PROBLEMI SVOLTI DI STATICA DEL CORPO RIGIDO 2D

LA TRAVE ATTACCATA ALLA PARETE

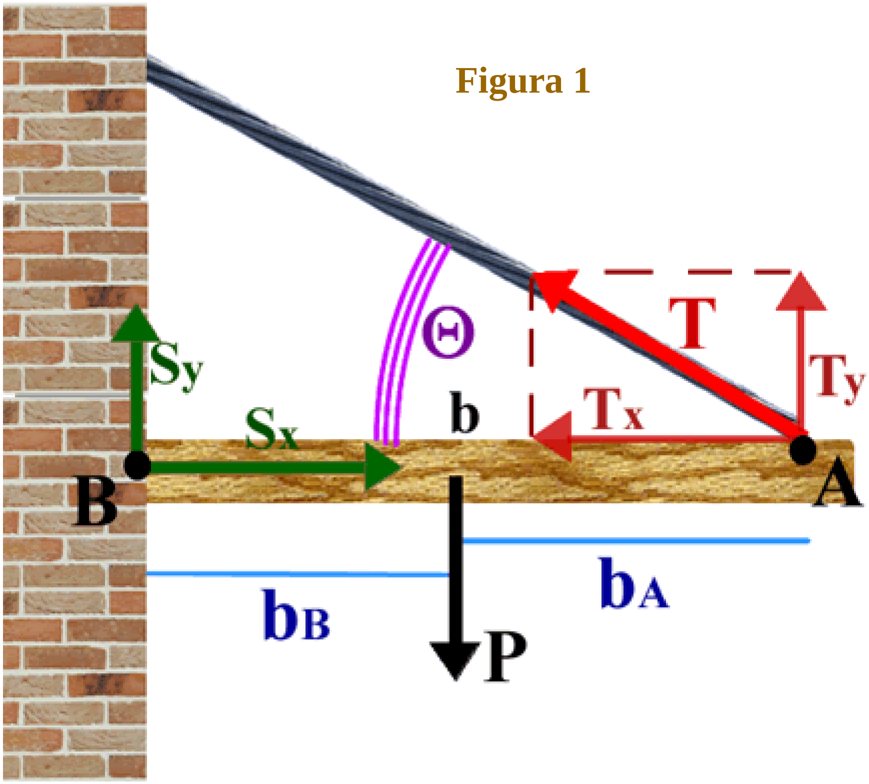
Consideriamo una **trave attaccata ad un muro e tenuta sospesa da un cavo**. In classe abbiamo fatto l'esempio del Prof che teneva un astuccio (la trave) tendendo un elastico diagonalmente (il cavo) mentre bloccava con un dito l'altro estremo del registro (il punto B). Voglio sapere quali sono le forze che agiscono per tenere in equilibrio la trave e qual è il loro valore (vedi Figura 1). Supponi che la trave abbia un peso $\mathbf{P = 80N}$; l'angolo fra il cavo e la trave sia ϑ=30° ; supponi poi che b_A=1,2m ; b_B=1,6m. Il sistema diventa:

[Sy = 32N ; T=96N ; Sx=83,14N]

Trova l'intensità della forza vincolare $\vec{S}$ e l'angolo ϑ che essa forma con la linea orizzontale.

[$|\vec{S}| = 89N$; ϑ = 21°]

