**CADUTA LIBERA IDEALE 1D (traiettoria verticale)**

****

Per **caduta libera ideale** si intende il moto di un oggetto lanciato in aria senza alcun vincolo (**caduta libera**) e sottoposto solo a gravità –cioè, trascurando l’attrito con l’aria- (**caduta ideale**). In altre parole, un corpo sarebbe in **caduta libera ideale** quando venisse lanciato sulla Luna… però, almeno per basse velocità e per corpi sufficientemente pesanti, è possibile trascurare l’effetto dell’aria e trattare il moto di caduta libera sulla Terra come ideale, almeno in prima approssimazione.

La **traiettoria** di caduta ideale di un corpo generalmente giace su di un piano in quanto un oggetto si sposta sia orizzontalmente (asse X) che verticalmente (asse Y) e perciò per il suo studio è necessario un SdR 2D. In questi appunti noi però tratteremo solo un caso particolare, quello di un oggetto lanciato in aria verticalmente (**lancio verticale**) cosicché la sua traiettoria si riduce ad un segmento verticale, cioè la linea di salita e di discesa: in questo modo possiamo studiare il movimento usando un SdR 1D. Alla base della traiettoria c’è il **punto di lancio**, il punto più alto è il **vertice** e il punto in cui ricade l’oggetto è il **punto di caduta**.

**TUTTI I CORPI CADONO ALLO STESSO MODO – esperimenti storici**

La legge fondamentale che regola la caduta libera ideale è tanto semplice quanto basilare:

**ogni corpo sottoposto solo a gravità cade allo stesso modo, qualunque sia la sua massa, forma o composizione chimica**

Questa legge fu scoperta da **Galileo Galilei** probabilmente agli inizi del 1600 e poi pubblicata nel suo capolavoro scientifico “**Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali”** stampato a [Leida](https://it.wikipedia.org/wiki/Leida) - [Paesi Bassi](https://it.wikipedia.org/wiki/Paesi_Bassi) nel [**1638**](https://it.wikipedia.org/wiki/1638). Ecco cosa riporta il testo: (Galileo, sotto lo pseudonimo di Salviati, spiega all’ascoltatore Simplicio la sua teoria):

**Salviati:** "Ma io, signor Simplicio, che n'ho fatto prova, vi assicuro che una palla di artiglieria, che pesi cento, dugento e anco più libbre, non anticiperà d'un palmo solamente l'arrivo in terra della palla d'un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall'altezza di dugento braccia... La maggiore anticipa due dita la minore, cioè che quando la grande percuote la terra, l'altra ne è lontana due dita."

Giustamente, Galileo imputa la piccola differenza di caduta alla resistenza dell’aria. come afferma subito dopo:

“...solo uno spazio del tutto voto d'aria e di ogni altro corpo, […], sarebbe atto a sensatamente mostrarci quello che cerchiamo […]. Se noi troviamo, in fatto, i mobili differenti di gravità *(corpi che cadono con diverso peso)* meno e meno differir di velocità secondo che i mezzi più e più cedenti si troveranno *(differire di velocità sempre meno al diminuire della resistenza del mezzo attraversato)*, […] parmi che potremo con molto probabil conietture credere che nel vacuo sarebbero le velocità loro del tutto eguali.”

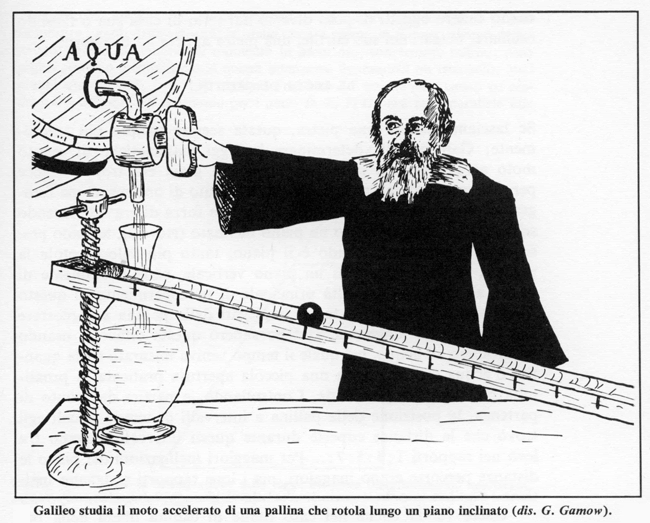
E’ da notare che questa legge era stata scoperta indipendentementa da Galileo da un altro grandissimo scienziato del 1600 che voi già conoscete: **Simon Stevin**. Ecco cosa riporta nel suo libro “**I Principi di Idrostatica”** pubblicato nel **1589**:

