**COORDINATE POLARI (in Fisica)**

****Un altro modo di rappresentare un vettore molto usato in Fisica è quello delle cosiddette **coordinate polari**.Le coordinate polari costituiscono un sistema di coordinate nel piano in cui ogni vettore viene disegnato in un SdR cartesiano con il punto di applicazione nell’origine (detta **polo**): il vettore è rappresentato indicando il suo **modulo** e **l’angolo ϑ** misurato a partire da uno dei due assi: perciò l’angolo ϑ rappresenta **l’inclinazione** rispetto all’asse scelto. Alcuni esempi di vettori rappresentati in coordinate polari sono dati in Figura1. Gli angoli 11:16 ϑA, ϑC e ϑD partono dall’asse X e perciò misurano l’inclinazione rispetto ad X; l’angolo ϑB parte dall’asse Y e perciò misura l’inclinazione rispetto ad Y.

Figura 1

Nota che nella rappresentazione polare il campo di esistenza di ϑ è l’intervallo 0 ≤ ϑ ≤ 90°

Le **coordinate polari** hanno l’importante proprietà di permettere di conoscere immediatamente le tre proprietà geometriche dei vettori: il **modulo**, la **direzione** ed il **verso**, questi ultimi indicati dall’angolo ϑ. Guarda ad esempio i vettori di Figura1:

* sai subito che il loro **modulo** è |$\vec{F}$A|=5N, |$\vec{F}$B|=6N, |$\vec{F}$C|=3,1N , |$\vec{F}$D|=4,2N
* La **direzione** delle forze è indicata dall’angolo ϑ.
* Il **verso** delle fprze è indicato da dove punta il vettore.

**Come passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane – intro trigonometrica**

E’ utile, anzi devo dire indispensabile, conoscere come passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane, cioè sapere calcolare le componenti Fx e Fy di una forza $\vec{F}$ quando si conosce il suo modulo |$\vec{F}$| e il suo angolo ϑ. Per prima cosa, guarda la Figura2: è evidente che la forza $\vec{F}$ e le sue due componenti Fx e Fy formano un **triangolo rettangolo**: $\vec{F}$ è l’ipotenusa del triangolo, Fx e Fy sono i due cateti mentre ϑ è l’angolo all’origine. Perciò quello che dovremo fare sarà studiare la relazione fra l’angolo ϑ ed i lati di un triangolo rettangolo.

Figura 2

La scienza della geometria che studia le relazioni fra i lati e gli angoli dei triangoli si chiama **trigonometria:** perciò nel paragrafo seguente sospenderemo per un breve istante lo studio delle forze e ci concentreremo su alcuni concetti-base della trigonometria.

Breve digressione sulla trigonometria

In questo breve paragrafo introdurremo i concetti della trigonometria che sono essenziali nello studio dei vettori.

Consideriamo un **triangolo rettangolo** (Figura3): è evidente, e lo si può dimostrare rigorosamente, che una volta fissato l’angolo ϑ io posso estendere il triangolo a piacere mantenendo sempre costante le proporzioni fra i suoi rispettivi lati (cioè io posso estendere il triangolo ottenendo altri triangoli rettangoli **simili**, vedi Figura3).

****In altre parole: osservando il triangolo rettangolo di Figura3 posso affermare che **tutti i triangoli rettangoli che hanno lo stesso angolo ϑ possiedono i lati in proporzione fra loro**.

Ciò significa che i rapporti fra i lati sono sempre costanti, cioè posso affermare cheuna volta che è fissato l’angolo ϑ sono fissati anche i rapporti **b/a , a/c , b/c**. In altre parole:

**una volta che è fissato l’angolo ϑ, il rapporto fra i lati di un triangolo rettangolo rimane sempre costante qualunque sia l’estensione del triangolo rettangolo**

Detto in altro modo, del tutto equivalente a quello appena enunciato:

**per tutti i triangoli rettangoli avente lo stesso angolo ϑ i rapporti fra i lati b/a , a/c , b/c sono costanti: il loro valore dipende dal valore dell’angolo ϑ**

Figura 3: fissato l'angolo ϑ, all'aumentare dei lati le loro reciproche proporzioni non cambiano. Prova a misurare i lati del trian-golo con un righello e verificalo!

Non ci credi? Prendi un righello, misura i lati dei triangoli di Figura 3 e verifica che i loro rapporti sono gli stessi!