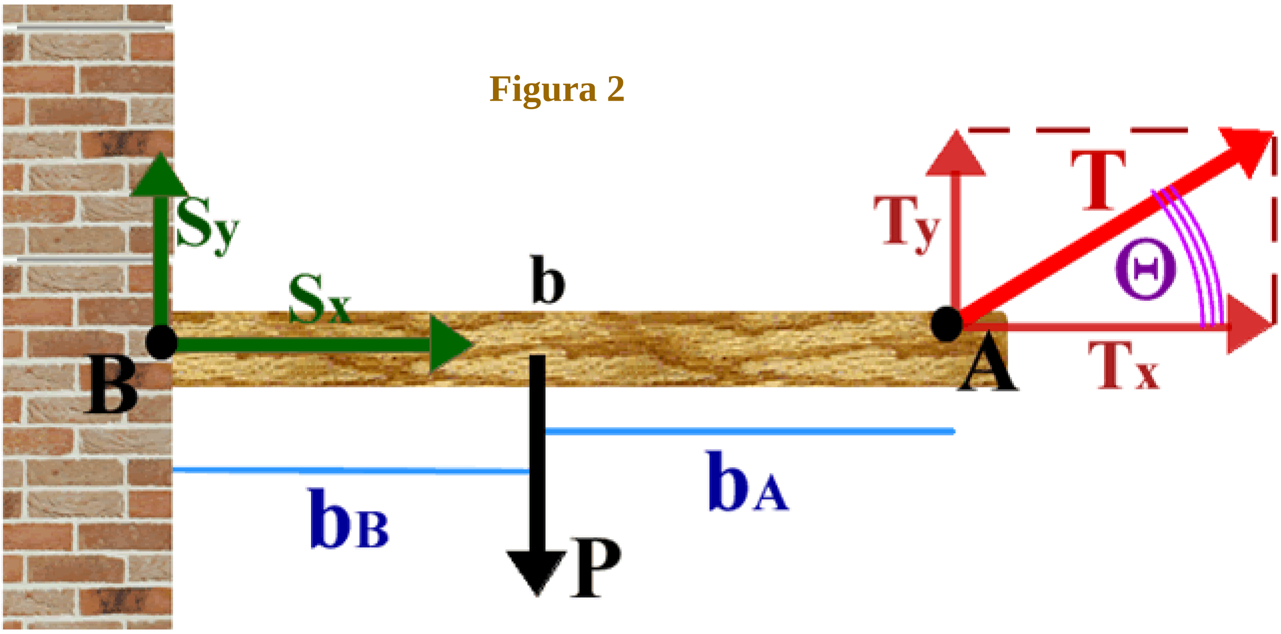
E' bene esprimere la soluzione a parole per capirne il significato fisico: "Affinché la trave rimanga in equilibrio infissa nel muro e sostenuta dal cavo è necessario che il cavo sia in grado di applicare una forza T=96N ed il muro una forza Sx=83,14N e Sy=32N".



Un caso concreto: un'asta che sostiene un piccolo argano grazie ad un cavo obliquo.

LA TRAVE SPINTA DA SOTTO

Adesso analizziamo un secondo caso: quello di una **trave sostenuta da una forza obliqua diretta verso l'esterno**. In classe abbiamo fatto l'esempio del solito registro (la trave) con il Prof che lo sosteneva tendendo l'elastico dalla parte opposta a dove l'allieva teneva l'altro estremo dell'elastico (il punto B). Il tutto è schematizzato in Figura 2. Diamo dei valori e troviamo la soluzione numerica: m_{TRAVE}=1,5kg ; b_A = 0,25m ; b_B=0,50m ; ϑ=20° . Il sistema diventa:



La soluzione numerica risulta: [Sy = 4,9N ; T = 28,7N ; Sx = -27,0N]. Per quanto riguarda il modulo di $\vec{S}$ e l'angolo ϑ rispetto all'orizzontale abbiamo: [$|\vec{S}|$ = 27,44N ; ϑ = 10,3°]

Segno delle forze

"Prof, il valore di Sx è negativo! Cosa significa?" "Pensaci…" Se ci pensi bene, la risposta è ovvia e la ottieni subito guardando la Figura 2. E' chiaro che la forza T spinge la trave verso destra, cosicché il muro deve applicare la forza Sx diretta verso sinistra. Ma la forza Sx è disegnata diretta anch'essa verso destra, cioè nel verso opposto al suo. Per questo la soluzione risulta negativa: il segno "**-**" significa: "la forza disegnata è diretta nel verso opposto al suo." Perciò un valore negativo non implica in alcun modo di aver fatto un errore; piuttosto, **un valore negativo per una forza significa che essa ha il verso opposto a come è stata disegnata**.

SOLUZIONE-TIPO AL PROBLEMA "LA TRAVE ATTACCATA ALLA PARETE"

Disegniamo le forze

Per prima cosa, disegniamo tutte le forze: il **peso della trave** (**P**), la **tensione della fune** applicata al punto A (**T**), la **forza vincolare del muro** nel punto B (S, già scomposta nelle sue componenti **Sx** e **Sy**).