“Prendiamo (come ha fatto il coltissimo Jan Cornets de Groot, diligente ricercatore dei misteri della Natura, ed io ho fatto) due palle di piombo, l'una dieci volte più grande e più pesante dell'altra, e lasciamo che cadano insieme da 30 piedi di altezza, e mostrerà che la palla più leggera non è dieci volte più lenta di quella più pesante, ma esse cadono insieme a terra nello stesso tempo.”

Nel nostro piccolo abbiamo verificato la legge a lezione quando il Prof ha fatto cadere allo stesso istante due oggetti di massa e sostanza diversa (una gomma ed una penna o un peso ed una gomma): chi è caduto più velocemente? Abbiamo ripetuto l’esperimento più volte ed abbiamo notato che **entrambi gli oggetti cadevano allo stesso modo**: nessuno dei due riusciva a sopravanzare l’altro.

Alcuni di voi alle medie hanno già assistito a degli esperimenti che dimostrano che due corpi diversi cadono allo stesso modo se non sono disturbati dall’attrito con l’aria. Sul mio sito vi ho linkato dei video che dimostrano con chiarezza questo fenomeno: [Video della Luna](https://www.youtube.com/watch?v=KIHsl5muVYM) (fondamentale!) , [Il tubo di Newton](https://www.youtube.com/watch?v=i-UCK6397_k) , [Le due signorine](https://www.youtube.com/watch?v=jkacjOWSA_M).

**Tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione “g”**

La legge che abbiamo appena enunciato nel paragrafo precedente è giusta ma ha un difetto: non è una legge matematica e perciò non la posso sfruttare se voglio prevedere le proprietà del moto di un corpo. Perciò la prima cosa da fare è seguire l’esempio di **Galileo Galilei** e tradurre la legge scritta sopra in un’espressione matematica. Per farlo, facciamo una semplice osservazione: cosa fa un oggetto mentre cade? E’ evidente che esso accelera di continuo perché la sua velocità di caduta aumenta: allo stesso modo, quando sale decelera continuamente perdendo velocità. Dunque, la grandezza basilare della caduta di un corpo è l’**accelerazione**: e perciò dire che “due corpi cadono allo stesso modo” equivale a dire “due corpi hanno la medesima accelerazione”. Possiamo perciò riformulare la legge fondamentale della caduta libera come:

**Figura 1: Galileo e la caduta dei corpi**

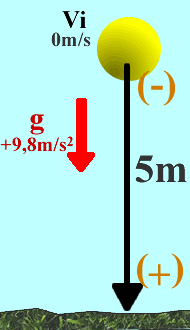
**ogni corpo sottoposto solo a gravità è sottoposto alla medesima accelerazione, qualunque sia la sua massa, forma o composizione chimica**

Qual è il valore dell’accelerazione di caduta? Gli esperimenti hanno mostrato che l’**accelerazione di caduta = 9,8m/s2**, **direzione verticale**, **verso in basso**. L’accelerazione di caduta viene universalmente indicata con la lettera **g** e perciò scriviamo **a = g = 9,8m/s2** (in modulo).

Nota che sia il simbolo che il valore “g” dell’accelerazione di gravità è identico alla grandezza “g” costante di proporzionalità fra Peso e Massa: l’unica differenza è l’unità di misura: m/s2 per l’accelerazione, N/kg per la costante di proporzionalità. E’ un caso? Uhmmm… direi di no. Scoprirete questo mistero l’anno prossimo: per adesso prendete come legge empirica che sulla Terra tutti i corpi accelerano verso il basso di 9,8m/s2.

