguale a BC, costruendo poi il rettangolo BFGH, avente per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa. Per dimostrare che BFGH è equivalente al quadrato ABDB si prolungano GH ed FB dalla parte di AB fino ad incontrare il prolungamento di DE in M e in N. Si osserva che il triangolo BDM risulta eguale al triangolo BAC per avere eguali un lato e due angoli; per cui BM = BC, ma BC=BF e perciò BM=BF. Il rettangolo BFGH risulta allora equivalente al parallelogramma BMNA, per avere con esso base e altezza uguale ; ma questo è, alla sua volta, equivalente al quadrato per avere la base BA in comune e la stessa altezza. Per la legge transitiva sarà, dunque, il quadrato ABDE equivalente al rettangolo BFGH.

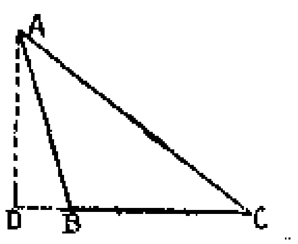


Teorema *2.*° (**Teorema di Pitagora**). Il quadrato, costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma di quadrati costruiti sui due cateti.
Costruito il quadrato BCNM sull'ipotenusa BC, si traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa prolungandola fino ad incontrare MN nel punto L. Si osserva che il quadrato dell'ipotenusa risulta somma di due rettangoli i quali per il teorema precedente sono rispettivamente equivalenti ai quadrati costruiti sui cateti. Perciò il quadrato BCNM è equivalente a ABDE+ACGF.

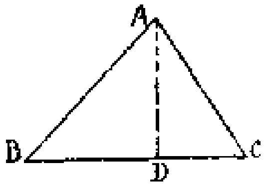


Teorema 3.° (**Teorema 2° di Euclide**). In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo costruito sulle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa

Infatti ABLG è equivalente ad AHNM+ BHFD per il teorema di Pitagora, ma ABLG è pure equivalente a BDEC per il 1° teorema di Euclide. Perciò BD EC è equivalente ad AHNM + BHFD, da cui si deduce che AHNM, quadrato costruito sull'altezza, equivalente a HFEC rettangolo costruito sulle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

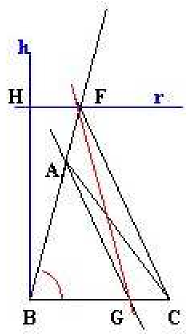


***Corollario* 1.°** In un triangolo ottusangolo il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati e del doppio rettangolo di uno di essi e della proiezione dell'altro su questo.
Intatti, per il teorema di Pitagora, AC^2 eq. AD^2+DC^2, ma DC=DB+ BC, per cui DC^2 eq. $BD^2 + BC^2 + 2$ r (BD, BC); e sostituendo nell'equivalenza precedente in luogo di DC^2 il secondo membro di questa, sì ha AC^2 eq. $AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2$.r (BD, BC). Ma dal triangolo rettangolo ADB si ricava AB^2 eq. $AD^2 + DB^2$, perciò AC^2 eq. $AB^2 + BC^2 + 2$.r(BD, BC).



***Corollario* 2.°** In un triangolo qualsiasi il quadrato di un lato opposto ad un angolo acuto e equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio rettangolo di uno di essi e della proiezione dell'altro su questo.
Infatti per il teorema di Pitagora AC^2 eq. $AD^2 + DC^2$; ma DC = BC — B D perciò DC^2 eq. $BC^2 + BD^2$ — 2 . *r* (BC,BD), e, sostituendo nell'equivalenza precedente in luogo di DC^2 il secondo membro di questa, si ottiene: AC^2 eq. $AD^2 + BC^2 + BD^2$ — 2 . *r* (BC,BD). Ma dal triangolo rettangolo ABD si ricava AB^2 eq. $AD^2 + BD^2$, perciò AC^2 eq. $AB^2 + BC^2$ — 2 . *r* (BC, BD).

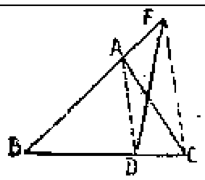
Costruzioni relative all'equivalenza



ABC = triangolo dato
h = nuova altezza
AGF ≈ AGC per avere uguale altezza
e uguale base AF

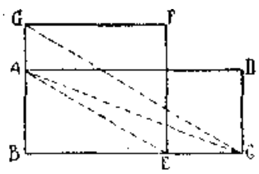
Problema 1.° Trasformare un triangolo in un altro di data altezza.

Da un estremo B della base BC del triangolo ABC dato, si conduce una perpendicolare eguale alla nuova altezza data *h,* e dal suo estremo H si conduce una retta r parallela a BC. Si prolunga BA fino ad incontrare r in F, si congiunge F con C e da A si traccia la parallela ad FC, fino ad incontrare BC in G. Il triangolo BFG è quello richiesto, poiché è equivalente ad ABC per avere con esso ABG in comune ed essere formato inoltre da AGF equivalente ad AGC (stessa base ed egual altezza).



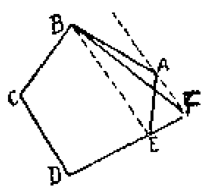
Problema 2.° Trasformare un triangolo in un altro di data base.

Si porta sulla retta B C, a partire da B, la nuova base BD ; *si* congiunge A con D e da C si traccia la parallela ad AD, fino ad incontrare la retta BA in F. Il triangolo BFD è quello richiesto, poiché è equivalente ad ABC, per ragione analoga a quella del problema precedente.



Problema 3.° Trasformare un rettangolo in un altro di data base o di data altezza.

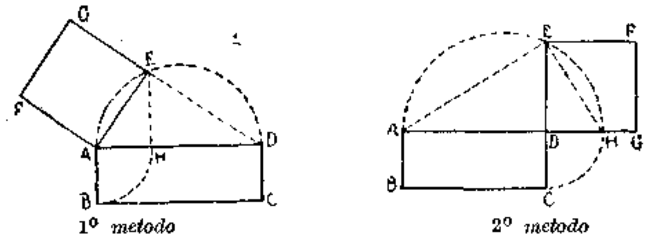
Basta scomporre il rettangolo in due triangoli per mezzo della diagonale ed applicare a ciascuno di essi uno dei problemi precedenti.



Problema 4.° Trasformare un poligono in un altro con un lato di meno.

Si congiungono due vertici non consecutivi B ed E lasciando fuori un vertice solo A; si traccia da A la parallela a BE, si prolunga DE fino ad incontrare questa parallela in F. Il poligono BCDF è quello richiesto; poiché è equivalente al pentagono, avendo con esso BCDE in comune, ed essendo formato inoltre di BEF equivalente a BEA per avere la stessa base e uguale altezza.

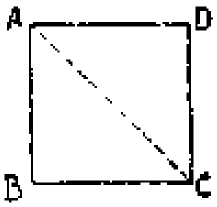
Problema 5.° Trasformare un rettangolo in un quadrato.

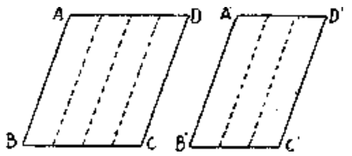
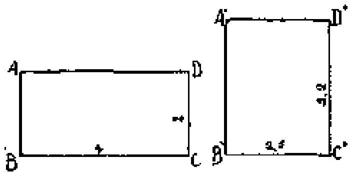


Vi sono due metodi di costruzione:

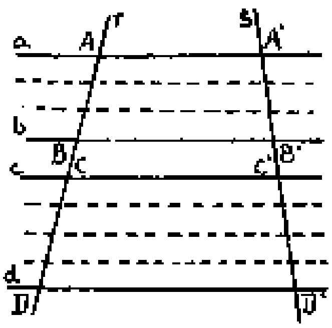
col 1° metodo si costruisce una semicirconferenza avente per diametro la base AD del rettangolo dato ; si porta AH = AB e da H si innalza la perpendicolare ad AD fino ad incontrare la semicirconferenza in E. Il quadrato AEGF, costruito su AE è quello richiesto, poiché è equivalente al rettangolo ABCD per il teorema 1° di Euclide applicato al triangolo AED, rettangolo in E.

Col secondo metodo si prolunga AD di un segmento DH = DC, si costruisce una semicirconferenza di diametro AH, si innalza da D la perpendicolare che incontra la semicirconferenza in E. Il quadrato DEFG, costruito su DE è quello richiesto, poiché è equivalente al rettangolo ABCD per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo AEH (rettangolo in E).

Rapporti fra grandezze geometriche	
Definizione I.ª	Si chiamano *grandezze geometriche* i segmenti, gli angoli, i settori, i poligoni, ecc, cioè tutte quelle figure sulle quali si possono eseguire le operazioni di confronto, somma, differenza, ecc.
 	**Definizione 2.ª** Si chiama rapporto fra due grandezze omogenee A e B quel numero *r* tale che **A=Br** Si scrive : **A : B = *r***, oppure **A/B = *r*.** ***Osservazione.*** Il rapporto fra due grandezze geometriche omogenee può presentare tre casi: **1°.** Se la prima grandezza è multipla della seconda il rapporto è un numero intero. $A = m$ B; A/B = m (intero) **2°** Se la prima grandezza è multipla di una sottomultipla della seconda, il rapporto è un numero frazionario. A = m/n B = $m\,.B/n$; A/B = m/n In questo caso la prima eguaglianza si può scrivere anche sotto altre due forme: *a)* n A = m B la quale esprime che le due grandezze A e B hanno una multipla comune. *b) A/m* = B/n la quale esprime che le due grandezze A e B hanno una sottomultipla comune. **3°.** Se la prima grandezza non è multipla di nessuna sottomultipla della seconda il rapporto non esiste nel campo dei numeri razionali, e praticamente si calcola solo il rapporto approssimato. In questo caso le due grandezze si dicono *incommensurabili,* mentre si dicono *commensurabili* quando si trovino in uno dei due casi precedenti. Esempio di grandezze incommensurabili: il lato e la diagonale di un quadrato; AC / AB = $\sqrt{2}$ = 1,41... a meno di 1/100

Proporzionalità	
Definizione I.ª	Quattro grandezze, due a due omogenee, si dicono *in proporzione* quando il rapporto fra le prime due è uguale al rapporto fra le altre due. (Le grandezze si considerano sempre commensurabili). **A: B = C: D** ossia **A/B = C/D** se essendo A = (m/n) B è pure C = (m/n) D
Definizione 2.ª	In una proporzione fra quattro grandezze, la prima e la terza si dicono *antecedenti*, la seconda e la quarta *conseguenti;* la seconda e la terza *medi;* la prima e la quarta *estremi.* Una delle quattro grandezze si dice *quarta proporzionale* dopo lo altre tre.
Definizione 3.ª	Si dice *proporzione continua* fra tre grandezze omogenee, quella proporzione in cui due medi sono eguali. In questo caso la seconda grandezza si dice *media proporzionale* fra le altre due, e la terza si dice *terza proporzionale* dopo le altre due
Teorema 1°.	Se quattro grandezze sono in proporzione, lo sono pure i numeri che esprimono le misure di queste grandezze, considerate due a due rispetto alla stessa unità di misura; e viceversa. Se **A:B = C:D** e **A/U = a**, **B/U = b**, **C/U = c**, **D/U = d** sarà **a:b = c:d**
Teorema 2.°	Le proporzioni fra grandezze geometriche godono delle proprietà del *permutando,* dell'*invertendo,* del *componendo* e del *dividendo,* coi relativi corollari. Esse si dimostrano, per le proporzioni fra grandezze, ricorrendo al Teorema 1,°il quale ci permette di passare da una proporzi one fra grandezze ad una proporzione fra numeri (le misure di queste grandezze rispetto alla stessa unità di misura), o poi, per mezzo del teorema inverso, di ritornare alla proporzione fra grandezze.
Classi di grandezze geometriche proporzionali.	
	**Definizione I.ª** Due classi di grandezze geometriche (insieme di grandezze omogenee) si dicono *direttamente proporzionali* se, essendo in corrispondenza biunivoca sono tali che due grandezze qualsiasi dell'una sono in proporzione con le grandezze corrispondenti dell'altra. *Esempio:* archi ed angoli al centro; parallelogrammi della stessa altezza e le rispettive basi, ecc. ABCD / A'B'C'D' = BC / B'C' = 4/3
	**Definizione 2.ª** Due classi di grandezze geometriche si dicono *inversamente proporzionali* se, essendo in corrispondenza biunivoca, sono tali che, considerate due grandezze qualsiasi della prima A e B e le corrispondenti A' e B' della seconda, si abbia **A : B = B' : A'**. *Esempio:* le basi e le altezze di due rettangoli equivalenti sono inversamente proporzionali. Se ABCD eq. A'B'C'D' si avrà che BC:B'C'= A'B':AB Si dimostra passando dalla proporzione fra grandezze a quella fra numeri, per mezzo della Iª proprietà, e tenendo, poi, conto della Iª proprietà delle grandezze variabili inversamente proporzionali.

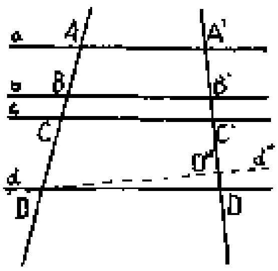
Teorema di Talete



Teorema di Talete. Se più parallele sono segate da due trasversali, due segmenti qualsiasi dell'una sono proporzionali ai segmenti corrispondenti dell'altra.
ipotesi: *a* || *b* || c || *d; r, s* trasversali   Tesi: AB:CD= A'B':C'D'

Si suppone AB / CD = m / n (nella nostra figura m / n = 3 / 4)

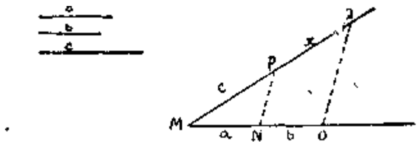
Si divide AB in m e CD in *n* parti che risultano tutte uguali. Tracciando poi, dai punti di divisione, delle rette parallele ad *a, b, e, d,* i segmenti A' B' e C'D' risultano divisi rispettivamente in m ed in *n* parti eguali. (Teorema 2°. Applicazioni, Tavola XVI). Ciò vuol dire che
A' B' / C'D' = *m* / *n*



Teorema inverso di Talete. Date quattro rette che segano su due trasversali segmenti direttamente proporzionali, se tre di esse sono parallele anche la quarta è parallela alle altre tre.
Si dimostra per assurdo, cioè supponendo *d* non parallela alle altre e tracciando *d'* parallela, la quale incontra *s* in D" che, per il teorema diretto, deve coincidere con D'.
Corollario. Se, dato un triangolo, si conduce una retta parallela ad un lato, essa divide gli altri due in parti proporzionali (e reciprocamente).

