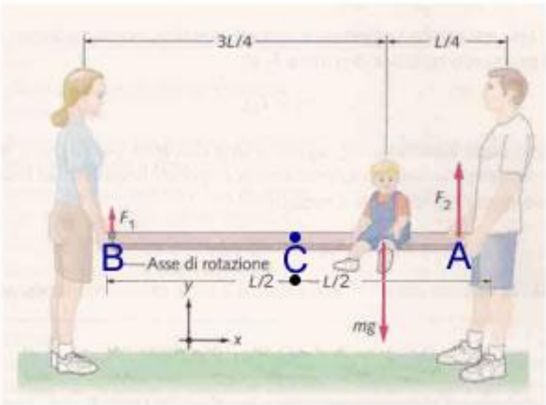
TEOREMA DELLO "ZERO" DEL MOMENTO

Tutta la **Statica** è basata su di un semplice ma importantissimo teorema, che può essere così enunciato:

se in un Sistema la Forza totale è nulla ed inoltre il Momento delle forze è nullo rispetto ad un particolare punto (punto O) allora il Momento è nullo per qualsiasi altro punto (punti O')

Prima di dimostrare il Teorema e discuterne importanza ed applicazioni, facciamo qualche esempio che lo illustri. Consideriamo il Sistema[1] disegnato nella figura sottostante: babbo e mamma che tengono un bambino su di una trave che, per comodità, è considerata senza massa (vedi figura sotto). Consideriamo come fulcro il punto A, coincidente con il babbo. Supponiamo che la trave+bambino sia tenuta in equilibrio: allora deve essere: $\mathbf{F^{TOT}=0}$ **;** $\tau_{(A)}{}^{TOT}\mathbf{=0}$. Scrivendo il sistema ottengo:

11 • DINAMICA ROTAZIONALE ED EQUILIBRIO STATICO



◄ Figura 5. **Forze necessarie per l'equilibrio statico.**
Una bimba è sostenuta su una tavola, di peso trascurabile e lunghezza *L*, dai suoi genitori. Per eseguire i calcoli descritti nel testo poniamo l'asse di rotazione nell'estremo sinistro della tavola.

$$\begin{cases} \boldsymbol{f1+f2-mg=0} \quad (\boldsymbol{F^{TOT}=0}) \\ \boldsymbol{mg\cdot\frac{L}{4}-f1\cdot L=0} \quad (\boldsymbol{\tau_{(A)}{}^{TOT}=0}) \end{cases}$$

Risolvendolo, ottengo questa soluzione: $f_1 = mg/4$; $f_2 = 3/4mg$

Ma posso immaginare che la stessa trave possa ruotare intorno alla mamma: allora devo porre O=B. Devo sostituire l'equazione $\tau_{(A)}{}^{TOT}\mathbf{=0}$ con $\tau_{(B)}{}^{TOT}\mathbf{=0}$ ed il sistema diventa:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f1+f2-mg=0} \quad (\boldsymbol{F^{TOT}=0}) \\ \boldsymbol{-mg\cdot\frac{3}{4}L+f2\cdot L=0} \quad (\boldsymbol{\tau_{(B)}{}^{TOT}=0}) \end{cases}$$

Risolvendolo, ottengo ancora come soluzione: $f_1 = mg/4$; $f_2 = 3/4mg$

---

[1] Sfortunatamente, la parola "sistema" significa due cose del tutto diverse: 1) Insieme degli oggetti che stiamo studiando (significato fisico) 2) Insieme di equazioni/disequazioni che devono essere soddisfatte allo stesso tempo (significato matematico). Dal contesto è immediato capire a quale dei due significati mi riferisco: comunque, per maggior chiarezza, indicherò con la maiuscola, "Sistema" , il primo dei due significati.