Seno, Coseno e Tangente

Guarda ancora la Figura3. Nota che:

* L’angolo ϑ **tocca** il cateto a: perciò posso dire che:

 **a è il cateto adiacente all’angolo**

* L’angolo ϑ **non tocca** il cateto b ma gli sta di fronte: perciò posso dire che

 **b è il cateto opposto all’angolo**

* Il triangolo a, b, c è rettangolo:

 **c è l’ipotenusa**

Ad ognuno dei tre rapporti **b/a , a/c , b/c** è associata una particolare **funzione trigonometrica:**

* La funzione trigonometrica che calcola il rapporto **b/a** al variare di ϑ si chiama **tangente**:

la **tangente** (abbreviata **tan**) è il rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente all’angolo ϑ

 **tan(ϑ) = b/a** **→** tan(ϑ) = (cateto opposto a ϑ)/(cateto adiacente a ϑ)  **(1)**

* La funzione trigonometrica che calcola il rapporto **a/c** si chiama **coseno**:

il **coseno** (abbreviato **cos**) è il [rapporto](http://it.wikipedia.org/wiki/Rapporto) tra le lunghezze del [cateto](http://it.wikipedia.org/wiki/Cateto) adiacente all'angolo ϑ e l'[ipotenusa](http://it.wikipedia.org/wiki/Ipotenusa)

 **cos(ϑ) = a/c**  **→** cos(ϑ) = (cateto adiacente a ϑ)/(ipotenusa) **(2)**

* La funzione trigonometrica che invece calcola il rapporto **b/c** si chiama **seno**:

il **seno** (abbreviato **sen** o **sin**) di un angolo ϑ è il [rapporto](http://it.wikipedia.org/wiki/Rapporto) tra le lunghezze del [cateto](http://it.wikipedia.org/wiki/Cateto) opposto all'angolo ϑ e l'[ipotenusa](http://it.wikipedia.org/wiki/Ipotenusa): **sen(ϑ) = b/c →** sen(ϑ) = (cateto opposto a ϑ)/(ipotenusa) **(3)**

Come già detto, il seno, il coseno e la tangente di un angolo ϑ, espresso in [gradi](http://it.wikipedia.org/wiki/Grado_d%27arco) o [radianti](http://it.wikipedia.org/wiki/Radiante), sono quantità che dipendono solo da ϑ: i loro valori sono tabulati praticamente in ogni calcolatrice.

Alcuni esempi

Le tre funzioni trigonometriche sopra definite -tangente, seno e coseno- sono fondamentali in tutte le Scienze: perciò è bene chiarirne il significato una volta per tutte. Facciamo un esempio: in Figura4(A) è disegnato un triangolo di ipotenusa **c** di lunghezza ”5”, cateti **a** e **b** di lunghezza rispettivamente “4” e “3”; l’ampiezza dell’angolo **ϑ** può essere misurata con un goniometro e risulta ϑ=36,9°. Adesso prendi una calcolatrice e calcola i valori tan(36,9°), sen(36,9°), cos(36,9°) (assicurati che l’angolo sia in gradi: deve apparire una piccola lettera “D” sul tuo schermo: se appare “R” o “G” significa che l’angolo non è espresso in gradi). Otterrai:

* tan(36,9°) = 0,75 = ¾ : è proprio il rapporto fra il cateto opposto a ϑ (cateto b) con quello adiacente (cateto a)!
* sen(36,9°) = 0,6 = 3/5 : è proprio il rapporto fra il cateto opposto a ϑ (cateto a) con l’ipotenusa (c)!
* cos(36,9°) = 0,8 = 4/5 : è proprio il rapporto fra il cateto adiacente a ϑ (cateto a) con l’ipotenusa (c)!

Mettiamo a parole i numeri che abbiamo ottenuto. Possiamo affermare che:

tan(36,9°) = 0,75 significa che “per ogni triangolo rettangolo avente ϑ=36,9° il cateto opposto a ϑ (cateto b) è il 75% del cateto adiacente a ϑ (cateto a).”

sen(36,9°) = 0,6 significa che “per ogni triangolo rettangolo avente ϑ=36,9° il cateto opposto a ϑ (cateto b) è il 60% dell’ipotenusa."

Figura 4

cos(36,9°) = 0,8 significa che “per ogni triangolo rettangolo avente ϑ=36,9° il cateto adiacente a ϑ (cateto a) è l’ 80% dell’ipotenusa.”