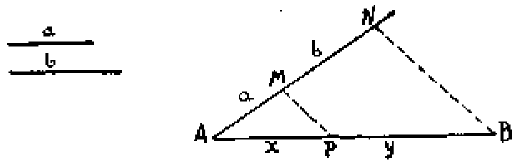
Applicazioni

Problema 1.° Costruire il quarto proporzionale dopo tre segmenti dati.



Su un lato di un angolo arbitrario, a partire dal vertice M, si portano successivamente due segmenti MN = *a* ed NO = b, mentre sul secondo lato si porta MP = c ; si congiunge P con N e da O si traccia la parallela a PN. Il segmento PQ è il quarto proporzionale per il teorema di Talete :
MN : NO = MP: PQ ossia ***a: b* = c : x.**

Problema 2.° Dividere un segmento in parti proporzionali ad altri due segmenti dati.

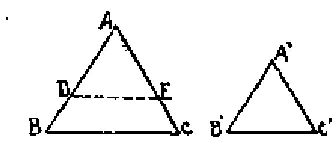


Dato il segmento A B e i due segmenti *a e b,* si portano successivamente, su una semiretta arbitraria, AM = *a* e MN = *b;* si congiunge N con B e da M si traccia la parallela ad NB fino ad incontrare AB in P. I segmenti AP e PB sono quelli richiesti, per il teorema di Talete.

Triangoli simili

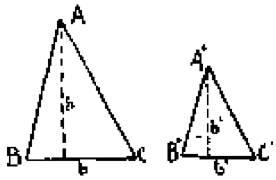
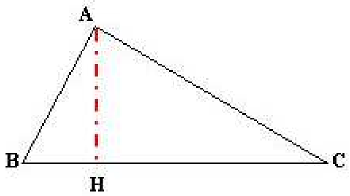
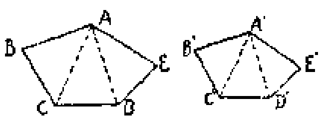
Definizione.

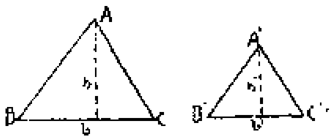
Due triangoli si dicono *simili* quando hanno gli angoli ordinatamente uguali ed i lati opposti a questi angoli in proporzione.



Teorema 1.° *(Primo criterio di similitudine).* Se due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali sono simili (cioè hanno i lati opposti proporzionali).
Ipotesi: À = A'; B = B', C = C'   Tesi: AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'

Per la dimostrazione si suppone AB > A'B' e si porta su AB un segmento AD = A'B'. Tracciando poi da D la parallela a BC si ottiene il triangolo ADE = A'B'C'. Per il teorema di Talete si ha AB:AD = AC:AE quindi AB : A'B' = AC : A'C'. Analogamente si dimostra per il terzo lato.

	Teorema 2.° *(Secondo criterio di similitudine).* Se due triangoli hanno un angolo eguale e i lati che lo comprendono proporzionali, sono simili (V. fig. prec). Ipotesi: A = A'; A B: A' B' = A C: A' C' Tesi: ABC simile ad A'B'C' Per la dimostrazione si suppone AB > A'B' e si porta AD = A'B' ed AE = A'C', per cui il triangolo AED sarà eguale ad A'B'C'. Ma tenendo conto dell'ipotesi, si può scrivere AB:AD = AC:AE, il che vuoi dire che DE è parallela a BC. Allora ADE è simile ad ABC per cui anche A'B'C' è simile ad ABC.
	Teorema 3.° *(Terzo criterio di similitudine).* Se due triangoli hanno i lati ordinatamente proporzionali sono simili. (V. fig. precedente). Ipotesi: AB / A'B' = BC / B'C' = AC / A'C' Tesi; ABC simile A' B' C' Supponendo AB maggiore di, si porta AD = A'B' ed AE = A'C', *e* si congiunge E con D. Avendo, per ipotesi: AB: A'B' = AC: A'C', si avrà pure AB : AD = AC : AE, per cui sarà DE || BC. Allora il triangolo ABC sarà simile a ADE; perciò si avrà AB:AD = BC: DE; ma essendo, per ipotesi, vera la seguente proporzione AB : A'B' = BC : B'C', dovrà essere B'C' = DE. Il triangolo ADE sarà, dunque, eguale ad A'B'C', il quale perciò, sarà simile ad ABC.
	***Corollario* 1.°** Se due triangoli sono simili lo altezze sono proporzionali alle rispettive basi. Infatti le altezze dividono i triangoli dati in triangoli simili, AB / A'B' = h /h' ma per ipotesi AB / A'B' = b / b', per cui h /h' = b / b'.
	***Corollario* 2.°** In ogni triangolo rettangolo: 1°Un cateto è medio proporzionale fra tutta la ipo tenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa; 2° L'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale, fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. (1°e 2°Teorema di Eucl ide). Per la prima parte si considerano i triangoli ABH ed ABC; simili per aver gli angoli uguali (BAH = BCA perché complementi di uno stesso angolo), perciò BC:BA = BA:BH. Per la seconda parte si considerano i triangoli ABH e CHA, simili per avere gli angoli uguali; perciò BH: AH = AH : HC.
Poligoni simili	
Definizione.	Due poligoni si dicono *simili* se hanno gli angoli uguali, e i lati, intorno a questi angoli, (lati *corrispondenti* od *omologhi*) ordinatamente proporzionali
	**Teorema 1.°** Se in due poligoni simili si conducono, da due vertici corrispondenti tutte le diagonali possibili, i poligoni rimangono divisi in triangoli ordinatamente simili. Per la dimostrazione si osserva che i triangoli ABO e A'B'C' sono simili per il secondo criterio di similitudine. Analogamente si può dire per i triangoli AED e A'E'D', mentre gli altri triangoli risultano simili per avere gli angoli eguali come differenze di angoli eguali.
	Teorema 2.° I perimetri di due poligoni simili stanno fra loro come due lati corrispondenti. Per la dimostrazione (v. fig. precedente) si ricorda che i lati corrispondenti sono proporzionali: AB : A'B' = BC:B'C'... ecc, e si applica a questa serie di rapporti uguali il teorema « data una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente ».



1

Teorema 3.° Due poligoni simili (ossia le loro aree) stanno fra loro come i quadrati di due lati corrispondenti.
Sì dimostra prima la proprietà per i triangoli, ricordando per il primo corollario

$h / h' = b / b'$ perciò **$hb / h'b' = (b / b')(b / b')$**

e quindi **$\frac{1}{2} bh / \frac{1}{2} b'h' = b^2 / b'^2$** ossia

$$ABC / A'B'C' = b^2 / b'^2$$

Per dimostrare la proprietà per i poligoni (V. fig. teorema 1°) si scompongono i poligoni in triangoli e si osserva che

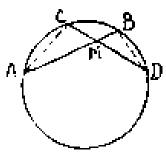
$ABC / A'B'C' = AB^2 / A'B'^2$;

$ACD / A'C'D' = CD^2 / C'D'^2$; $ADE / A'D'E' = DE^2 / D'E'^2$

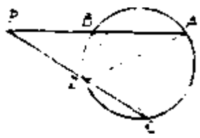
Ma poiché i lati sono in proporzione, lo sono anche i loro quadrati; perciò $ABC / A'B'C' = ACD / A'C'D' = ACD / A'D'E'$ e, per la proprietà applicata nel Teorema 2°, si avrà:

$$ABCDE / A'B'C'D'E' = AB^2 / A'B'^2$$

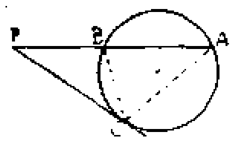
Applicazioni



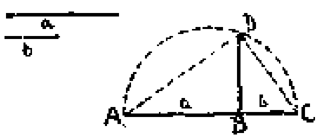
Teorema 1.° Due corde di un cerchio che si tagliano si dividono in parti inversamente proporzionali.
Si dimostra osservando che i triangoli AMC e DMB sono simili per avere gli angoli uguali perché inscritti in archi uguali.
Perciò: **AM : MD = MC : M B**.



Teorema 2.° .Se da un punto esterno ad un cerchio si conducano due secanti, le intere secanti sono inversamente proporzionali alle loro parti esterne.
Si dimostra osservando che i triangoli PAD e PCB sono simili per cui
PA : PC = PD : PB.

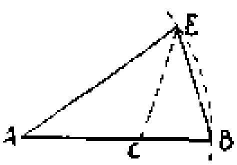


Teorema 3.° Se da un punto esterno ad un cerchio si conduce una tangente e una secante, la tangente è media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.
Si dimostra osservando che i triangoli PCA e PBC sono simili, per cui
PA : PC = PC : PB.

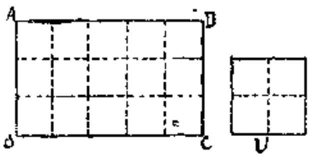


Problema 1.° Costruire il medio proporzionale fra due segmenti dati.
Si portano successivamente i due segmenti dati in AB e BC. e si costruisce una semicirconferenza di diametro AC. Si innalza da B una perpendicolare, che incontra la semicirconferenza in D. Il segmento BD è quello richiesto, poiché, per il corollario 2° sui triangoli simili s i ha AB : BD = BD : BC.

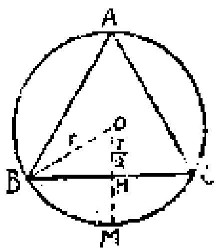
Problema 2.° Costruire la *sezione aurea* di un segmento, cioè dividere un segmento in media ed estrema ragione (si chiama *sezione aurea* di un segmento quella parte del segmento media proporzionale fra tutto il segmento e la parte rimanente).
Dato il segmento AB si innalza da B una perpendicolare BC = 1/2 AB. Centrando in C e con raggio CB, si traccia una circonferenza; la retta AC incontra questa circonferenza in D e E. Con centro in A e raggio AD si traccia l'arco DF; AF è la sezione aurea. Difatti per il Teorema 3° si ha:
AE:AB = AB:AD, e per il dividendo (AE — AB) : AB = (AB — AD) : AD; ossia AD : AB = FB : AD; invertendo e ricordando che AD = AF si ha
AB : AF = AF : FB.

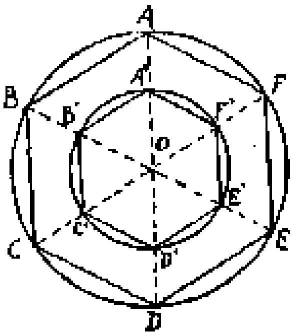


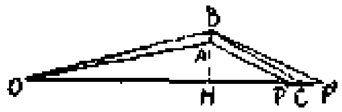
Problema 3.° Costruire il decagono regolare inscritto in una circonferenza.
Si osserva che basterà dimostrare che il lato del decagono regolare è la sezione aurea raggio. E cioè che, se
AB : BE = BE : CB
essendo CB = (AB — BE), è BAE= 1/10 di 360°.

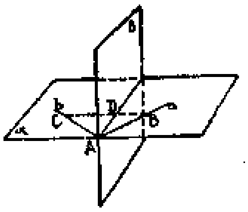
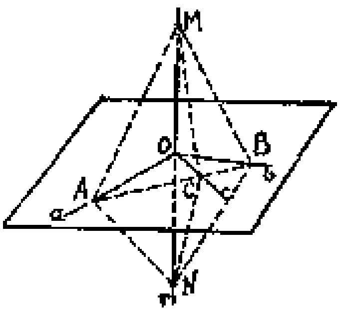
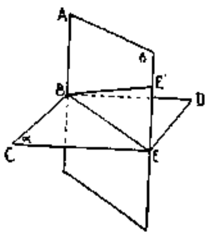
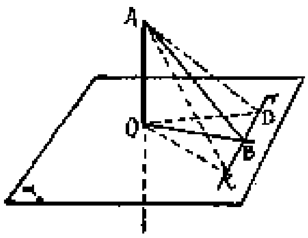
Lunghezza dei segmenti e ampiezza degli angoli	
Definizione I.ª	Si chiama *lunghezza di un segmento* la sua misura rispetto ad un determinato segmento, preso come unità di misura. L'unità di lunghezza dei segmenti è nella pratica il *metro (m),* il cui campione è segnato dallo spigolo di un regolo di platino iridiato, conservato al « Bureau international des Poids et Mesures » di Sèvres, presso Parigi. Il metro campione fu costruito eguale alla quarantamilionesima parte del meridiano terrestre, quale risultava dalle misurazioni compiute per l'arco di meridiano compreso fra Dunkerque e Barcellona dal Delambre e dal Mechain, fra il 1793 e il 1799.
Definizione 2.ª	Si chiama *ampiezza dì un angolo* la sua misura rispetto ad un angolo fisso preso come unità di misura. L'unità di misura degli angoli è il *grado* (1°) eguale alla centottantesima parte aliquota dell'angolo piatto. L'ampiezza degli angoli si misura mediante un semicerchio graduato chiamato *rapportatore*
Area dei poligoni	
Definizione I.ª	Si chiama *area* di un poligono la sua misura rispetto ad una superficie fissa chiamata unità di misura di superficie. L'unità di misura delle superfici è il *metro quadrato,* cioè un quadrato che ha per lato un metro. ***Corollario.*** Poligoni equivalenti hanno area eguale e viceversa poligoni aventi aree uguali sono equivalenti.
Area del rettangolo.  	***Regola***. L'area di un rettangolo si trova moltiplicando fra loro le lunghezze dei lati *(base* ed *altezza* ossia *dimensioni).* Se A = area, *b* = base e *h* = altezza si avrà A = *b* x *h* da cui *b = A / h* ; *h = A / b* Per ricavare questa regola si considerano le dimensioni BC = m /n U'. (nella figura m/n = 5 / 2) e AB = p / n U (nella figura p / n = 3 / 2*).* Si dividono i lati rispettivamente in *m* ed in *n* parti uguali (ciascuna eguale a (1 / n) U) e si tracciano dai punti di divisione le parallele agli altri lati. Il rettangolo risulta così diviso in *mXp* parti eguali, ciascuna eguale a $1/n^2$ del quadrato di U. (nel nostro caso in 15 parti ciascuna eguale a 1 / 4 del quadrato di *U),* per cui l'area di ABCD è (mp) / n^2 = (m/n) (p/n) (nel nostro caso l'area è 15/4- = (5/2) (3/2) cioè è data dal prodotto delle due dimensioni.ì
Area del quadrato.	***Regola.*** Per trovare l'area di un quadrato si moltiplica per se stessa la lunghezza di un lato Se *l* = lunghezza del lato **A = l^2** ; da cui **l = √A**
Area del parallelogramma.	***Regola.*** L' area di un parallelogramma si ottiene moltiplicando la base per l'altezza. ***A = b X h,*** da cui ***b = A / h ; h = A / b*** Difatti un parallelogramma è equivalente ad un rettangolo con la stessa base e la stessa altezza.
Area del triangolo.	***Regola.*** L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto della base per l'altezza. **A = bh/2 ;** *da cui* ***h = (2A)/b b = (2A)/****h* Difatti un triangolo è equivalente a un parallelogramma che ha la stessa base e metà altezza.
Area del trapezio.	***Regola.*** L'area di un trapezio è uguale al prodotto della semisomma delle basi per l'altezza. Se *b* = base maggiore e *b'* = base minore **A = (b + b')/2 x *h***, da cui ***h = (2A) / (b + b')*** *;* ***b = [(2A) /h] – b'*** Difatti un trapezio è equivalente ad un triangolo che ha per base la somma delle basi e la stessa altezza.
Area del poligono regolare.	***Regola.*** L'area di un poligono regolare si trova moltiplicando il perimetro per metà dell'apotema. Se *a* = apotema e 2p = perimetro abbiamo **A =(2p) a/2**, da cui **A = pa** (semiperimetro per apotema), quindi **a =A /p** e **p = A/a** Difatti un poligono regolare è equivalente a un triangolo avente per base il perimetro e per altezza l'apotema