Infine, babbo e mamma si mettono d'accordo che, nel caso la trave dovesse ruotare, essa ruoterà intorno al punto di mezzo C. Devo perciò usare l'equazione $\tau_{(C)}^{TOT}=0$:

$$\begin{cases} f1 + f2 - mg = 0 \quad (F^{TOT} = 0) \\ -mg \cdot \frac{1}{4} L - f1 \cdot \frac{L}{2} + f2 \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad (\tau_{(C)}{}^{TOT} = 0) \end{cases}$$

Ancora una volta ottengo come soluzione: $f_1 = mg/4$; $f_2 = 3/4mg$

Nota che sembra proprio che la soluzione ottenuta usando come fulcro un particolare punto O vada bene per qualsiasi altro punto O'. In altre parole (**considerazione matematica**):

la soluzione del sistema dell'equilibrio del corpo rigido ($F^{TOT} = 0$ e $\tau_{(O)}{}^{TOT} = 0$) non dipende dal punto scelto come fulcro

Ma poiché la soluzione del sistema mi permette di trovare l'insieme delle forze che mantengono il corpo in equilibrio, posso subito affermare (**considerazione fisica**):

se un insieme di forze tiene in equilibrio un Sistema rispetto ad un qualche fulcro O allora esso lo tiene in equilibrio anche rispetto ad ogni altro possibile fulcro O'

Ma a cosa serve questa proprietà? Qual è la sua importanza e/o la sua utilità? Analizziamo la cosa.

Dal punto di vista matematico, la sua utilità è evidente: io posso risolvere il sistema scegliendo arbitrariamente il fulcro O rispetto al quale calcolare lo zero del Momento, cioè rispetto al quale calcolare $\tau_{(O)}^{TOT}=0$. Questo può semplificare il sistema, rendendo più rapidi i calcoli.

Dal punto di vista fisico... la sua importanza è fondamentale! Infatti, affermare che il Momento è nullo "rispetto ad un punto O" significa che il Sistema non ruota intorno ad O... ma potrebbe ruotare intorno ad un altro punto O'! Ma affinché il Sistema **sia in equilibrio**, esso non deve ruotare intorno a **nessun** punto O'; in altre parole deve esistere un insieme di forze tale che $\tau_{(O')}^{TOT}=0$ **qualunque sia il punto O'**. Ma esiste questa possibilità? Cioè, esiste un insieme di forze in grado di garantire che $\tau_{(O')}^{TOT}=0$ qualunque sia il punto O'? Se questo insieme di forze esiste allora il Sistema è incapace di ruotare intorno a qualsiasi punto dello spazio, cioè rimane in equilibrio: se all'opposto tale insieme di forze non dovesse esistere allora vuol dire che esisterebbe almeno un punto O' tale che $\tau_{(O')}^{TOT}\neq0$: il Sistema allora ruoterebbe intorno a quel punto e il suo equilibrio non sarebbe possibile.

Dall'esempio fatto sopra sembra proprio che un tale insieme di forze esista, nel nostro caso la coppia di forze $f_1 = mg/4$; $f_2 = 3/4mg$, poiché esso garantisce l'equilibrio qualunque sia il fulcro. Ma è un caso? No di certo!

Infatti, esiste un teorema, il **Teorema dello "zero" del Momento** il quale garantisce che:

se la somma delle forze agenti è nulla e il momento rispetto ad un particolare punto O è anch'esso nullo, allora il momento rimane nullo rispetto a qualunque altro punto O'

TEOREMA DELLO ZERO DEL MOMENTO

“se la risultante delle forze è nulla ($F^{TOT}=0$) ed il momento totale rispetto ad un punto particolare O è nullo ($\tau_{(O)}{}^{TOT}=0$), allora il momento è sempre nullo rispetto ad un qualsiasi altro punto O’ ($\tau_{(O')}{}^{TOT}=0$). ”