Se cambi il valore dell’angolo ϑ cambiano anche i rapporti fra i lati del triangolo e di conseguenza anche i valori delle funzioni trigonometriche. Considera la Figura4(B): è disegnato un triangolo di ipotenusa **c** di lunghezza “$\sqrt{20}$”, cateti **a** e **b** di lunghezza rispettivamente “2” e “4”; l’ampiezza dell’angolo ϑ può essere misurata con un goniometro e risulta ϑ=63,4°.

Adesso prendi una calcolatrice e calcola i valori tan(63,4°), sen(63,4°), cos(63,4°) (anche in questo caso assicurati che l’angolo sia in gradi: deve apparire una piccola lettera “D” sul tuo schermo). Otterrai: tan(63,4°) = 2 = 4/2 ; sen(63,4°) = 0,894 = 4/$\sqrt{20}$ ; cos(63,4°) = 0,447 = 2/$\sqrt{20}$. I valori ottenuti sono proprio quelli dei rapporti **b/a , a/c , b/c** !

**Come passare dalle coordinate polari a quelle cartesiane – applicazione pratica**

Tornando alle forze: abbiamo già detto che il vettore $\vec{F}$ insieme alle sue componenti Fx e Fy forma un **triangolo rettangolo**, di cui ϑ è l’angolo all’origine. Posso tracciare ϑ partendo dall’asse X (Figura5a) o dall’asse Y (Figura5b): vediamo cosa accade.



l’angolo ϑ è tracciato partendo dall’asse X:

Figura 5a

Guarda la Figura5a: l’angolo ϑ è tracciato partendo dall’asse X. **Fy è il cateto opposto a ϑ** (cateto **b**) mentre **Fx è il cateto adiacente a ϑ (**cateto **a**): il vettore $\vec{F}$**è l’ipotenusa** (lato **c**). Perciò le equazioni (1), (2) e (3) diventano:

**tan(ϑ) = b/a = Fy/Fx (4a)**

**sen(ϑ) = b/c = Fy/|**$\vec{F}$**| (5a)**

**cos(ϑ) = a/c = Fx/|**$\vec{F}$**| (6a)**

 Per trovare le componenti Fx e Fy posso invertire le eq. (5a) e (6a):

**Fx =|**$\vec{F}$**|∙cos(ϑ) (7a)** valore di Fx con ϑ partente dall’asse X

**Fy =|**$\vec{F}$**|∙sen(ϑ) (8a)** valore di Fy con ϑ partente dall’asse X

l’angolo ϑ è tracciato partendo dall’asse Y:

****Guarda la Figura 5b: l’angolo ϑ è tracciato partendo dall’asse Y.La prima cosa da fare è notare che l’angolo al vertice A è uguale a ϑ in quanto sono **alterni interni**.

Figura 5b

Nota che il ruolo dei cateti è invertito rispetto a quello della Figura 5a! **Fy è il cateto adiacente a ϑ** (cateto **a**) mentre **Fx è il cateto opposto a ϑ (**cateto **b**): il vettore $\vec{F}$**è l’ipotenusa** (lato **c**). Perciò le equazioni (1), (2) e (3) diventano:

**tan(ϑ) = b/a = Fx/Fy (4b)**

**sen(ϑ) = b/c = Fx/|**$\vec{F}$**| (5b)**

**cos(ϑ) = a/c = Fy/|**$\vec{F}$**| (6b)**

 Per trovare le componenti Fx e Fy posso invertire le eq. (5b) e (6b):

**Fx =|**$\vec{F}$**|∙sen(ϑ) (7b)** valore di Fx con ϑ partente dall’asse Y

**Fy =|**$\vec{F}$**|∙cos(ϑ) (8b)** valore di Fy con ϑ partente dall’asse Y

Nota che le equazioni con ϑ tracciato rispetto ad X hanno il seno scambiato con il coseno e viceversa rispetto a quelle con ϑ tracciato rispetto ad Y.

Nota che le eq. (7a),(8a) e (7b),(8b) danno solo il **valore assoluto** di Fx e Fy: per quanto riguarda il **segno**, ne discuteremo in seguito.

Alcuni esempi

Se tutta questa procedura sembra lunga o complicata, con alcuni semplici esempi vi convincerò che è più semplice fare il calcolo che spiegarne il metodo!

Guarda la Figura6: conosciamo il modulo e l’angolo di $\vec{F}$A e vogliamo calcolare il valore delle componenti FAX e FAY: calcoliamo quest’ultime usando le eq. (7a),(8a) o (7b),(8b) e verifichiamo se i risultati coincidono con quelli della Figura6.