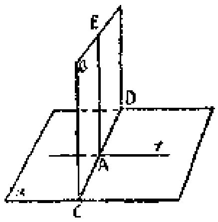
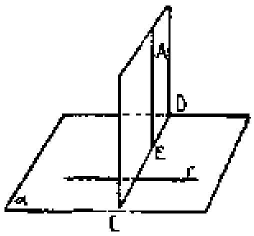
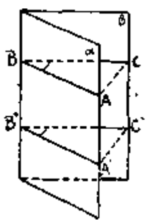
Applicazioni del teorema di Pitagora

I.ª Ricerca di un lato di un triangolo rettangolo.	a)Date le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo, si trova quella dell'ipotenusa, estraendo la radice quadrata dalla somma dei quadrati dei cateti. $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ *b)*Data la lunghezza dell'ipotenusa e quella di un cateto si trova la lunghezza dell'altro cateto estraendo la radice quadrata dalla differenza fra il quadrato dell' ipoteuusa e quello del cateto dato. $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
2.ª Diagonale del rettangolo.	La diagonale di un rettangolo si può considerare ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti i due lati. $d = \sqrt{b^2 + h^2}$
3.ª Diagonale del quadrato.	La diagonale di un quadrato si ottiene moltiplicando il lato per la √ 2. $d = \sqrt{(l^2 + l^2)} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$; viceversa $l = d / \sqrt{2}$
4.ª Altezza del triangolo isoscele	L'altezza di un triangolo isoscele si può considerare cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa uno dei lati eguali e per altro cateto metà della base. $h = \sqrt{l^2 - (b/2)^2}$
5.ª 'Altezza e area del triangolo equilatero.	L'altezza di un triangolo equilatero è cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il lato e per altro cateto metà lato. $h = \sqrt{l^2 - (l/2)^2} = \sqrt{l^2 - l^2/4} = \sqrt{(4l^2 - l^2)/4} = \sqrt{(3l^2)/4} = (l/2)\sqrt{3}$ Area $A = lh/2 = [l(l/2)\sqrt{3}]/2 = (l^2\sqrt{3})/4$
6.ª Lato del triangolo equilatero inscritto in un cerchio di dato raggio 	Esso è il doppio del cateto d un triangolo rettangolo, avente per ipotenusa il raggio e per un cateto metà raggio. È perciò uguale ad $r\sqrt{3}$ $BH = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = \sqrt{r^2 - r^2/4} = \sqrt{(4r^2 - r^2)/4} = \sqrt{(3r^2)/4} = (r/2)\sqrt{3}$ $BC = 2BH = 2\,[\,(r\sqrt{3})/2\,] = r\sqrt{3}$
7 ª Lato del quadrato inscritto in un cerchio.	È l'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele avente per cateti due raggi ed è uguale ad $r\sqrt{2}$
8.ª Formula di Erone.	Essa permette di trovare l'area un triangolo dati i tre lati. (area) $A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ dove $p = (a + b + c) / 2$

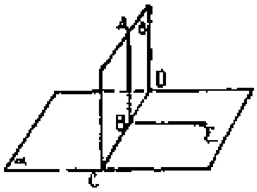
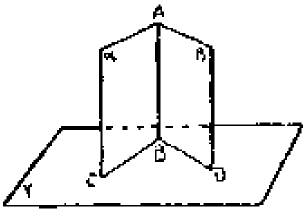
Lunghezza della circonferenza	
Definizione I.[a]	Dicesi *circonferenza rettificata* un segmento maggiore dei perimetri di tutti i poligoni inscritti e minore di quelli dei poligoni circoscritti. Si chiama *lunghezza della circonferenza* la misura di questo segmento. ***Osservazione***. Per giungere al concetto di circonferenza rettificata, si inscrivono e circoscrivono ad una circonferenza dei poligoni regolari, e si fanno le seguenti osservazioni: a) il perimetro di ogni poligono inscritto è minore di quello di ogni poligono circoscritto, b) aumentando il numero dei lati il perimetro del poligono inscritto aumenta, mentre quello di un poligono circoscritto diminuisce, in modo che la differenza fra il perimetro di un poligono inscritto e quello del poligono circoscritto di egual numero di lati può diventare piccola quanto si vuole. Se, su di una retta, a partire da un dato punto O, si portano, da una stessa parte, i perimetri OM_1 OM_2, ecc, dei poligoni inscritti, e i perimetri ON_1, ON_2, ecc. dei poligoni circoscritti il cui numero di lati è crescente (per es. di 4, 8, ecc. lati), si osserva che i punti M_1 M_2, ecc. sono tutti a sinistra dei punti N_1 N_2, ecc. ; e che $M_1 N_1 > M_2 N_2 > M_3 N_3$, ecc.  Il *postulato delle continuità* ci permette di asserire che esiste un punto C tale che O M_1, OM_2 ; ecc. < O C < ON_1, ON_2, ON_3, ecc. ; e che inoltre questo punto C è l'unico che goda di questa proprietà ; perciò il segmento OC può considerarsi la circonferenza rettificata.
	**Teorema.** Due circonferenze rettificate sono proporzionali ai rispettivi raggi e quindi anche ai rispettivi diametri. Si dimostra osservando che due poligoni regolari, di egual numero di lati, inscritti o circoscritti a due circonferenze date sono simili; quindi i loro perimetri sono proporzionali ai raggi delle due circonferenze. Perciò anche le circonferenze, che sono elementi di separazione fra i perimetri dei poligoni inscritti e «vielli dei poligoni circoscritti, saranno proporzionali ai raggi e ai diametri. Se C e C' sono due circonferenze **C : C' = r : r'** e perciò anche ***C/2r = C'/ 2r'*** ***Corollario.*** Il rapporto fra una circonferenza rettificata e il suo diametro è costante.
Definizione 2.[a]	Si chiama π (pi greco) il rapporto costante fra una circonferenza e il suo diametro. $C / 2r = \pi$
Lunghezza della circonferenza.	***Regola.*** Per trovare la lunghezza di una circonferenza si moltiplica il diametro per π $C = 2 \pi r$; viceversa $r = C / 2 \pi$ ***Valore di π.*** Per calcolare il valore di π si considera una circonferenza che ha un metro di diametro, poiché se $2r = 1$, $C = \pi$. Dunque π è la lunghezza della circonferenza che ha un metro di diametro. Il valore approssimato di π si ottiene inscrivendo e circoscrivendo, a detta circonferenza, dei poligoni regolari di 6, 12, 24. ecc. lati. Si osserva allora che, a meno di 1 centesimo, il perimetro del poligono inscritto di 96 lati coincide con quello circoscritto pure di 96 lati. E poiché il perimetro di un poligono di 96 lati, inscritto in una circonferenza il cui diametro è di 1 m., misura m. 3,14..., si dirà che 3,14 è il valore di π approssimato a meno di 1 centesimo π **= 3, 141592653589793238462**
Lunghezza di un arco.	La lunghezza di un arco, di cui è nota l'ampiezza α, si può trovare stabilendo una proporzione, poiché archi ed angoli al centro sono direttamente proporzionali. **$2\pi r : 360° = arco : \alpha$(ampiezza),** da cui **$arco = 2\pi r \alpha / 360 = \pi r \alpha / 180$** Con la stessa proporzione si risolvono i problemi inversi.

Area del cerchio	
Definizione	Si chiama *area del cerchio* l'area di un poligono equivalente al cerchio, e cioè prevalente a tutti i poligoni regolari inscritti e suvvalente a tutti quelli circoscritti.
	**Teorema.** Un cerchio è equivalente ad un triangolo avente por base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio. A partire da un punto O di una retta si porta OP = perimetro di un poligono regolare inscritto e OP' = perimetro di un poligono circoscritto qualsiasi, ed OC = circonferenza rettificata. Il triangolo OAP, avente per base OP e per altezza HA = apotema del poligono inscritto considerato, è sempre suvvalente al triangolo OBC, avente per base OC e per altezza il raggio, per avere sempre minor base e minore altezza, il triangolo OBP' è sempre prevalente al triangolo OBC per avere sempre maggior base. Il triangolo OBC è dunque equivalente al cerchio perché soddisfa alla definizione.
Area del cerchio.	**Regola**. L'area del cerchio si trova moltiplicando il quadrato del raggio per π (3,14...). Difatti, per il teorema precedente, area $\mathbf{A = 2\pi\, r\, r/2 = \pi\, r^2}$; viceversa $\mathbf{r = \sqrt{A/\pi}}$ **Corollario.** Due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi. $$\mathbf{c:c' = r^2 : r'^2}$$ Difatti $c = \pi\, r^2$ e $c' = \pi\, r'^2$; perciò $\mathbf{c/c' = \pi\, r^2 / \pi\, r'^2 = r^2 / r'^2}$
Area del settore circolare.	***Regola.*** L'area di un settore circolare è eguale a quella di un triangolo avente per base l'arco rettificato e per altezza il raggio. **Settore = (arco)** $\boldsymbol{r/2}$ e poiché **arco =** $\boldsymbol{\pi\, r\, \alpha / 180}$ si può anche dire che **Settore =** $\boldsymbol{(\pi\, r\, \alpha / 180)\,(r/2) = \pi\, r^2\, \alpha / 360}$ la formula si può anche ottenere dalla seguente proporzione $\boldsymbol{\pi\, r^2 : 360 = \text{settore} : \alpha}$. Invertendo la formula trovata, o servendoci di questa ultima proporzione, si possono risolvere i problemi inversi della ricerca dell'ampiezza di un dato settore o del raggio del cerchio cui appartiene. $\boldsymbol{\alpha = (\text{settore} \times 360) / \pi\, r^2}$ $\boldsymbol{r = \sqrt{(\text{settore} \times 360) / \pi\, \alpha}}$

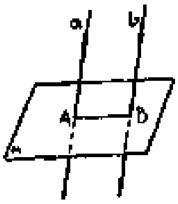
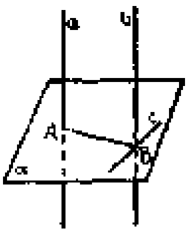
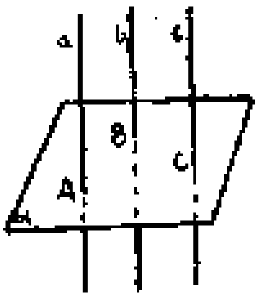
	Definizioni e principi fondamentali
Definizione di stereometria.	Si chiama *stereometria* la parte della geometria che studia le proprietà delle *figure solide* cioè di quelle figure i cui punti possono anche non giacere tutti in uno stesso piano.
Postulato dello spazio.	Un piano divide lo spazio in due parti *{bande* o *semispazi)* contenenti ciascuna infiniti punti in modo che: *a)* un punto dello spazio fuori del piano appartiene all'una o all'altra parte; *b)* due punti di una stessa banda sono estremi di un segmento che non incontra il piano ; c) due punti situati in bande opposte sono estremi di un segmento che incontra il piano.
	**Teorema.** Due piani aventi in comune un punto hanno in comune tutta una retta passante per quel punto. Ip. α e β hanno in comune A Tesi: α e β hanno in comune una retta *r* passante per A. Per la dimostrazione si conducono in α, a partire da A, due rette *a* e *b,* e su di esse si prendono due punti B e C situati da bande opposte rispetto a β*;* il segmento BC incontra β in un punto D, per cui i piani α e β hanno in comune la retta AD.
	Rette e piani perpendicolari
Definizione.	Una retta si dice *perpendicolare ad un piano* quando è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il suo punto d'incontro con essa *(piede).* Si dirà che il piano è *perpendicolare alla retta.*
	**Teorema** 1.° Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano passanti per il suo punto d'incontro col piano, è pure perpendicolare a tutte le altre rette del piano passanti per quel punto (condizione sufficente perché una retta sia perpendicolare ad un piano). Ip. : *r* ⊥ *a, b; e* retta di α passante per O, Th. *r* ⊥ c. Per la dimostrazione si prendono i punti M ed N equidistanti da O sulla retta *r* e si congiungono coi punti A e B presi arbitrariamente su *a* e *b.* Poi si congiunge A con B ed M ed N col punto C di incontro della AB con *c.* Essendo AO asse del segmento MN sarà MA = NA e, per ragione analoga, sarà pure MB = BN. Per conseguenza MAB = NAB per avere i tre lati uguali. Allora MAB = NAB si che MAC = NAC; da cui si deduce MC=NC. Il triangolo MNC è dunque isoscele, per cui CO, che è mediana della base MN, è pure altezza ; il che vuoi dire che *r* ⊥ c.
	Teorema 2.° Tutte le perpendicolari ad una retta in un punto giacciono in uno stesso piano. Tracciate le rette BC e BD, perpendicolari ad AB, si considera il piano da esse formato e si dimostra che ogni altra retta perpendicolare ad A B nel punto B giace un α. Difatti se esistesse una retta BE' perpendicolare ad AB e non giacente in α, il piano β formato da AB e da BE' incontrerebbe α secondo BE la quale dovrebbe pure essere perpendicolare ad AB il che è assurdo.
	**Teorema 3.°** Per un punto passa un piano ed uno solo perpendicolare ad una retta data. Se il punto sta sulla retta vale la costruzione fatta nel teorema precedente. Se il punto sta fuori della retta si abbassa da questo punto la perpendicolare e poi si ripete la costruzione precedente. Si dimostra poi per assurdo che questo piano è unico.
	**Teorema** 4.° *(teorema delle tre perpendicolari).* Se dal piede di una retta perpendicolare ad un piano si conduce una retta nel piano, ogni terza retta del piano, la quale sia perpendicolare alla seconda, è perpendicolare al piano delle prime due. Ip. AO ⊥ α; OB retta di α; *r* ⊥ OB. Tesi *r* ⊥ al piano AOB ossia alla retta AB. Per la dimostrazione si prendono C e D, equidistanti da B sulla retta *r,* e si congiungono con O e con A. Dalla considerazione di tre coppie di triangoli uguali OBC = OBD, OAC=OAD, ABC=ABD si deduce che AB ⊥ CD.