Inoltre segniamo la distanza del **baricentro** (**b**), dove posso supporre sia concentrato il peso, sia dal punto di azione di T (**b$_A$**) sia dal punto di incastro nel muro (**b$_B$**).

Scriviamo il sistema

Per rispondere, dobbiamo risolvere le equazioni dell'equilibrio del corpo rigido:

$$\begin{cases} F_{totx} = \ 0 \quad (blocca\ la\ traslazione\ lungo\ X) \\ F_{toty} = \ 0\ (blocca\ la\ traslazione\ lungo\ Y) \\ \tau_{tot} = 0\ (\ blocca\ la\ rotazione) \end{cases}$$

Adesso scriviamo ognuna delle tre equazioni:

- **lungo x** agiscono sia Sx e Tx ; pongo il (+) a destra → Sx – Tx = 0
- **lungo y** agiscono sia Sy che Ty e P: pongo il (+) verso l'alto → Sy + Ty – P = 0
- **Per il calcolo del momento** τ è necessario scegliere il fulcro: poiché siamo all'equilibrio posso scegliere come fulcro un qualsiasi punto a piacere. Per comodità scelgo come fulcro il punto A. In questo caso Tx e Ty non hanno braccio (esse agiscono direttamente sul fulcro); nemmeno Sx ha braccio (essa punta direttamente al fulcro). Le uniche forze aventi braccio sono P (il suo braccio è b_A) e Sy (il suo braccio è (b_B+b_A). Infine, scelgo il verso anti-orario come segno (+) → $\tau^{TOT} = P \cdot b_A - Sy \cdot (b_A+b_B) = 0$.

Il sistema diventa perciò:

$$\begin{cases} Sx - Tx = \ 0 \\ Sy + Ty - P = \ 0 \\ P \cdot b_A - Sy \cdot (b_A + b_B) = 0 \end{cases}$$

Scomponiamo le forze oblique (se ci sono)

"Prof, c'è un problema!" "Quale, mimmi?" "Io posso misurare il peso **P** e le distanze $\mathbf{b_A}$ e $\mathbf{b_B}$: questi non sono incognite ma valori che posso conoscere già in partenza. Mi rimangono perciò **4 incognite**: Sx, Sy, **Tx**, **Ty** ma il sistema ha solo **3 equazioni**! Non si può risolvere!"

"Bene mimmo, buona osservazione. Le incognite sembrano 4 ma in realtà esse sono solo 3: infatti, pensaci un po'...." "Uhmmm... c'è l'angolo ϑ... la tensione T... ecco! Ho capito! In realtà **la terza incognita è la tensione T**: essa scorre infatti lungo il filo che forma un angolo ϑ e perciò Tx e Ty dipendono da T secondo l'angolo ϑ!" "Bravo, ben detto."

La forza T è **obliqua**: le sue componenti sono Tx=T·cos(ϑ) e Ty=T·sen(ϑ). Se scriviamo nel sistema le componenti Tx e Ty in funzione di T otteniamo:

$$\begin{cases} Sx - Tcos(\vartheta) = \ 0 \\ Sy + Tsen(\vartheta) - P = \ 0 \\ P \cdot b_A - Sy \cdot (b_A + b_B) = 0 \end{cases}$$

Adesso ho 3 equazioni e 3 incognite (Sx , Sy , T)!

Soluzione numerica

Ora mettiamo in pratica tutto quanto: consideriamo un caso numerico e risolviamolo. **P = 80N ; ϑ=30°; $\mathbf{b_A}$=1,2m ; $\mathbf{b_B}$=1,6m.** Il sistema diventa:

$$\begin{cases} Sx - 0{,}866 \cdot T = \ 0 \\ Sy + 0{,}5 \cdot T - 80 = \ 0 \\ 80 \cdot 1{,}2 - Sy \cdot (1{,}2 + 1{,}8) = 0 \end{cases}$$

Dopo banali calcoli, otteniamo la soluzione: **[Sy = 32N ; T=96N ; Sx=83,14N]**. Per quanto riguarda il modulo di $\vec{S}$ e l'angolo ϑ rispetto all'orizzontale abbiamo: $[|\vec{S}| = \sqrt{S_X^2 + S_Y^2} = 89N\ ;\ \vartheta = \tan^{-1}(Sy/Sx) = 21°]$