**ALCUNE PROPRIETA’ DELLA CADUTA LIBERA IDEALE**

Adesso impareremo alcune proprietà di un corpo durante una **caduta libera ideale**. Lo faremo risolvendo con attenzione alcuni semplici problemi.

****Problema1: il tempo di caduta. Lasciamo cadere una pallina da una terrazza ad un’altezza di 5m: quanto tempo impiega a cadere?

Prima di iniziare ogni problema (vedi Figura2):

* Bisogna disegnare la retta della traiettoria, che è la freccia nera verticale.
* Poi orientiamo la retta: in questo caso metto il (+) in basso.
* Indichiamo la velocità iniziale della caduta: poiché la penna è lasciata cadere la sua velocità iniziale è nulla: Vi = 0m/s.
* Infine mettiamo il segno a “g”: g punta verso il basso, cioè verso il (+), e perciò scrivo: g = +9,8m/s2

**Soluzione**

Calcoliamo il tempo di caduta (ΔtC) attraverso **l’eq. oraria dello spostamento**:

**S(tC) = ½ ·a·tC2 + Vi·tC (1)**

**Figura 2: disegno del S.d.R. della traiettoria di un corpo lasciato cadere in aria**

Sostituisco i valori numerici:

**5m = ½·9,8m/s2·tC2 + 0·tC → tC = ± = +1,01s**

Nota che ottengo 2 soluzioni con tC, una positiva e l’altra negativa. Ho scelto quella positiva: come mai? Il motivo è che la caduta avviene dopo che la penna è stata lasciata, cioè nel **futuro** e perciò devo prendere la soluzione “+” (il “+” del tempo indica un evento che accadrà nel futuro, il “-“ indica un evento che è già accaduto nel passato).

Problema2: la velocità di caduta. Con quale velocità la penna lasciata cadere nel Problema1 tocca il suolo? **[Vf=+9,9m/s , cioè 9,9m/s verso il basso]**

**Soluz.:** Calcoliamo VF attraverso **l’eq. oraria della velocità**:

**VF(ΔtC) = a∙ΔtC + Vi (2)**

Per calcolare VF(ΔtC) ho bisogno del tempo di caduta. Il Problema1 ci ha mostrato come calcolarlo e abbiamo ottenuto tC= 1,01s:

VF(1,01s) = +9,8m/s2·+ 0 = +9,9m/s **-** cioè: VF = 9,9m/s verso il basso -

Problema3: la proporzionalità fra spazio di caduta e tempo di caduta. Calcola il tempo di caduta e la velocità di caduta nel caso in cui lo spazio di caduta è 4 volte maggiore di quello del Problema1 (S = 4·5m = 20m) e 9 volte maggiore (S = 9·5m = 45m). State attenti! Questo semplice problema illustra una **proprietà fondamentale** della caduta libera ideale! **[le soluzioni sono mostrate in Tabella1]**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Spazio di**  **caduta** | **Tempo di**  **caduta** | **Velocità di**  **caduta** |
| S  5m | 1,01s | 9,9m/s |
| 4·S  20m | 2,02s | 19,8m/s |
| 9·S  45m | 3,03s | 29,7m/s |

**Soluz:** Ripeti gli stessi calcoli usati nel Problema1 e Problema2. Le soluzioni sono mostrate nella Tabella1. Verifica se hai svolto i calcoli correttamente!

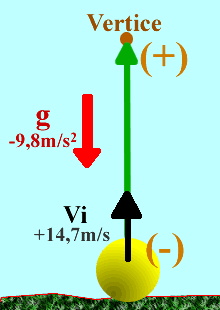
Cosa noti? Se lo spazio di caduta quadruplica → il tempo di caduta raddoppia, se lo spazio di caduta diventa 9 volte maggiore → il tempo di caduta triplica… In pratica:

**lo spazio di caduta è direttamente proporzionale al quadrato del tempo: SCADUTA** α **tCADUTA2**

Dove abbiamo già letto questa legge? Pensaci…

**ALCUNE PROPRIETA’ DELLA SALITA LIBERA IDEALE**

Adesso impareremo alcune proprietà di un corpo durante una **salita libera ideale**, cioè quando esso è lanciato verticalmente in aria e sta salendo. Lo faremo risolvendo con attenzione alcuni semplici problemi.