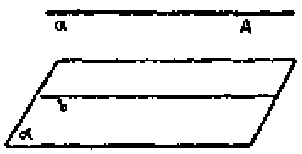
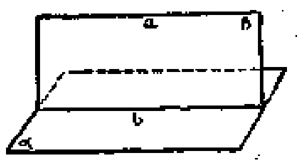
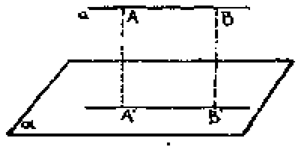
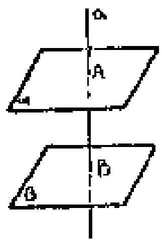
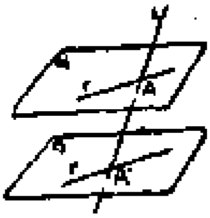
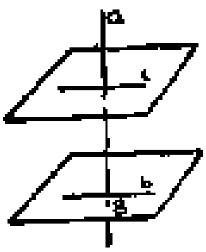
 1° Caso  2° Caso	**Teorema 5.°** Per un punto passa una retta, ed una sola, perpendicolare ad un dato piano. Si distinguono due casi: 1°il punto è sul piano; 2°il punto è fuori del piano. In entrambi vale la seguente costruzione : si conduce una retta *r* del piano, quindi si costruisce un piano β, passante per A e perpendicolare ad *r,* e poi da A si traccia la perpendicolare all'intersezione CD di α con β ottenendo AE perpendicolare ad α, nel primo caso per il teorema 1°, e nel secondo per il teorema delle tre perpendicolari. Si dimostra, poi, per assurdo che questa retta è unica.
Definizione.	Si chiama *distanza di un punto da un piano* il segmento, di perpendicolare al piano, compreso fra il punto e il piano stesso.
Angolo di una retta con un piano.	**Teorema.** L'angolo, che una retta obliqua ad un piano forma con la sua proiezione sul piano (cioè con la retta che congiunge il suo punto d'incontro col piede della perpendicolare condotta da un punto qualunque di essa, al piano), è minore di tutti gli angoli che la retta forma con le altre rette del piano *(angolo della retta col piano).*
Diedri	
Definizione I.ª	Si chiama *diedro* ciascuna delle quattro parti in cui viene diviso lo spazio da due piani che si segano. La retta d'intersezione si chiama *spigolo.* I due semipiani che limitano un diedro si dicono *facce.* Sui diedri si possono ripetere tutte le definizioni date sugli angoli cambiando la parola vertice in spigolo, e la parola lato in faccia. Si avranno perciò diedri *consecutivi, adiacenti,* ecc.
Definizione 2.ª	Si dice *sezione normale* di un diedro l'angolo che si ottiene considerando le intersezioni delle due facce del diedro con un piano perpendicolare allo spigolo.
	**Teorema 1.°** Tutte le sezioni normali di un diedro sono eguali. Costruite due sezioni normali in B e B' si prendono BA = B'A' e BC = B'C' Dalla considerazione dei tre parallelogrammi BB' AA', BB' C'C, AA'C'C si deduce l'eguaglianza dei due triangoli ABC e A'B'C', per cui anche gli angoli in B e in B' saranno eguali.
Definizione 3.ª	Due diedri si dicono *eguali* se hanno le sezioni normali eguali
Definizione 4.ª	Due sezioni qualsiasi di un diedro o di due diedri distinti si dicono *egualmente inclinate,* se formate da semirette le quali formano angoli ordinatamente eguali con lo spigolo o con gli spigoli.
	Teorema 2.° In due diedri uguali o in uno stesso diedro sezioni ugualmente inclinate sono eguali e, viceversa, due diedri, che abbiano sezioni egualmente inclinate eguali, sono eguali. Si dimostra facendo notare che, se sono eguali le sezioni normali di due diedri o di uno stesso diedro, sono pure eguali le sezioni egualmente inclinate e viceversa

Piani perpendicolari

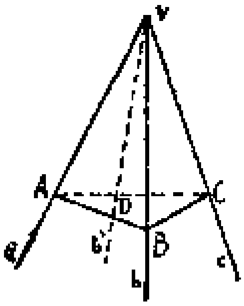
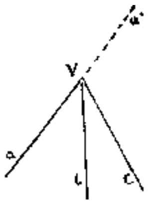
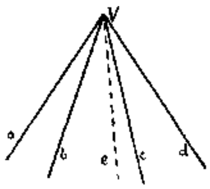
Definizione.	Due piani si dicono *perpendicolari* se formano un diedro retto (cioè tale che la sua sezione normale sia un angolo retto).
	**Teorema 1.°** Ogni piano passante per una retta perpendicolare ad un piano è anch'esso perpendicolare al piano. Ip. A B ⊥ α; β passante per AB. Tesi: β ⊥ α Difatti, conducendo BE perpendicolare all'intersezione CD di β con α, si osserva che ABE è la sezione normale del diedro α, β e, poiché AB ⊥ α, è pure AB ⊥ BE, onde questa sezione normale è un angolo retto, e cioè β ⊥ α.
	Teorema 2.° Se due piani sono perpendicolari ogni retta, giacente su uno e perpendicolare all'intersezione, è pure perpendicolare all'altro (V. fig. precedente). Ip. β ⊥ α ; AB ⊥ CD Tesi: AB ⊥ α. Difatti, tracciando BE perpendicolare a CD si ottiene ABE sezione normale del diedro α, β. Ma, essendo α ⊥ β, questa sezione normale è un angolo retto, quindi AB ⊥ BE e perciò AB ⊥ α.
	**Teorema** 3.° Se due piani si segano e sono perpendicolari ad uno stesso piano, la loro intersezione è pure perpendicolare a questo terzo piano. Ip. α ⊥ γ ; β ⊥ γ AB intersezione α, β. Tesi: AB ⊥ γ. Infatti, se, da un punto A dell'intersezione, si vuole condurre una perpendicolare a', si dovrà condurla perpendicolare all'intersezione CB. Analogamente una retta di β passante per A e ⊥ γ all'intersezione BD di β con γ. Ma poiché per un punto passa una sola perpendicolare ad un piano, l'intersezione AB di α con β è ⊥ γ.

Rette parallele

Definizione.	Due rette nello spazio si dicono *parallele* se giacciono in uno stesso piano e non hanno punti in comune
	**Teorema** 1,°Se un piano interseca una retta, interseca ogni sua parallela. Ip. a || b, a incontra α. Tesi : *b* incontra α. Infatti *a e b* individuano un piano il quale incontra α in A e perciò in una retta, che, avendo in comune con α, un punto A, deve avere pure in comune con *b* un punto B.
	**Teorema** 2.° Se una retta è perpendicolare ad un piano ogni sua parallela è pure perpendicolare a quel piano. Ip. a ⊥ α ; *a* || b. Tesi: *b* ⊥ α . Difatti, se per il punto B d'incontro di *b* con α , si conduce c perpendicolare ad AB, risulta c perpendicolare al piano *a* AB, per il teorema delle tre perpendicolari. Ma in questo piano giace *b,* perciò b ⊥ c, e quindi *b* ⊥ α, poiché già b ⊥ AB.
	**Teorema 3.°** Se due rette sono perpendicolari ad uno stesso piano, sono parallele. (V. figura precedente). Ip. : *a* ⊥ α; b ⊥ α Tesi: a II *b.* Infatti, condotta per B la retta c perpendicolare ad AB, si osserva che c ⊥ aAB; ma, poiché *b* ⊥ α è pure *b* ⊥ c , perciò b giace nel piano *a AB,* cioè è complanare con *a.* E allora poiché *a* e *b* sono perpendicolari alla stessa retta A B, sono parallele. ***Corollario.*** Due rette parallele ad una terza, sono parallele fra loro. Ip. *a* || *b ; a* || c. Tesi: b II c. Difatti, condotto α perpendicolare ad *a,* è α ⊥ *b,* e α ⊥ c; quindi *b* e c perpendicolari entrambe ad α sono parallele.

Rette parallele a piani	
Definizione.	Una retta ed un piano si dicono *paralleli* quando non hanno alcun punto in comune.
	**Teorema 1.°** Una retta parallela ad una retta di un piano e passante per un punto esterno è parallela al piano, (condizione sufficiente di parallelismo). Ip. *a* ‖ *b* e passante per A esterno ad α; *b* giacente su α. Tesi a ‖ α. Infatti, poiché *a* giace sul piano A *b,* non può avere alcun punto in comune con α poiché in caso contrario dovrebbe averne anche con *b,* intersezione di A b con α, contro l'ipotesi.
	**Teorema 2.°** Se, per una retta parallela ad un piano, si fa passare un piano che incontri il piano dato, l'intersezione di questi due piani è parallela alla retta data. Ip. a ‖ α ; Β passante per *a* e segante α in *b.* Tesi: a ‖ b. Infatti essendo *a* e *b* sullo stesso piano, se *a* avesse un punto comune con *b,* tale punto sarebbe comune ad a e α contro l'ipotesi.
	**Teorema 3.°** Se una retta è parallela ad un piano tutti i suoi punti sono equidistanti dal piano. Ip. a ‖ α AA',BB' $\perp$ α. Tesi: AA' = BB'. Infatti il quadrilatero AA' B'B è un parallelogramma per avere i lati opposti paralleli, per cui AA' = BB'.
Definizione.	Si chiama *distanza* di una retta parallela ad un piano dal piano stesso, la distanza di un suo punto qualsiasi dal piano.
Piani paralleli	
Definizione.	Due piani si dicono *paralleli* quando non hanno nessun punto in comune.
	**Teorema 1.°** Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli. Ip. : α $\perp$ *a* ; β $\perp$ *a* Tesi: α II β. Si dimostra per assurdo; poiché, se α e β avessero un punto in comune, per un punto esterno ad una retta passerebbero due piani perpendicolari alla stessa retta. ***Corollario.*** Se un piano sega due piani paralleli le intersezioni sono parallele.
	**Teorema 2.°** Se due piani sono paralleli ogni retta che incontra uno incontra anche l'altro. Ipotesi: α ‖ β; *a* incontra α; Tesi: *a* incontra β Infatti, condotto un piano per *a* e per un punto qualsiasi di β, esso taglia α e β in due rette *r* ed *r'* parallele fra loro. Allora la *a,* incontrando *r,* deve pure incontrare *r'* e perciò β.
	**Teorema 3.°** Se due piani sono paralleli ogni retta perpendicolare all'uno è perpendicolare anche all'altro. Ip.: α ‖ β; *a* $\perp$ α; Tesi: a $\perp$ β Difatti una retta *b* qualsiasi condotta per il punto B, intersezione di *a* con β forma con la retta *a* un piano che sega α secondo una retta c parallela a b, e, poiché *a* è perpendicolare ad α e perciò a c, è anche perpendicolare a b e perciò a β.
	Teorema 4.° Per un punto fuori di una retta passa un piano ed uno solo parallelo alla retta data. Si costruisce questo piano tracciando per il punto dato una retta perpendicolare al piano e poi un piano perpendicolare a questa retta, e si dimostra per assurdo che questo piano è unico.

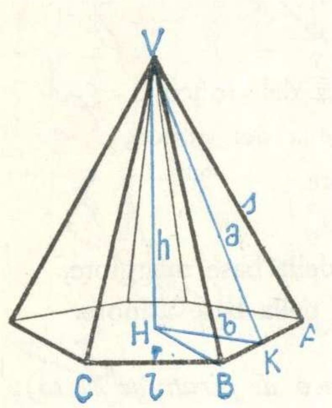
	Teorema 5.° Se due piani sono paralleli le distanze dei punti di ciascuno dall'altro sono eguali. Infatti queste distanze sono lati opposti di un parallelogramma.
Definizione.	Si chiama *distanza fra due piani paralleli,* la distanza di un qualsiasi punto dell'uno dall'altro.
	Rette sghembe
Definizione.	Si dicono rette *sghembe* due rette dello spazio non giacenti in uno stesso piano.
	Teorema. Date due rette sghembe esiste un segmento, ed uno solo, congiungente un punto dell'una con un punto dell'altra, e perpendicolare d entrambe *(distanza delle due rette sghembe).*

	Angoloidi :Triedri
Definizione.	Si chiama *triedro* l'insieme dei punti comuni ai diedri convessi determinati da tre semirette, uscenti da uno stesso punto e non giacenti in uno stesso piano, e dai piani formati da queste semirette due a due. Le semirette si dicono *spigoli*, il punto si dice *vertice*, e i piani (ossia gli angoli formati da due spigoli) si dicono *facce* del *triedro.*
	**Teorema 1.°** In un triedro ogni faccia è minore della somma delle altre due. Si può verificare intuitivamente supponendo di tagliare il triedro lungo uno spigolo b e di sovrapporre lo facce *ab* e *bc* alla faccia *ac* Si vedrà che esse si sovrappongono in parte fra loro, il che vuoi dire che *ac* < *ab* + *bc.* Si può anche dimostrare rigorosamente prendendo *ab'* = *ab,* congiungendo due punti qualsiasi A, C di *a o* c, e prendendo VB = VD. Si giungerà alla dimostrazione della tesi applicando al triangolo ABC il teorema: un lato è maggiore della differenza degli altri due.
	**Teorema 2.°** La somma delle facce di un triedro è minore di quattro retti. Si dimostra considerando il triedro *V bc a'* ed applicando ad esso il teorema precedente. ***b c* < *b a'* + c *a'*.** Aggiungendo ai due membri ***a b* + a c** si ottiene : ***ab* + *ac* + bc < *b a'* + *c a'* + *a b* + *a c*** ossia ***ab*+ *ac*+ *bc* < 360°,** poiché ***a b* + *b a'* = 180°** e ***a c* + *c a'* = 180°**
	Angolidi in generale
Definizione.	Si dice *angoloide* l'insieme dei punti comuni agli *n* diedri convessi determinati da *n* semirette, uscenti da uno stesso punto *(vertice)* (e di cui tre non giacenti nello stesso piano), e dai piani, formati da queste semirette due a due in un determinato ordine *(facce),* in modo che ciascun piano lasci le altre semirette tutte da una stessa parte.
	**Teorema** 1.°In un angoloide ogni faccia è minore della somm a delle altre. ***ab* < *bc* + *cd* + *dc* + *ea*** È generalizzazione del teorema 1°sui triedri.
	Teorema 2.°In ogni angoloide la somma delle facce è minore di quattro retti. È generalizzazione del teorema 2°sui triedri.