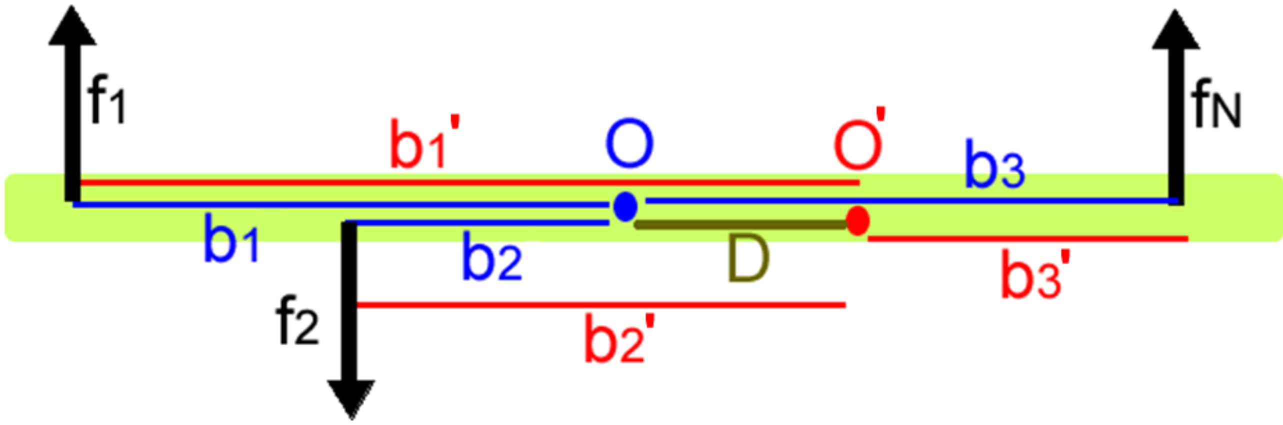
Hp) **Consideriamo un Sistema (per semplicità, una sbarra) sulla quale è applicato un insieme di forze $f_1, f_2, \dots f_N$. Sia poi $f_1+f_2+\dots+f_N = 0$ [2] (cioè, sia $F^{TOT}=0$).**

Inoltre, sia anche $f_1 \cdot b_1 + f_2 \cdot b_2 + \dots + f_N \cdot b_N = 0$ [3] , con $b_1, b_2, \dots b_N$ bracci delle forze rispetto ad un punto O (cioè $\tau_{(O)}{}^{TOT}=0$).

Ts) **$\forall$O’, il momento totale delle forze rispetto a O’ è zero (cioè $\forall O' \rightarrow \tau_{(O')}{}^{TOT}=0$)**

Dim) Consideriamo un punto **O’** arbitrario e sia **D** la distanza di O’ da O, cioè: **O’-O=D**.

Allora la distanza di f_1 da O’ è $b_1' = b_1 - D$, quella di f_2 è $b_2' = b_2 - D \dots b_N' = b_N - D$ [4].



Calcoliamo $\tau_{(O')}{}^{TOT}$: dobbiamo dimostrare che esso è nullo.

$\tau_{(O')}{}^{TOT} = f_1 \cdot b_1' + f_2 \cdot b_2' + \dots + f_N \cdot b_N' = f_1 \cdot (b_1 - D) + f_2 \cdot (b_2 - D) + \dots + f_N \cdot (b_N - D) =$

= (raccogliendo da una parte i bracci **$b_1, b_2, \dots b_N$** e dall’altra parte i termini con **D**) =

$= f_1 \cdot b_1 + f_2 \cdot b_2 + \dots + f_N \cdot b_N \quad - \; (f_1 \cdot D + f_2 \cdot D + \dots + f_N \cdot D) =$

$= \quad \tau_{(O)}{}^{TOT} \quad - \quad (f_1+f_2+\dots+f_N) \cdot D \quad =$

$= \quad \tau_{(O)}{}^{TOT} \quad - \quad F^{TOT} \cdot D \quad =$

$= \quad 0$ (per Hp) $\quad - \quad 0 \cdot D$ (per Hp) $\quad = \; 0$ ***C.V.D.***

---

[2] In questo caso il segno “+” deve essere considerato come “+ algebrico”: il segno delle varie *f* dovrà essere dato in base a come le forze sono orientate. Comunque, il segno delle varie *f* è ininfluente rispetto alla dimostrazione del teorema.

[3] Come per la nota 3: il “+” dei momenti deve essere considerato “+ algebrico”.

[4] In pratica, è stata traslata l’origine da O a O’, spostandola di un valore D. In una traslazione vale la legge: $X' = X - X_0$, con X_0 il valore della traslazione. Nel nostro caso: $X' \equiv b'$; $X_0 \equiv D$; $X \equiv b \rightarrow b' = b - D$.