Calcoliamo FAx e FAy

 Sappiamo che |FA| = 5N e ϑ=36,9°.

 calcolo FAx: FAx=|FA|⋅cos(ϑ) ; con la calcolatrice ottengo il valore di cos(36,9°) = 0,8 → FAx = 5N⋅0,8 = 4N

Figura 6

 calcolo FAy: FAy=|FA|⋅sen(ϑ) ; con la calcolatrice ottengo il valore di sen(36,9°) = 0,6 → FAy = 5N⋅0,6 = 3N

Problema1: guarda la Figura6: calcola i valori delle componenti X e Y di$ \vec{F}$B, $\vec{F}$C e $\vec{F}$D e confronta i tuoi valori con quelli ottenuti dal disegno della Figura6. Tieni conto che tu ottieni solo i valori assoluti delle componenti!

**Segno delle componenti**

Come detto in precedenza, le equazioni (7a),(8a) e (7b),(8b) permettono di calcolare il valore assoluto delle componenti ma non il loro segno: **il segno deve essere aggiunto “a mano” ricavandolo direttamente dal disegno**.

Questo è un concetto fondamentale e lo illustro con un facile esempio. Guarda la Figura6: se hai risolto correttamente il Problema1 avrai ottenuto FCX=2N, FCY=3N che sono i valori assoluti delle due componenti. Ma qual è il loro segno? Le equazioni non lo dicono, bisogna guardare la Figura6. Con un rapido sguardo risulta che: FCX=-2N ; FCY = +3N



Problema2: guarda la Figura7: sono disegnati 4 vettori in 4 diversi SdR. I vettori sono espressi in coor. polari: scrivili in coor. cartesiane usando la scrittura per componenti e le due scritture vettoriali che hai imparato. Stai attento! L’angolo del vettore $\vec{F}$4 è misurato rispetto all’asse Y!

Figura 7

**SOLUZIONI DEL PROBLEMA 2**

 $\vec{F}$1 = $\left\{\begin{array}{c}F\_{1X}=+15,0N\\F\_{1Y}=+26,0N\end{array}\right.$ ; $\vec{F}$1 = 15,0N$\hat{x}$ + 26,0N$\hat{y}$ ; $\vec{F}$1 = 30,0N·(0,500$\hat{x}$ + 0,867$\hat{y}$)

 $\vec{F}$2 = $\left\{\begin{array}{c}F\_{2X}=-15,8N\\F\_{2Y}=-12,3N\end{array}\right.$ ; $\vec{F}$2 = -15,8N$\hat{x}$ – 12,3N$\hat{y}$ ; $\vec{F}$2 = 20,0N·(-0,790$\hat{x}$ - 0,615$\hat{y}$)

 $\vec{F}$3 = $\left\{\begin{array}{c}F\_{3X}=-17,7N\\F\_{3Y}=-17,7N\end{array}\right.$ ; $\vec{F}$3 = -17,7N$\hat{x}$ – 17,7N$\hat{y}$ ; $\vec{F}$3 = 25N·(-0,708$\hat{x}$ - 0,708$\hat{y}$)

$ \vec{F}$4 = $\left\{\begin{array}{c}F\_{4X}=-34,6N\\F\_{4Y}=+20,0N\end{array}\right.$ ; $\vec{F}$4 = -34,6N$\hat{x}$ + 20,0N$\hat{y}$ ; $\vec{F}$4 = 40N·(-0,865$\hat{x}$ + 0,500$\hat{y}$)

**Come passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari – applicazione pratica**

E’ utile, anzi devo dire indispensabile, conoscere come passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari, cioè sapere calcolare il modulo |$\vec{F}$| e l’angolo ϑ di una forza $\vec{F}$ conoscendone le componenti Fx e Fy. Guarda la Figura 8: dal disegno vediamo che il vettore $\vec{F}$ possiede coordinate cartesiane Fx=4N, Fy=3N: devo conoscere il suo modulo |$\vec{F}$| e il suo angolo ϑ.