	Triedri uguali.
Definizione.	Due triedri si dicono *eguali* quando hanno le facce e i diedri ordinatamente eguali. ***Osservazione.*** Due figure geometriche solido si dicono eguali quando si può stabilire fra i loro punti una corrispondenza biunivoca tale che i segmenti determinati da punti corrispondenti siano eguali, e quindi lo figure si possano far coincidere.
Criteri di uguaglianza dei triedri.	**1.°** Due triedri sono eguali se hanno ordinatamente uguali due facce e il diedro compreso. **2.°** Due diedri sono eguali se hanno ordinatamente uguali due diedri e la faccia compresa. **3.°** Due diedri sono eguali se hanno ordinatamente eguali le tre facce. **4.°** Due diedri sono eguali se hanno ordinatamente eguali i tre diedri. Il primo e il terzo criterio si dimostrano osservando che le facce, non considerate nell'ipotesi, sono sezioni ugualmente inclinate dei diedri eguali, e perciò sono pure esse eguali, e che i diedri, non considerati, hanno per sezioni egualmente inclinate le facce eguali per ipotesi, e perciò sono pure essi eguali. Il secondo e il quarto si deducono rispettivamente dal primo e dal terzo cambiando la parola faccia in diedro e viceversa. Si giunge alla possibilità di tale cambiamento considerando dei *triedri polari* ai triedri dati, i quali si ottengono innalzando dai vertici dei triedri dati delle semirette perpendicolari alle facce dalla parte in cui si trova il terzo spigolo. Questi triedri polari godono di tre proprietà fondamentali: 1.°Se un triedro ò polare di un altro il secondo è polare del primo. 2.°Se due triedri sono polari l'uno dell'altro, le facce di uno sono supplementari ai diedri corrispondenti dell'altro. 3.°Triedri polari di triedri uguali sono uguali.
	Uguaglianza.
Definizione.	Due angoloidi si dicono eguali se, considerando gli spigoli in un determinato ordine, le facce e i diedri dell'uno sono rispettivamente eguali alle facce e ai diedri dell'altro.
	Poliedri Concetti generali
Definizione I,[a]	Dicesi *superficie poliedrica* ogni figura costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi, e che il piano di ciascun poligono lasci tutti gli altri da una stessa, parte. Questi poligoni si dicono *facce* della superficie poliedrica; i loro vertici e i loro spigoli si dicono *vertici* e *spigoli* della superficie poliedrica.
Definizione 2.[a]	Dicesi *poliedro* l'insieme dei punti comuni a tutti gli angoloidi aventi per vertici e per spigoli i vertici e gli spigoli di una superficie poliedrica. Si dicono *facce* del poliedro le facce di questo angoloidi, e *diedri del poliedro* i diedri di questi angoloidi.
Definizione 3.[a]	Due poliedri si dicono *eguali* se hanno ordinatamente eguali gli angoloidi e le faccie, ossia gli angoli, gli spigoli o i diedri.
Proprietà generali dei poliedri	***relazione di Eutero***. Il numero dei vertici (V), il numero delle faccie *(E)* e il numero degli spigoli" (S) di un poliedro qualsiasi sono legati fra loro dalla seguente relazione : **F + V= S +2**

Piramide

Definizioni

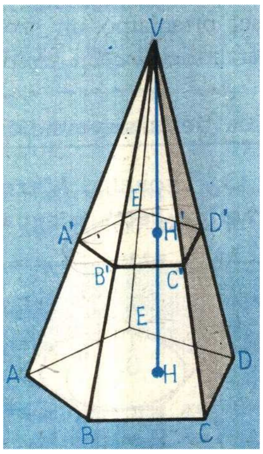


I.ª Dicesi *piramide* il poliedro che si ottiene tagliando un angoloide con un piano i non passante per il vertice.
2.ª Il vertice dell'angoloide si dice *vertice della piramide;* si chiama *base* il poligono sezione; si chiamano *spigoli* i segmenti che congiungono il vertice della piramide coi vertici del poligono di base; si dicono *facce laterali* i triangoli determinati dal vertice della piramide con due vertici consecutivi della base.
3.ª Si chiama *altezza* di una piramide la distanza del vertice dal piano di base.
4.ª Una piramide si dice *retta se* l'altezza cade nel centro del cerchio circoscritto alla base.
5.ª Una piramide si dice *regolare* se è retta ed ha per base un poligono regolare.
6.ª Si chiama *superficie laterale* di una piramide la somma delle facce laterali; *superficie totale* la somma della superficie laterale con quella della base.
7.ª Una piramide si dice *triangolare, quadrangolare,* ecc., secondo che ha per base un triangolo, un quadrilatero, ecc.
8.ª Si chiama *apotema di una piramide regolare* l'altezza di una delle facce laterali.
Osservazione. L'altezza di una piramide, l'apotema di base e l'apotema della piramide formano un triangolo rettangolo, come pure l'altezza, lo spigolo laterale e il raggio dal cerchio circoscritto alla base.
Se h = altezza VH ; *a* = apotema VK e b = apotema di base HK:

$$\mathbf{a^2 = h^2 + b^2}$$

Tronco di piramide

Definizioni



I.ª Si chiama *tronco di piramide* quel poliedro compreso fra la base di una piramide e un piano parallelo ad essa, condotto fra la base il vertice.
2.ª Si chiamano *basi del tronco di piramide* la base della piramide da cui si è ottenuto il tronco e il poligono sezione del piano parallelo; si chiama *altezza.* le distanza fra le due basi, e *apotema* l'altezza di una delle facce laterali.
3.ª *Un* tronco di piramide è *retto o regolare* se proviene da una piramide retta o regolare

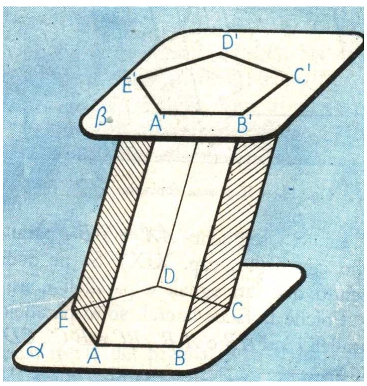
Teorema. Lo due basi di un tronco di piramide sono poligoni simili.

Si dimostra che i due poligoni ABCDE e A'B'C'D'E' sono simili, osservando che gli angoli sono eguali come sezioni ugualmente inclinate di uno stesso diedro e i lati sono proporzionali, perché i lati corrispondenti dei triangoli simili, segnati sulle facce delle piramidi, sono proporzionali agli spigoli.

AB : A'B' = VB : VB' e BC : B'C' = VB : VB' perciò
AB : A'B'= BC : B'C'

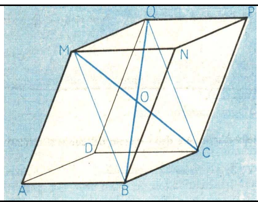
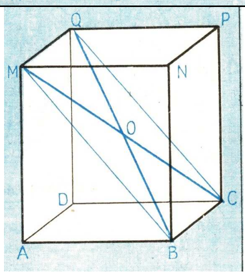
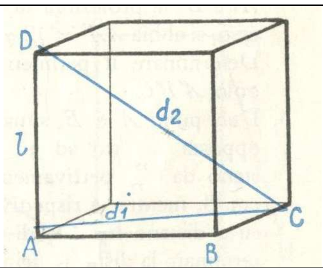
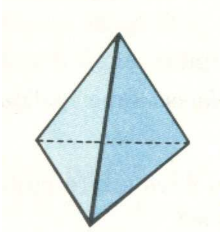
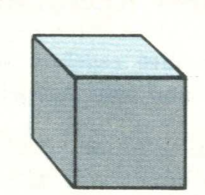
Prisma

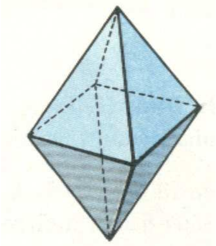
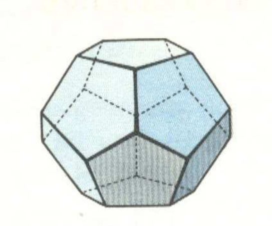
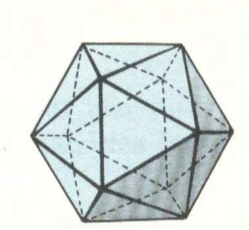
Definizioni.

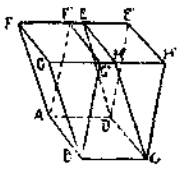
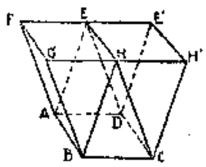
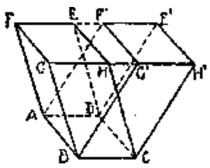
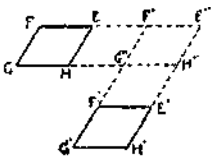
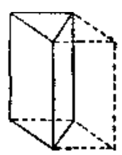
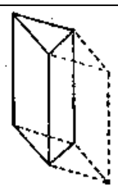


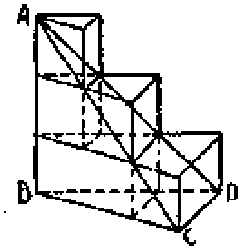
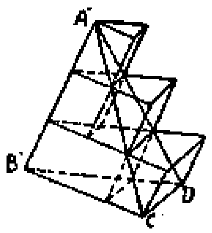
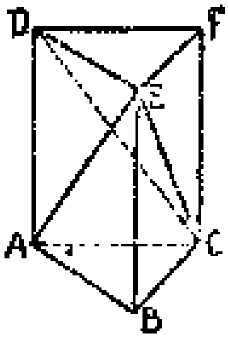
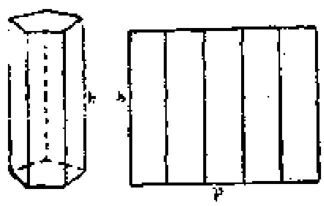
I.ª Si dice *prisma indefinito* l'insieme dei punti comuni ai diedri determinati da *n* rette parallele, di cui tre non giacenti nello stesso piano e dalle strisce formate da queste rette due a due in un certo ordine, in modo che il piano di una striscia lasci lo altre rette da una stessa parte.
2.ª Si chiama *prisma finito* (o semplicemente *prisma)* il poliedro che si ottiene tagliando un prisma indefinito con due piani paralleli.
3.ª Si dicono *basi* i poligoni ottenuti come sezioni (poligoni uguali), *facce. laterali* i parallelogrammi appartenenti alle facce del prisma indefinito.
4.ª Si dice *altezza* di un prisma la distanza fra le due basi.
5.ª Un prisma si dice *retto* se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi e sono perciò eguali all'altezza; si dice *regolare* se, oltre ad essere retto, ha per base un poligono regolare.

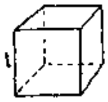
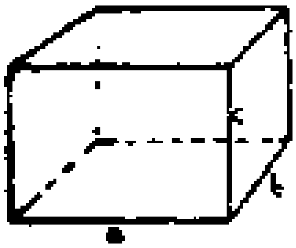
Teorema. Due prismi aventi ordinatamente uguali le facce sono eguali. Difatti gli angoloidi sono triedri, che, avendo le facce eguali (per essere angoli di poligoni eguali) sono eguali.
Corollario. Due prismi retti sono eguali se hanno le basi e le altezze eguali.

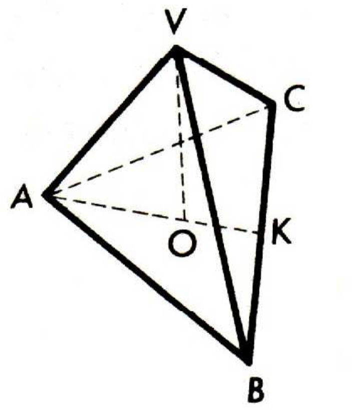
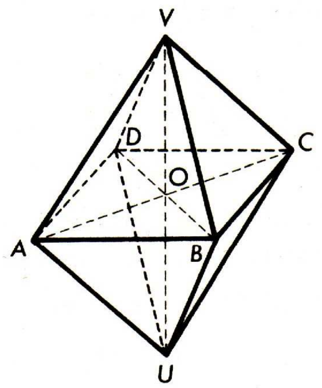
Parallelepipedo	
Definizioni.	**I.ª** Si dice *parallelepipedo* un prisma avente per base un parallelogramma. **2.ª** Un parallelepipedo ha 8 vertici, 6 faccie, 12 spigoli; due spigoli si dicono *opposti* se sono paralleli e non appartengono alla stessa faccia; due vertici si dicono *opposti se* non appartengono alla stessa faccia. **3.ª** Si chiamano *diagonali* i segmenti che congiungano due vertici opposti. **4.ª** Un parallelepipedo si dice *retto* se quattro spigoli sono perpendicolari a due facce (considerate come basi); si dice *rettangolo* se tutte facce sono rettangolari. **5.ª** Si chiamano *dimensioni* di un parallelepipedo rettangolo le lunghezze dei tre spigoli, che escono da uno stesso vertice.
	**Teorema 1.°** Le quattro diagonali di un parallelepipedo passano per in uno stesso punto *(baricentro).* Difatti, considerate a due a due, in modo qualsiasi, esse sono diagonali di parallelogrammi, perciò devono incontrarsi nel loro punto di mezzo.
	**Teorema 2.°** in un parallelepipedo rettangolo le quattro diagonali sono eguali; il quadrato della lunghezza di ciascuna di esse è uguale alla somma dei quadrati delle tre dimensioni. Si dimostra applicando il teorema di Pitagora, prima, al triangolo ABC e, poi, al triangolo A'AC. Si ottiene così $AC^2 = a^2 + b^2$ da cui $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; ossia $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Cubo	
Definizione I.ª	Si dice *cubo* un parallelepipedo rettangolo con tutti gli spigoli uguali
	Teorema. La lunghezza della diagonale di un cubo è uguale alla lunghezza dello spigolo moltiplicata per la √3. Si dimostra ricorrendo al teorema analogo sul parallelepipedo, e considerando il caso in cui le tre dimensioni sono eguali AB = BC = AD = l. $d_2 = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{3l^2} = l\sqrt{3}$; viceversa $l = d / \sqrt{3}$-
Poliedri regolari	
Definizione.	Un poliedro si dice *regolare* se ha per facce dei poligoni regolari e tutti gli angoloidi uguali
Teorema.	Non esistono che cinque poliedri regolari
 tetraedro regolare	**1.° *Tetraedro.*** Piramide triangolare con quattro facce tutte triangoli equilateri. F (numero delle facce) = 4 V (numero dei vertici) = 4 S (numero degli spigoli) = 6
 esaedro o cubo	***2.° Esaedro o cubo.*** F= 6 V = 8 S = 12