Problema4: il tempo di arrivo al vertice. Primo lancio verticale! Lanciamo un sasso in aria con una velocità iniziale Vi=14,7m/s. Quanto tempo impiega a raggiungere il vertice?

Prima di iniziare ogni problema (vedi Figura3):

* Bisogna disegnare la retta della traiettoria, che è la retta verde verticale.
* Poi orientiamo la retta: in questo caso metto il (+) in alto.
* Infine indichiamo i segni di “g” e delle velocità, in questo caso Vi:
  + Vi punta in alto, cioè verso il (+) e perciò scrivo: Vi = +14,7m/s
  + g punta verso il basso, cioè verso il (-) e perciò scrivo: g = -9,8m/s2

**Figura 3: disegno del S.d.R. della traiettoria di un corpo lanciato in aria**

**Soluz.:** Calcoliamo il tempo di arrivo al vertice (ΔtV)con **l’eq. oraria della velocità**:

**VF(ΔtV) = a∙ΔtV + Vi (1)**

Per risolvere l’eq. (1) è necessario conoscere la velocità istantanea di un oggetto quando arriva al vertice [VF(ΔtV)]. Nel punto di vertice la velocità passa da “velocità di salita, verso l’alto” a “velocità di discesa, verso il basso”: perciò quando è sul vertice l’oggetto non sale né scende… e perciò la velocità non può essere rivolta né verso l’alto né verso il basso: di conseguenza essa deve essere nulla! Abbiamo così imparato un’importante legge:

**la velocità istantanea di un oggetto al punto di vertice di una traiettoria è nulla**

Adesso risolvo l’eq. (1): V(ΔtV) = 0m/s , a = -9,8m/s2 , Vi = +14,7m/s → 0 = -9,8∙ΔtV +14,7 → ΔtV=1,5s

Detto a parole: “il sasso impiega 1,5s per raggiungere il vertice della traiettoria, cioè il punto di massima altezza.”

Problema5: la quota massima di salita. Prendiamo di nuovo l’esempio del Problema4. Il sasso è stato lanciato con una velocità iniziale Vi = 14,7m/s: esso sale, sale… e poi giunge al vertice. Qual è la quota max raggiunta (cioè: qual è l’altezza del vertice)? **[Altezza max = 11,025m]**

**Soluz:** Per risolvere il problema è necessario conoscere il tempo di arrivo al vertice. Il Problema4 ci ha mostrato come calcolarlo e abbiamo ottenuto tV = 1,5s: con questo valore possiamo calcolare l’altezza del vertice. Posso usare due formule:

S = → (sostituisco i valori) → S = = 11,025m

S = ½·a·tV2 + Vi·tV → (sostituisco i valori) → ½ ·(-9,8m/s2)·(1,5s)2 + 14,7m/s ·(1,5s) = 11,025m

Detto a parole: “il sasso sale fino a giungere ad un’altezza max di 11,025m.”

Problema6: la proporzionalità fra la quota massima di salita e la velocità iniziale. Adesso vi do un problema da svolgere: calcolate l’altezza max del vertice quando la velocità di lancio è: 10m/s ; 20m/s ; 30m/s.

**[le soluzioni sono mostrate in Tabella2]**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Velocità di lancio** | **Tempo di**  **arrivo al vertice** | **Altezza del vertice** |
| Vi  10m/s | 1,02s | 5,1m |
| 2·Vi  20m/s | 2,04s | 20,4m |
| 3·Vi  30m/s | 3,06s | 45,9m |

**Soluz:** Ripeti gli stessi calcoli usati nel Problema4 (per calcolare il tempo di arrivo al vertice) e nel Problema5. Le soluzioni sono mostrate nella Tabella2.