Figura 8

Calcolo del modulo |$\vec{F}$|: guarda la Figura 8: il vettore $\vec{F}$ e le componenti Fx e Fy formano un triangolo rettangolo di cui $\vec{F}$ è l’ipotenusa e Fx, Fy sono i due cateti. Perciò posso trovare il modulo |$\vec{F}$| usando il **Th. di Pitagora**:

**|**$\vec{F}$**| =** $\sqrt{Fx^{2}+Fy^{2}}$ **=** $\sqrt{(4N)^{2}+(3N)^{2}}$ **= 5N**

Calcolo dell’angolo ϑ: Nei paragrafi precedenti abbiamo ricavato le eq. (4)-(6):

**tan(ϑ) = b/a (4)**

**sen(ϑ) = b/c (5)**

**cos(ϑ) = a/c (6)**

con **a**=cateto adiacente a ϑ , **b**=cateto opposto a ϑ , **c**=ipotenusa (|$\vec{F}$|)

Grazie alle eq. (4)-(6) io sono in grado di calcolare il valore dei rapporti fra i lati del triangolo conoscendo l’angolo ϑ. Adesso devo fare il procedimento inverso: **una volta noti i rapporti fra i lati del triangolo devo trovare l’angolo ϑ.** La funzione che calcola l’angolo ϑ conoscendo il rapporto dei lati si chiama **funzione inversa**: ogni funzione trigonometrica ha la propria inversa.

* La funzione inversa della tangente si chiama **arcotangente** e si indica come **atan** o **tan-1**: essa calcola l’angolo ϑ quando è noto il rapporto b/a. **ϑ = tan-1(b/a)**
* La funzione inversa del seno si chiama **arco-seno** e si indica come **asen** , **sen-1** , **asin** o **sin-1**: essa calcola l’angolo ϑ quando è noto il rapporto b/c. **ϑ = sen-1(b/c)**
* La funzione inversa del coseno si chiama **arco-coseno** e si indica come **acos** o **cos-1**: essa calcola l’angolo ϑ quando è noto il rapporto a/c. **ϑ = cos-1(a/c)**

I valori delle funzioni inverse sono tabulati praticamente in ogni calcolatrice.

Sembra complicato? E’ più facile a farsi che a dirsi: ecco qua un esempio che dovrebbe chiarirvi le idee! Applico le funzioni inverse al vettore di Figura 8: Fx=a (cateto adiacente a ϑ) ; Fy = b (cateto opposto a ϑ)

 tan(ϑ) = b/a = (Fx=a ; Fy=b) → tan(ϑ) = Fy/Fx = (3N)/(4N) = ¾ ; ϑ = tan-1( ¾ ) = 36,9°

Posso ottenere lo stesso risultato usando il seno o il coseno:

sen(ϑ) = b/c = (Fy=b ; |$\vec{F}$|=c) → sen(ϑ) = Fy/|$\vec{F}$| = 3N/5N = 3/5 ; ϑ = sen-1( 3/5 ) = 36,9°

cos(ϑ) = a/c = (Fx=a ; |$\vec{F}$|=c) → cos(ϑ) = Fx/|$\vec{F}$| = 4N/5N = 4/5 ; ϑ = cos-1( 4/5 ) = 36,9°

Problema3: Guarda la Figura 9: sono disegnati 4 vettori. Per ognuno di essi disegna sulla Figura 9 la componente Fx e Fy: dopodiché calcola il modulo e l’angolo ϑ. Stai attento! Gli angoli ϑ1, ϑ4 sono tracciati rispetto all’asse X, gli angoli ϑ2, ϑ3 rispetto all’asse Y. **Bada a scegliere bene quale delle due componenti è quella adiacente e qual è quella opposta a ϑ.**

ATTENZIONE! **Ti conviene fare i calcoli usando il valore assoluto delle componenti**. Se invece usi i cateti con il loro segno, devi stare attento quando i cateti sono discordi: se usi sen-1 o tan-1 otterrai valori dell’angolo ϑ negativi, in questo caso trascura il segno di ϑ e considerane solo il valore assoluto; se usi cos-1 otterrai valori di ϑ maggiori di 90°: in questo caso devi considerare l’angolo supplementare, cioè l’angolo ϑSUPP = 180° - ϑ.

Figura 9

Per evitare confusione, **la cosa più semplice è quella di fare i calcoli usando il valore assoluto delle componenti**!

**SOLUZIONE:**

|$\vec{F}\_{1}$| = 5,00N ; ϑ1 = 53,13° ; |$\vec{F}\_{2}$| = 4,47N ; ϑ2 = 63,43°

|$\vec{F}\_{3}$| = 4,24N ; ϑ3 = 45,00° ; |$\vec{F}\_{4}$| = 4,47N ; ϑ4 = 63,43° ;