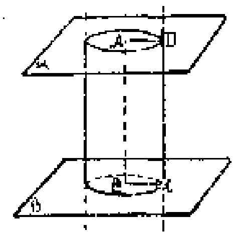
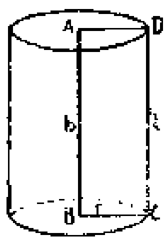
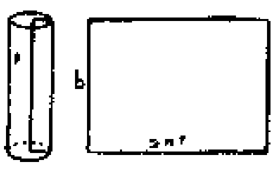
 ottaedro regolare	**3.° *Ottaedro.*** Insieme di due piramidi quadrangolari con la base in comune e le cui faccie laterali sono triangoli equilateri. F = 8 V = 6 S = 12.
 dodecaedro regolare	**4.° *Dodecaedro*.** Poliedro con 12 facce pentagonali e angoloidi triedri. F = 12 V = 20 S = 30
 icosaedro regolare	**5.° *Icosaedro*.** Poliedro con 20 facce che sono triangoli equilateri e angoloidi pentaedri. F = 20 V = 12 S = 30 Si dimostra che non possono esistere altri poliedri regolari ricordando che la somma delle facce di un angoloide devo sempre essere minore di quattro retti e ricordando la misura di ciascun angolo di un poligono regolare.

Equivalenza preliminari	
Preliminari **Concetto di equivalenza di poliedri.**	Due poliedri si chiamano *equivalenti* o *equisolidi* quando occupano la stessa parte di spazio. Chiamando *volume di un poliedro* la misura dello spazio che esso occupa, si può anche dire che due poliedri sono equivalenti quando hanno egual volume. ***Osservazione.*** Mentre in geometria piana si può dire che due poligoni sono equivalenti quando si possono scomporre in parti eguali, ciò non si può dire in geometria solida per tutti i poliedri, ma solo per i prismi, in quanto che esistono poliedri aventi lo stesso volume e che non si possono scomporre in parti eguali. Per i poliedri però si possono ripetere i concetti di somma e di differenza in modo analogo a quanto si fa per i poligoni. Un poliedro si dice *prevalente* ad un altro se è somma di questo secondo con un terzo, il quale si dirà *suvvalente* al primo. ***Postulati:*** **1°.** Somme di poliedri uguali o equivalenti sono equivalenti. **2.°** Differenze di poliedri. equivalenti sono equivalenti. **3.°** Due poliedri equivalenti ad un terzo sono equivalenti tra loro. **4.°** La somma di due poliedri non è equivalente a uno di essi.
Equivalenza di parallelepipedi e prismi	
 1° caso	**Teorema 1.°** Due parellelepipedi aventi basi ed altezze uguali sono equivalenti Supponendo di aver sovrapposto le basi inferiori (condizione a cui si possono sempre portare), si osserva che le basi superiori si vengono a trovare in uno stesso piano ma possono essere comprese fra le stesse parallele oppure no.
 2° caso	Se le basi superiori sono comprese fra le stesse parallele, possono avere in comune tutta una superficie (1°caso), oppure un so lo spigolo (2°caso); oppure possono non avere punti in comune (3°caso). Nel primo caso e nel 2°si dimostra l'equivalenza o sservando che i due parallelepipedi sono composti di una parte comune e di due prismi triangolari uguali.
 3° caso	Nel terzo caso i due parallelepipedi si considerano differenze fra il prisma ABCDFGH'E' e i due prismi triangolari equivalenti GBG'FAF' e HCH'EDE'.
 4° caso	Se, poi, le basi superiori non sono comprese fra le stesse parallele (4°caso), si costruisce un parallelepipedo (la cui base superiore è F"G"H"E") il quale si trova tanto rispetto al primo quanto rispetto al secondo parallelepipedo, nelle condizioni del terzo caso.
	**Teorema 2.°** Due prismi a base triangolare aventi lati ed altezze eguali sono equivalenti.
	Infatti ciascuno di essi è la metà di un parallelepipedo avente base doppia e altezza medesima. I due parallelepipedi, che così si ottengono, sono equivalenti -per il teorema 1°, perciò anche i prismi sono equiv alenti.

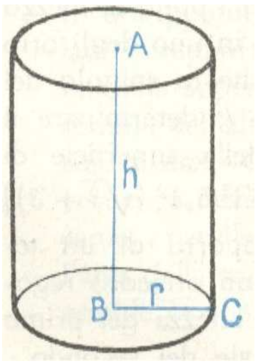
	Teorema 3.° Due prismi qualsiasi, aventi basi eguali o equivalenti ed altezze eguali, sono equivalenti. Infatti i prismi si possono scomporre in prismi a basi triangolari aventi la stessa altezza e basi rispettivamente eguali.
Equivalenza di piramidi	
	**Teorema I.°** Due piramidi, aventi basi ed altezze eguali sono equivalenti (cioè hanno lo stesso volume). Poiché non si può dimostrare che le due piramidi, avendo basi ed altezze uguali, si possono decomporre in parti eguali, si osserva che ogni piramide si può considerare elemento di separazione fra una somma di prismi circoscritti *{scaloide circoscritto)* e una somma di prismi- inscritti *(scaloide inscritto),* le quali somme si ottengono dividendo le altezze in uno stesso numero di parti uguali, tracciando dei piani paralleli alla base e completando, poi, i prismi inscritti e circoscritti.
	Si osserva quindi, che la differenza, fra lo scaloide circoscritto e quello inscritto a ciascuna piramide, è un prisma triangolare avente la stessa base della piramide e avente per altezza 1/n dell'altezza, se *n* è il numero delle parti uguali in cui fu divisa l'altezza. I due prismi che rappresentano queste differenze saranno perciò equivalenti; e, poiché ciò vale qualunque sia il numero dello parti uguali in cui si dividono le altezze, si può dire che le due piramidi sono comprese fra prismi equivalenti, e perciò sono equivalenti. ***Corollario***. Due piramidi qualsiasi aventi basi ed altezze eguali sono equivalenti
	**Teorema 2.°** Una piramide triangolare è equivalente alla terza parte di un prisma che ha la stessa base e la stessa altezza. Considerato il prisma triangolare ABCDEF si congiunge E con A e con C dividendolo in due parti. ABCE che è una piramide triangolare avente la stessa base e la stessa altezza del prisma e ACFDE è una piramide quadrangolare. Questa viene divisa dalla diagonale DC della base, in due piramidi triangolari equivalenti, di cui una DEFC può considerarsi come avente per base DEF e vertice C, e cioè avente la stessa base e la stessa *altezza,* del prisma, il quale è dunque somma di tre piramidi equivalenti. ***Osservazione***. Lo stesso teorema si può generalizzare per piramidi qualsiasi, poiché ogni piramide è somma di piramidi triangolari equivalenti.
	Teorema 3.° Un tronco di piramide è equivalente alla somma di tre piramidi aventi tutte la stessa altezza del tronco e per basi, una la base maggiore, l'altra la base minore e la terza la media geometrica delle basi.
Area e volume dei prismi	
Area laterale di un prisma e Area totale. 	**Regola:** *L'area della superficie laterale* (o semplicemente *area laterale)* di un prisma retto è uguale al prodotto del perimetro di base per l'altezza. Indicando con 2p il perimetro, con *h* l'altezza e con A_l l'area laterale si ha: $A_l = 2p\,h$ da cui $h = A_l / 2p$ e $2p = A_l / h$ ***Regola***. *L'area totale* di un prisma retto è uguale alla somma dell'area laterale con quella delle due basi. $A_t = A_l + 2B$ dove B è l'area di ciascuna base.
Area del parallelepipedo rettangolo.	**Regola:** Si ottiene applicando la seguente formula, dove a, b, c sono le tre dimensioni. $A_t = 2\,(a\,b + a\,c + b\,c)$, poiché è la somma di sei rettangoli a due a due eguali. **L'area laterale sì trova come quella del prisma.**

Area del cubo. 	***Regola:*** Si ottiene applicando la seguente formula dove *l* è la lunghezza dello spigolo $\mathbf{A_t = 6\ l^2}$, viceversa $\mathbf{l = \sqrt{A_t / 6}}$
Volume del parallelepipedo rettangolo. 	***Regola:*** Il volume di un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto delle tre dimensioni (il che equivale all'area di base per l'altezza). $\mathbf{V = abc = Bh}$ (dove $\mathbf{B = ab}$ e $\mathbf{h = c}$). Si ricava questa regola generalizzando il metodo usato per l'area di un rettangolo. Considerando solo il caso in cui le misure degli spigoli sono numeri interi, si dividono i tre spigoli in tante parti uguali quante sono indicate dalla loro misura, si tracciano dai punti di divisione dei piani paralleli alle facce, e si divide in questo modo il parallelepipedo in tanti cubi, eguali ciascuno all'unita di misura di volume, tanti quanti sono indicati dal prodotto delle tre dimensioni.
Volume di un cubo.	***Regola:*** Si ottiene applicando la seguente formula dove **l** è la lunghezza dello spigolo. $\mathbf{V = l^3}$ da cui $\mathbf{l = \sqrt[3]{V}}$ poiché il cubo è un parallelepipedo con le tre dimensioni eguali.
Volume del prisma.	***Regola:*** Il volume di un prisma è dato dal prodotto dell'area di base per l'altezza : $\mathbf{V = B\ h}$, da cui $\mathbf{B = V/h}$ e $\mathbf{h = V/B}$ Si ricava questa regola osservando che ogni prisma si può considerare equivalente a un parallelepipedo avente la stessa base e la stessa altezza, per cui vale la regola per il volume del parallelepipedo.
Area e volume della piramide e del tronco di piramide	
Area laterale della piramide regolare.	***Regola.*** L'area laterale di una piramide regolare è data dal semiprodotto del perimetro della base per l'apotema. Indicando con 2p il perimetro di base (p = semiperimetro) e con l l'apotema, si avrà $\mathbf{A_l = (2pl) / 2}$; da cui $\mathbf{A_l = pl}$ e $\mathbf{2p = 2A_l / l}$ $\mathbf{l = 2A_l / 2p = A_l / p}$ Difatti la superficie laterale di una piramide regolare è equivalente a un triangolo, avente per base il perimetro della base e, per altezza, l'apotema.
Area totale della piramide.	***Regola.*** L'area totale della piramide regolare è uguale alla somma dell'area laterale con quella della base. $\mathbf{A_t = A_l + B}$
Volume della piramide.	***Regola.*** Il volume di una piramide è dato dalla terza parte del prodotto dell'area della base per l'altezza. $\mathbf{V = (Bh) / 3}$; da cui $\mathbf{h = (3V) / B}$ e $\mathbf{B = (3V) / h}$ Questa regola si deduce dal teorema 2° sull'equivalenza delle piramidi.
Area laterale del tronco di piramide.	***Regola.*** L'area laterale del tronco di piramide è uguale al prodotto della semisomma dei perimetri delle basi per l'apotema. Indicando con 2p e 2p' i perimetri delle due basi e con l l'apotema si ha: $\mathbf{A_l = (2p + 2p')l / 2}$ cioè $\mathbf{A_l = (p + p')l}$ da cui $\mathbf{l = A_l / (p + p')}$ Si deduce questa regola osservando che le facce di un tronco di piramide sono, trapezi, e ricordando la regola per l'area del trapezio
Area totale del tronco di piramide.	***Regola.*** L'area totale del tronco di piramide è uguale alla somma dell'area laterale con quella delle due basi. $\mathbf{A_t = A_l + B + B'}$
Volume del tronco di piramide.	***Regola.*** E' data dalla seguente formula: $\mathbf{V = [\ (B + B' + \sqrt{B\ B'}\ )\ h\ ] / 3}$ la quale formula si ricava dal teorema 3° sull'equivalenza dello piramidi.

Area e volume dei principali poliedri regolari	
I°Tetraedro  	Area Totale. È uguale alla somma dell'area di quattro triangoli equilateri eguali di cui è noto il lato *l.* Sapendo che l'area di un triangolo equilatero di lato *l* è dato dalla formula $A_{tri} = l^2 \sqrt{3} / 4$ si avrà $A_{tot} = 4\ (l^2 \sqrt{3} / 4) = l^2 \sqrt{3}$ *Volume* Per determinare al formula del volume del tetraedro si determina prima l'altezza della base **AK** = $l\sqrt{3} / 2$; si osserva poi che l'altezza **VO**, relativa alla base ABC, cade nel punto d'incontro delle tre altezze, il quale divide ciascuna in modo tale che la parte verso il vertice è **2/3 dell'altezza stessa** (V. Teorema sulle mediane e l'Osservazione) $AO = 2/3\ (l\sqrt{3} / 2) = l\sqrt{3} / 3$ Per il teorema di Pitagora si ha poi: $VO = h = \sqrt{l^2 - (l\sqrt{3} / 3)^2} = (l\ \sqrt{6}) / 3$ Per la formula del volume si ha allora. $V = [\ (l^2\ \sqrt{3} / 4)\ (l\ \sqrt{6} / 3)\ ] / 3 = l^3\ \sqrt{2} / 12$
2.°Ottaedro  	*Area totale.* È la somma di otto triangoli equilateri. $A_t = 8\ (l^2\ \sqrt{3} / 4) = 2\ l^2\ \sqrt{3}$ *Volume* Per determinare la formula del volume si osserva che l'ottaedro regolare è somma di due piramidi quadrangolari aventi per base comune un quadrato di lato l e per altezza ciascuna metà della diagonale di questo quadrato AC = $l\sqrt{2}$ per $V = (\ l^2\ l\ \sqrt{2}\ ) / 3 = l^3\ \sqrt{2} / 3$
Poliedri simili	
Definizione	Due poliedri si dicono *simili* se hanno rispettivamente uguali gli angoloidi, e ordinatamente simili le facce che li comprendono.
	Teorema 1.° Le superfici di due poliedri simili sono proporzionali ai quadrati degli spigoli omologhi $S : S' = l^2 : l'^2$ se S e S' sono le superfici mentre *l* ed *l'* sono gli spigoli omologhi
	Teorema 2.ª I volumi di due poliedri simili stanno fra loro come i cubi di due spigoli omologhi o delle rispettive altezze. $V: V = l^3 : l'^3 = h^3 : h'^3$ se V e V sono i volumi *ed l* e *l'* sono gli spigoli omologhi.