Verifica se hai svolto i calcoli correttamente!

Cosa noti? Se la velocità di lancio raddoppia → l’altezza max quadruplica; se la velocità di lancio triplica → l’altezza max diventa 9 volte maggiore. In pratica:

**l’altezza max è direttamente proporzionale al quadrato della velocità di lancio: Altezza max** α **Vi2**

**Tabella 2**

Problema7: uguaglianza fra tempo di salita al vertice e tempo di caduta. Adesso ti propongo questo problema: calcola il tempo di caduta quando la quota è esattamente quella dell’altezza del vertice che abbiamo calcolato nel Problema6, cioè: SCADUTA = 5,1m ; SCADUTA = 20,4m ; SCADUTA = 45,9m. Per calcolare il tempo di caduta, guarda l’esempio del Problema1. **[tCADUTA = 1,02s ; tCADUTA = 2,04s ; tCADUTA = 3,06s]**

Cosa noti? Confronta le tue soluzioni con quelle della Tabella2: i tempi di caduta sono esattamente uguali a quelli di arrivo al vertice! In conclusione: **il tempo di caduta è esattamente uguale a quello di arrivo al vertice.**

Problema8: simmetria fra velocità di lancio e velocità di caduta. Infine svolgi quest’ultimo problema: calcola la velocità di caduta quando le altezze di caduta sono le stesse di quelle del Problema7, cioè: SCADUTA = 5,1m ; SCADUTA = 20,4m ; SCADUTA = 45,9m. Per svolgere il problema guarda l’esempio del Problema2.

**[Vf=10m/s ; Vf = 20m/s ; Vf = 30m/s]**

Cosa noti? Confronta le tue soluzioni con le velocità di lancio della Tabella2: i valori sono esattamente gli stessi! In conclusione: **un corpo ricade al suolo con la stessa velocità (in modulo) con cui è stato lanciato.**



Adesso è giunta l’ora di fissare i concetti essenziali di questi appunti.

Stiamo studiando un moto di **caduta libero ideale**, cioè il moto di un oggetto che sulla Terra si muove in aria soggetto solo alla gravità.

Per semplicità, studiamo per adesso solo un **lancio verticale**: in questo modo il corpo lanciato si muove su di una retta (moto 1D).

La traiettoria ha un **punto di lancio** (da dove parte l’oggetto lanciato), un **punto di vertice** (il punto più alto della traiettoria) e un **punto di caduta** (dove cade l’oggetto al suolo), che coincide con il punto di lancio.

Abbiamo mostrato con dei semplici esperimenti in classe che tutti i corpi cadono allo stesso modo. Questa proprietà era stata scoperta nel 1600 circa dai due più grandi scienziati del tempo, cioè **Simon Stevin** e **Galileo Galilei**.

Abbiamo poi affermato che la caduta è la stessa perché **tutti i corpi sono soggetti alla stessa accelerazione di gravità**. Essa si indica con **g**: dalle misure effettuate risulta che **g=9,8m/s2**, rivolta verso il basso. Di conseguenza, **il moto di una caduta libera ideale è un moto unif. accelerato** con accelerazione a = g = 9,8m/s2 verso il basso.

Dopodiché abbiamo usato le equazioni del moto accelerato per scoprire alcune interessanti proprietà della caduta libera ideale: abbiamo osservato che **al vertice la velocità è nulla**, abbiamo imparato a calcolare il tempo di caduta, la velocità di caduta, il tempo di salita al vertice e l’altezza del vertice. Facendo alcuni confronti abbiamo visto che:

* lo spazio di caduta è direttamente proporzionale al quadrato del tempo (Legge scoperta da Galileo Galilei).
* l’altezza max è direttamente proporzionale al quadrato della velocità di lancio.
* il tempo di caduta è esattamente uguale a quello di salita al vertice.
* un corpo ricade al suolo con la stessa velocità (in modulo) con cui è stato lanciato.