	Concetti fondamentali
Definizione I.ª	Si chiama *superficie di rotazione* quella superficie che si può ottenere facendo ruotare una linea intorno ad una retta fissa con essa complanare. La linea che ruota (segmento, retta, semiretta, semicirconferenza, ecc.) si chiama *generatrice*, e la retta fissa, intorno a cui ruota la generatrice, si chiama *asse di rotazione.*
Definizione 2.ª	Si chiama *solido di rotazione* quel solido che si può ottenere facendo ruotare una superficie piana intorno ad una retta del suo piano. La superficie che ruota si chiama *superficie generatrice* e la retta, intorno a cui essa ruota, si chiama *asse di rotazione.*
	Superficie cilindrica e cilindro definizioni
Definizione I.ª	Si chiama *superficie cilindrica indefinita*, l'insieme di tutte le rette *(generatici)* parallele ad una retta data *(asse)* e aventi da essa eguai distanza; oppure si chiama *superficie cilindrica indefinita,* la superficie generata dalla rotazione di una retta intorno ad un altra ad essa parallela *(asse).*
Definizione 2,ª	Si chiama *raggio* di una superficie cilindrica la distanza di una delle generatrici dall'asse di rotazione.
Definizione 3.ª	Un punto si dice *interno* o *esterno* ad una superficie cilindrica secondo che ha dall'asse di rotazione distanza minore o maggiore del raggio.
Definizione 4.ª	Si chiama *cilindro indefinito* l'insieme dei punti di una superficie cilindrica indefinita e dei punti interni ad essa.
Definizione 5.ª 	Si chiama *cilindro finito circolare retto* (o semplicemente *cilindro)* quella parte di cilindro indefinito compresa fra due piani paralleli e perpendicolari all'asse; oppure si chiama *cilindro finito circolare retto* (o semplicemente *cilindro*) il solido generato dalla rotazione di un rettangolo intorno a uno dei suoi lati. ***Osservazione.*** La Quinta definizione si può enunciare dopo aver osservato che un piano perpendicolare all'asse taglia una superficie cilindrica indefinita secondo una circonferenza e quindi un cilindro indefinito secondo un cerchio di raggio eguale al raggio della superficie cilindrica.
Definizione 6.ª 	Si chiamano *basi* del cilindro i due cerchi paralleli ed uguali che lo limitano; si chiama *raggio* del cilindro il raggio di uno di questi cerchi *(r).* Si chiama *superficie laterale* la superficie curva compresa fra le due basi; si chiama *altezza (h)* la distanza fra le due basi e *apotema (l = h)* la parte di generatrice compresa fra le due basi.
	Misure relative al cilindro
Area della superficie cilindrica 	*Area laterale del cilindro* ***Regola.*** L'area laterale di un cilindro è uguale al prodotto della circonferenza di base per l'altezza. Essa é espressa nella seguente formula: $A_l = 2\pi rh$ *Formule inverse :* $r = A_l / 2\pi h$; $h = A_l / 2\pi r$ Difatti lo sviluppo del cilindro è un rettangolo che ha per base la circonferenza di base rettificata e per altezza l'altezza del cilindro.
	Area totale del cilindro. ***Regola.*** L'area totale del cilindro è uguale alla somma dell'area laterale con quella delle due basi. Essa è espressa dalla seguente formula: $A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$

Volume del cilindro.



Teorema. Il volume del cilindro è uguale a quello di un prisma avente la medesima altezza e avente per base un poligono la cui area sia uguale a quella del cerchio di base del cilindro.

Difatti considerato un prisma inscritto (cioè coi vertici sulle circonferenze di base) e uno circoscritto (cioè coi lati tangenti ai cerchi di base) ad un dato cilindro, si osserva che il volume del cilindro è compreso fra il volume di un qualsiasi prisma inscritto e quello di un qualsiasi prisma circoscritto, qualunque sia il numero dei loro lati. E, poiché aumentando il numero dei lati di base di questi prismi, i loro volumi si avvicinano, mentre i loro poligoni di base tendono a diventare eguali al cerchio di base del cilindro, si può dire che i volumi di questi prismi tendono a diventare eguali al volume del cilindro e coincidono con esso quando l'area della loro base è uguale a quella del cerchio di base del cilindro.

Regola. Il volume di un cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza. Esso è dato dalla seguente formula:

$$V = \pi r^2 h$$

Formule inverse : $r = \sqrt{V / \pi h}$; $h = V / \pi r^2$

Superficie conica e cono definizioni

Definizione I.ª

Si chiama superficie conica l'insieme di tutte le semirette *(generatrìci)* uscenti da un punto (*vertice*) e formanti angoli uguali con una retta data *(asse)* passante per quel punto; oppure si chiama *superficie conica indefinita* la superficie generata dalla rotazione di una semiretta *(generatrice)* intorno ad una retta fissa *(asse)* avente con essa l'origine in comune *(vertice).*

Definizione 2.ª

Si chiama *ampiezza* o *apertura, di una superficie conica* l'angolo costante formato dalla generatrice con l'asse.

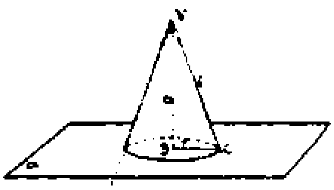
Definizione 3.ª

Un punto si dice *interno o esterno* ad una *superficie conica* secondo che la semiretta uscente dal vertice e passante per quel punto forma con l'asse un angolo minore o maggiore dell'ampiezza.

Definizione 4.ª

Si chiama *cono indefinito* l'insieme dei punti di una superficie conica e dei punti interni ad essa.

Definizione 5.ª



Si chiama *cono finito circolare retto* (o semplicemente *cono)* il solido che si ottiene tagliando un cono indefinito con un piano perpendicolare all'asse e non passante per il vertice; oppure si chiama *cono finito circolare retto* (o semplicemente *cono)* il solido ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ad un cateto.

Osservazione. Un piano secante perpendicolare all'asse taglia la superficie conica secondo una circonferenza quindi il cono secondo un cerchio.

Definizione 6.ª

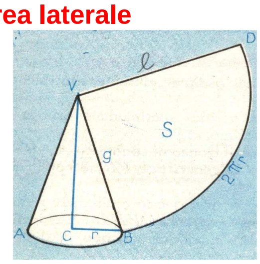
Si chiama *base* del cono il cerchio che limita il cono; *raggio (r)* del cono il rancio di questo cerchio; *altezza (h)* del cono la distanza del vertice dal piano di base ; *apotema o lato (l)* la distanza del vertice da un punto della circonferenza di base.

Osservazione. L'altezza, l'apotema e il raggio di base di un cono sono legati fra loro dalla relazione del teorema di Pitagora.

$l^2 = h^2 + r^2$; da cui $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

Misure relative al cono

Area della superficie conica o area laterale

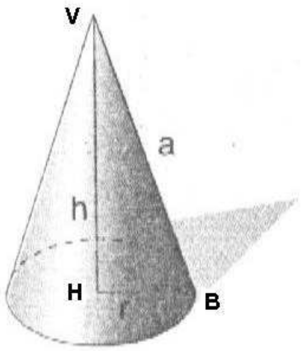
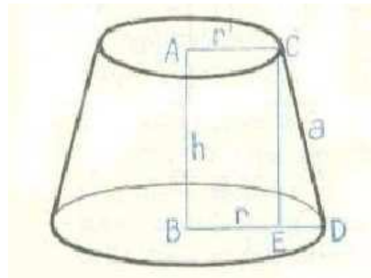


Regola. L'area laterale del cono è uguale al semiprodotto della circonferenza di base per l'apotema. Essa è data dalla seguente formula :

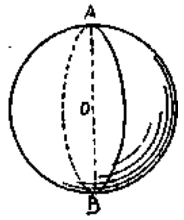
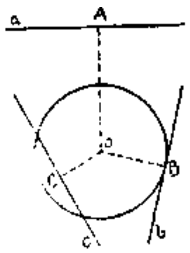
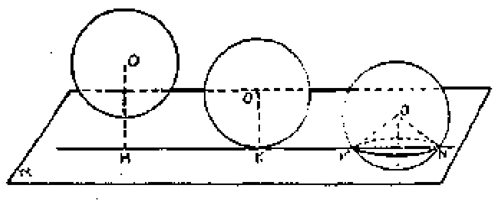
$$A_l = 2\pi\, r\, l / 2 = \pi\, r\, l$$

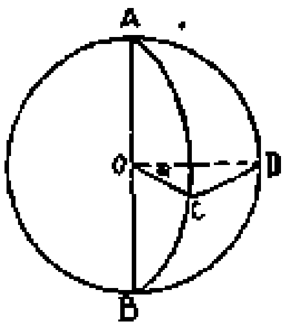
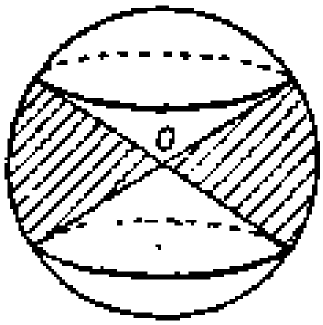
Formule inverse : $r = A_l / \pi l$; $l = A_l / \pi r$

Si dimostra questa regola facendo osservare che lo sviluppo del cono è un settore circolare avente per arco la circonferenza di base e per raggio l'apotema, e ricordando poi la regola che permette di trovare l'area del settore

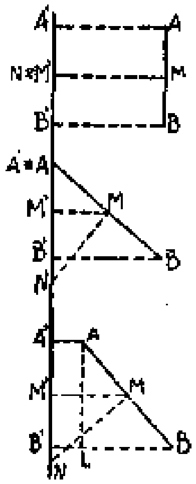
Area totale del cono.	***Regola.*** L'area totale del cono è uguale alla somma dell'area laterale con quella della base. Essa è data dalla seguente formula: $A_t = \pi\, r\, l + \pi\, r^2 = \pi\, r\, (l + r)$
Volume del cono. 	**Teorema.** Il volume di un cono e uguale a quello di una piramide avente la stessa altezza del cono e avente per base un poligono con l'area eguale a quella del cerchio di base del cono. Infatti, considerata una piramide inscritta (con lo stesso vertice e i vertici della base sulla circonferenza di base del cono) e una circoscritta (con lo stesso vertice, e i lati di base tangenti alla circonferenza di base) ad un dato cono, si osserva che il volume del cono è compreso fra il volume di una qualsiasi piramide inscritta e quello di una qualsiasi piramide circoscritta qualunque sia il numero dei lati di base. E, poiché aumentando il numero dei lati di base di queste piramidi, i loro volumi si avvicinano, mentre lo loro basi tendono a diventare eguali al cerchio di base del cono, si può dire che i volumi di queste piramidi tendono a diventare eguali al volume del cono e coincidono con esso quando l'area della loro base è uguale a quella del cerchio di base del cono. ***Regola.*** Il volume di un cono si ottiene dividendo per 3 il prodotto dell'area della base per l'altezza. Esso è dato dalla seguente formula : $V = (\pi\, r^2\, h) / 3$ *Formule inverse :* $h = 3V / \pi\, r^2$; $r = \sqrt{3V / \pi\, h}$
	Tronco di cono definizioni
Definizione I.ª	Dicesi *tronco di cono retto* il solido che si ottiene tagliando un cono con un piano parallelo alle base, posto fra la base e il vertice; oppure si dice *tronco di cono retto* il solido che si ottiene facendo ruotare un trapezio rettangolo intorno al lato perpendicolare alle due basi.
Definizione 2.ª Fig. 20,	Si chiamano *basi* (*inferiore* e *superiore*) del tronco di cono i due cerchi che lo limitano. Si chiama *superficie laterale* la superficie compresa fra le due basi. Si chiama *altezza (h)* la distanza fra le due basi e si chiama *apotema (a)* la distanza fra due punti delle circonferenze di base. Si chiamano *raggi delle basi (r* e *r')* i faggi dei due cerchi di base. ***Osservazione.*** L'apotema, l'altezza e i due raggi del tronco dì cono sono legati dalla seguente relazione.*:* $a^2 = h^2 + (r - r')^2$
	Misure relative al tronco di cono
Area laterale del tronco di cono.	***Regola**.* L'area laterale del tronco di cono è uguale al prodotto della semisomma delle circonferenze di base per l'apotema. Essa è data dalla seguente formula: $A_l = (2\pi\, r + 2\pi\, r')\, l / 2$ *Formule inverse:* $l = A_l / \pi\, (r + r')$; $r = (A_l / \pi\, l) - r'$ Si dimostra questa regola facendo osservare che l'area laterale del tronco di cono è uguale a quella di un trapezio avente per base i segmenti ottenuti rettificando le circonferenze di base del tronco di cono e avente per altezza l'apotema.
Area totale.	***Regola**.* L'area totale del tronco di cono è uguale alla somma dell'area laterale con quella delle due basi. Essa è data dalla seguente formula : $A_t = \pi\, (r + r')\, l + \pi\, r^2 + \pi\, r'^2 = \pi\, [(r + r') l + r^2 + r'^2]$

Volume del tronco di cono.	***Regola***. Si ottiene applicando la seguente formula: $V = \pi h(r^2 + r'^2 + rr')/3$ la quale si ricava dalla formula del volume del tronco di piramide, dopo un ragionamento analogo a quello seguito per il volume del cilindro e del cono. Infatti ponendo $B = \pi r^2$ e $B' = \pi r'^2$ si ottiene: $V = h(B + B' + \sqrt{B B'})/3 =$ $= h(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \pi r'^2})/3 =$ $= h(\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi rr')/3 =$ $= \pi h(r^2 + r'^2 + rr')/3$

Definizioni Superficie sferica e sfera	
Definizione I.[a]	Si chiama *superficie sferica* il luogo geometrico dèi punti dello spazio equidistanti da un punto fisso *{centro);* oppure si chiama *superficie sferica* la superficie generata dalla rotazione di una semicirconferenza attorno ad una retta passante per il suo diametro.
Definizione 2.[a]	Si chiama *raggio* della superficie sferica la distanza di un suo punto qualsiasi dal centro.
Definizione 3.[a]	Un punto si dice *interno* od *esterno* ad una superficie sferica, secondo che la sua distanza dal centro è minore o maggiore del raggio.
Definizione 4.[a] 	Si chiama *sfera* il solido formato dai punti di una superficie sferica e dai punti interni ad essa; oppure si chiama *sfera* il solido generato dalla rotazione di un semicerchio attorno ad una retta passante per il suo diametro **AO = raggio (r)**.
Definizione 5.[a]	Si chiama *corda* il segmento che congiunge due punti della superficie sferica; *diametro* la corda che passa per il centro; *piano diametrale* qualunque piano passante per il centro.
Definizione 6.[a]	Si chiama *circonferenza massima* una circonferenza, segnata sulla superficie sferica, che ha lo stesso raggio della superficie sferica *(intersezione* di un piano diametrale con la superficie sferica); *circonferenza minore*, una circonferenza che ha un raggio minore di quello della sfera.
Definizioni Posizioni di rette e piani rispetto ad una superficie sferica	
Definizione I.[a]	Una retta si dice *esterna*, *tangente secante* rispetto a una superficie sferica secondo che ha con essa, nessuno, uno o due punti in comune
	**Teorema 1.°** Una retta è esterna, tangente o secante rispetto ad una superficie sferica secondo che ha dal centro distanza maggiore, uguale o minore del raggio. Per la dimostrazione si considera il piano diametrale determinato dalla retta data e dal centro e si osserva che le posizioni della retta rispetto alla superficie sferica sono quelle della retta rispetto alla circonferenza massima intersezione del piano diametrale con la superficie sferica. Si ritorna perciò al teorema analogo sulla circonferenza.
Definizione 2.°	Un piano si dice *esterno, tangente, secante,* rispetto a una superficie sferica, secondo che ha in comune con essa nessun punto, o un punto solo, o infiniti punti giacenti su di una circonferenza minore.
	Teorema 2.° Un piano è esterno, tangente o secante rispetto a una superficie sferica secondo che la sua distanza dal centro è maggiore, uguale o minore del raggio.  Considerato il piano diametrale perpendicolare al piano dato e la sua retta *a* d'intersezione col piano stesso, si osserva che, secondo che la distanza del piano α dal centro è maggiore, uguale o minore del raggio della superficie sferica, la retta *a* è esterna, tangente o secante rispetto alla circonferenza massima determinata dal piano diametrale. Nel terzo caso, però, mentre la retta ha solo due punti in comune con la circonferenza massima, il piano α e la superficie sferica avranno in comune tutti i punti della circonferenza avente per centro il piede della perpendicolare condotta dal centro della superficie sferica al piano e per raggio la distanza di questo punto da uno dei punti d'incontro della retta *a* colla circonferenza massima. Infatti tutti i punti di questa circonferenza stanno sul piano α e appartengono alla superficie sferica.

Posizione reciproca di due superna sferiche.	Le posizioni reciproche di due superfici sferiche sono analoghe a quelle di due circonferenze e cioè due superfici sferiche possono essere: *esterne l'una all'altra; tangenti esternamente; secanti* (in questo caso hanno in comune i punti di una circonferenza); *tangenti internamente* e *interne l'una all'altra.*
Parti di superficie sferica e di sfera	
Calotta sferica.	Si chiama *calotta sferica* la parte di superficie sferica limitata da una circonferenza minore.
Zona sferica. 	Si chiama *zona sferica* una parte di superficie sferica compresa fra due circonferenze entrambe minori o una massima e una minore, situate in piani paralleli.
Segmento sferico a una base	Si chiama *segmento sferico a una base* la parte di sfera limitata da un cerchio minore *(base)*
Segmento sferico a due basi.	Si chiama *segmento sferico a due basi* la parte di sfera limitata da due cerchi minori, oppure da uno massimo e uno minore *(basi)* situati in piani paralleli. Si chiama *altezza della calotta* o *del segmento sferico a una base* il segmento di perpendicolare al piano della base, compreso fra il centro della base e il punto di incontro di essa perpendicolare con la superficie sferica. Si chiama *altezza della zona* o *del segmento sferico a due basi* la distanza fra i centri delle due basi.
Fuso sferico.	Si dice *fuso sferico* la parte di superficie sferica limitata da due semicirconferenze massime.
Spicchio sferico. 	Si chiama *spicchio sferico* la parte di sfera limitata da due semicerchi massimi. ***Osservazione.*** Il fuso sferico e lo spicchio sferico si possono ottenere tagliando la superficie sferica o la sfera con due piani aventi comune una retta passante per un diametro. Si chiama *ampiezza del fuso o dello spicchio* la sezione normale del diedro formato dai piani che lo determinano. L'ampiezza del fuso o dello spicchio può anche essere rappresentata da un angolo al centro (α) o da un arco di circonferenza massima *CD.*
Settore sferico. 	Si chiama *settore sferico* la figura limitata da una zona sferica e dalle superfici laterali di due coni aventi per basi le due basi della zona e per vertice comune il centro della sfera a cui appartiene la zona.

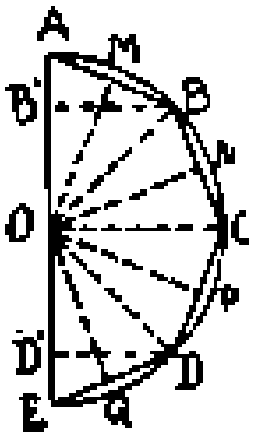
Area della superficie sferica

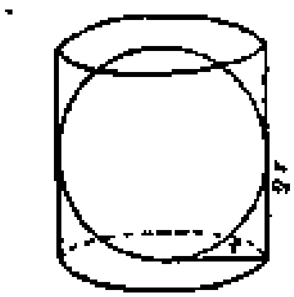


Lemma. La superficie, generata dalla rotazione di un segmento intorno ad una retta (complanare e che non la taglia), è equivalente a un rettangolo avente per altezza la proiezione del segmento sull'asse di rotazione e per base la circonferenza rettificata, che ha per raggio la parte dell'asse del segmento generatore compresa fra questo e l'asse di rotazione.
Si vuoi dimostrare che, qualunque sia la posizione del segmento AB rispetto all'asse di rotazione, la superficie generata da AB, ossia
$S(AB) = 2\pi\ MN.\ A'B'$

Nel primo caso AB genera un cilindro, perciò $S(AB) = 2\pi\ BB'$; $AB = 2\pi\ MN\ A'B'$ poiché $AB = A'B'$ e $BB' = MN$.

Nel secondo caso il segmento AB genera un cono perciò $S(AB) = \pi\ BB'\ AB$. Ma, essendo i triangoli ABB' e MNM' simili, sarà
$AB : MN = A'B' : MM'$ per cui $AB\ MM' = MN\ A'B'$. E poiché $MM' = BB'/2$ sarà $S(AB) = 2\pi\ MN.A'B'$.
In modo analogo si dimostra il terzo caso in cui AB genera un tronco di cono.





Teorema. La superficie sferica è equivalente a quella laterale di un cilindro avente per raggio di base il raggio della sfera e per altezza il diametro della sfera (E cioè A sfera $= 2\pi\ r\ 2r = 4\pi\ r^2$).

Poiché la superficie sferica non è sviluppatale si inscrive nella semicirconferenza, che genera la superficie sferica, una spezzata regolare, e si osserva che ogni lato di questa spezzata per il lemma precedente, genera una superficie equivalente ad un rettangolo, avente per base la circonferenza rettificata il cui raggio è uguale all'apotema della spezzata, e per altezza la proiezione del lato sull'asse di rotazione.
Perciò $S(AB) = 2\pi\ MO\ AB'$; $S(BC) = 2\pi\ NO\ B'O$ ecc.; e, poiché
$MO = NO =$ apotema della spezzata, si avrà
$S(ABCDE) = 2\pi\ MO\ (AB' + B'O + OD' + D'E) = 2\pi\ MO\ AE = 2\pi\ a\ 2r$
dove *a* è l'apotema ed *r* il raggio.

Un ragionamento analogo vale per le poligonali circoscritte. Aumentando allora il numero dei lati delle poligonali, con ragionamento analogo a quello seguito per la rettificazione della circonferenza, si può dire che la superficie sferica deve essere compresa fra quella generata dalla poligonale circoscritta e quella generata dalla poligonale inscritta. E, poiché aumentando il numero dei lati della poligonale inscritta, l'apotema tende a diventare eguale al raggio, la superficie della sfera e data dalla seguente formula : **$A = 2\pi\ r\ 2r$,** che è eguale a quella laterale di un cilindro che ha per raggio *r* e per altezza 2*r.*

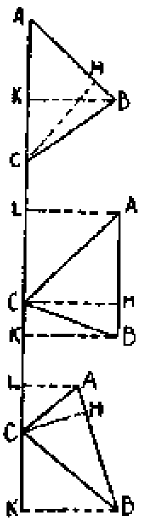
Regola. L'area di una superficie sferica è uguale a quattro volte quella di un suo cerchio massimo. **$A= 4\ \pi\ r^2$**
Si deduce dalla formula ricavata dal teorema, osservando che πr^2 è l'area di un cerchio massimo :

$A= 2\pi\ r\ 2r=4\ \pi\ r^2$.
Formula inversa:

$r = \sqrt{A / 4\pi}$

Superficie della calotta e della zona sferica.	È data dalla seguente formula: **A (zona o calotta) = *2 π r h*** dove r è il raggio della sfera ed *h* l'altezza della zona o calotta.
Superficie del fuso sferico.	Si ottiene mediante la seguente proporzione: **$4 \pi r^2 : 360 = A$ (fuso) $: \alpha$**, dove **α** è l'ampiezza del fuso ed r il raggio della sfera. **A fuso = $4\pi r^2 \alpha / 360 = \pi r^2 \alpha / 90$**

Volume della sfera



Lemma. Il solido generato dalla rotazione di un triangolo, intorno ad una retta complanare passante per un suo vertice e che lascia il triangolo tutto dalla stessa parte, è equivalente ad una piramide, avente per altezza l'altezza del triangolo relativa al lato opposto al vertice considerato, e la base equivalente alla superficie generata dalla rotazione di quel lato.

Si vuol dimostrare che, qualunque sia la posizione del triangolo ABC, rispetto all'asse di rotazione,

V (ABC) = 1/3 CH S(AB), dove CH è l'altezza relativa ad AB.

1.° *caso.* L'asse di rotazione contiene, oltre al vertice C, anche il vertice A; allora il triangolo genera un cono o la somma o la differenza di due coni, a seconda che l'angolo C è retto, acuto, ottuso. Nel nostro caso si ha:

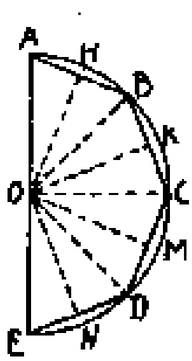
V (ABC) = *1/3* π BK^2 (AK + CK) = 1/3 π BK BK AC.

Ma AC BK = AB CH perché entrambi eguali al doppio dell'area del triangolo ABC, quindi

V (ABC)= 1/3 π BK AB CH, e, poiché π BK AB = S(AB) si avrà

V (ABC) = 1/3 CH S(AB).

In modo simile si dimostrano gli altri casi.



Teorema. Il volume della sfera è eguale a quello di una piramide avente per altezza il raggio della sfera e per base la superficie sferica.

Considerato un semipoligono regolare inscritto nel semicerchio che genera la sfera, e, congiunti tutti i vertici della poligonale col centro, si osserva che ogni triangolo così ottenuto, ruotando intorno al diametro genera un. solido, che, per il lemma precedente, è equivalente ad una piramide avente per altezza l'apotema del poligono e per base la superficie generata dal lato della poligonale.

V(ABC) = 1/3 OH S(AB); V(BOC) = 1/3 OK S(BC) ecc.

e poiché OH = OK ecc. si avrà

V (ABCDEO) = 1/3 OH S(ABCDE).

Un ragionamento analogo vale per i solidi generati dai semipoligoni circoscritti, E, poiché aumentando il numero dei lati dei semipoligoni, questi solidi si avvicinano, mentre i semipoligoni tendono a diventare uguali al semicerchio, si può dire che il solido della sfera è equivalente ad una piramide, avente per altezza il raggio e per base la superficie generata dalla semicirconferenza, cioè la superficie sferica.

Regola. Il volume della sfera è uguale al cubo del raggio per 4/3 π.

$$V = 1/3\, r \,.\, 4 \pi r^2 = 4/3\, \pi r^3.$$

Formula inversa : $r = \sqrt[3]{3V / 4\pi}$

Volume del segmento sferico.	***Regola***. Il volume del segmento sferico è uguale alla semisomma dei volumi dei due cilindri aventi la stessa altezza del segmento e per basi le basi del segmento, aumentata del volume della sfera avente per diametro l'altezza del segmento. $V = 1/2(\pi a^2 h + \pi b^2 h) + 4/3 \pi (h/2)^3 = 1/6 \pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$ dove a e b sono i raggi delle basi del segmento e h l'altezza.
Volume dello spicchio.	Si ottiene risolvendo la seguente proporzione: $4/3 \pi r^3 : 360 = V_{spicchio} : \alpha$ dove α è l'ampiezza dello spicchio ed *r* il raggio della sfera. $V = (4/3 \pi r^3 \alpha) / 360 = \pi r^3 \alpha / 270$

Bibliografia

Autore	Titolo opera	Casa editrice - anno	Volumi
E. Bovio – G. Repetti	Geometria Nuovi orientamenti	Lattes 1986	I° e II°
L. Cateni – R. Fortini	Il pensiero geometrico	Le Monnier 1966	I° e II°
S. Perotti Vanni	Aritmetica – Geometria – Algebra	Signorelli 1936	

Alla memoria di mio padre.

Questo Manuale di Geometria è un'opera riesumata da un libro del 1936. Ci sono legato da profondo rispetto e affetto, anche perchè nascosto da mio padre in tempo di guerra in una scatola di cartone e poi in un anfratto di una galleria ferroviaria tutt'ora esistente sulla linea Roma-Pescara vicino la stazione di Cocullo, per timore di eventuali bombardamenti, e di perdere così cose a lui care come i libri.