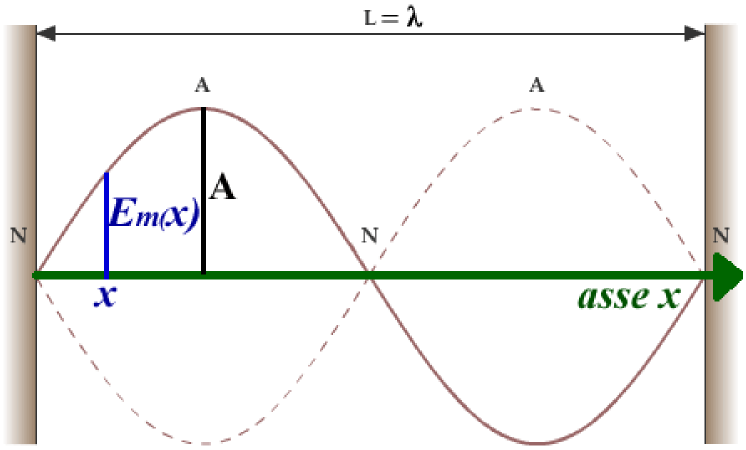
ONDE STAZIONARIE : DESCRIZIONE MATEMATICA

In questi appunti tratterò della descrizione matematica di un'onda stazionaria, cioè di come rappresentare un'onda stazionaria attraverso un'equazione matematica.

Iniziamo con il disegnare un'onda stazionaria lungo tutta la sua lunghezza d'onda λ: supponiamo poi che l'onda sia al massimo della sua ampiezza (max potenziale, min cinetica): vedi Figura1.



L'ampiezza massima dell'onda è una funzione sinusoidale della posizione "x"

Dalla Figura1 è evidente che l'ampiezza max [**Em(x)**] cambia al cambiare della posizione x dell'onda: è nulla ai due estremi e a metà della lunghezza d'onda (cioè ai punti x=0 , x=λ , x=λ/2) e giunge al valore massimo "A" positivo/negativo nei punti del **ventre**. Sempre dalla figura, è evidente che Em(x) è descritta dalla funzione **seno**:

$$Em(x) = A \cdot sen(\varphi) \qquad (1)$$

con **A** il valore dell'ampiezza massima a cui giunge l'onda, cioè A=ampiezza massima del ventre**,** e φ la cosiddetta fase dell'onda.

Il coefficiente **sen(φ)** rappresenta il valore massimo a cui giunge l'onda nel punto "x" rispetto all'ampiezza massima possibile dell'onda, cioè il valore che essa raggiunge nel suo ventre e che è indicato dalla lettera "A".

Tanto per fare un esempio: dire che "il ventre dell'onda ha un'ampiezza di 30mm e nel punto x=12cm ho un valore sen(φ)=0,5" significa che: "A=30mm e nel punto x=12cm l'ampiezza massima giunge al valore massimo Em(12cm)=sen(φ)·A = 0,5·30mm = 15mm".

E' evidente che ad ogni punto "x" corrisponde un valore di sen(φ) e perciò un valore della **fase** φ:

quando $x = 0 \rightarrow sen(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = 0$

quando $x = \lambda/2 \rightarrow sen(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = \pi$

quando $x = \lambda \rightarrow sen(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = 2\pi$

Inoltre: quando $x = \lambda/4 \rightarrow sen(\varphi) = 1 \rightarrow \varphi = \pi/2$

quando $x = \frac{3}{4}\lambda \rightarrow sen(\varphi) = -1 \rightarrow \varphi = 3/2\pi$

Dallo schema sopra è evidente che **posizione x e fase φ sono direttamente proporzionali**:

$$x : \lambda = \varphi : 2\pi \rightarrow \varphi = 2\pi x/\lambda$$

Scrivo perciò l'eq. (1) come:

$$\boxed{Em(x) = A \cdot sen(2\pi x/\lambda) \qquad (2)}$$

L’ampiezza dell’onda oscilla al cambiare del tempo “t”

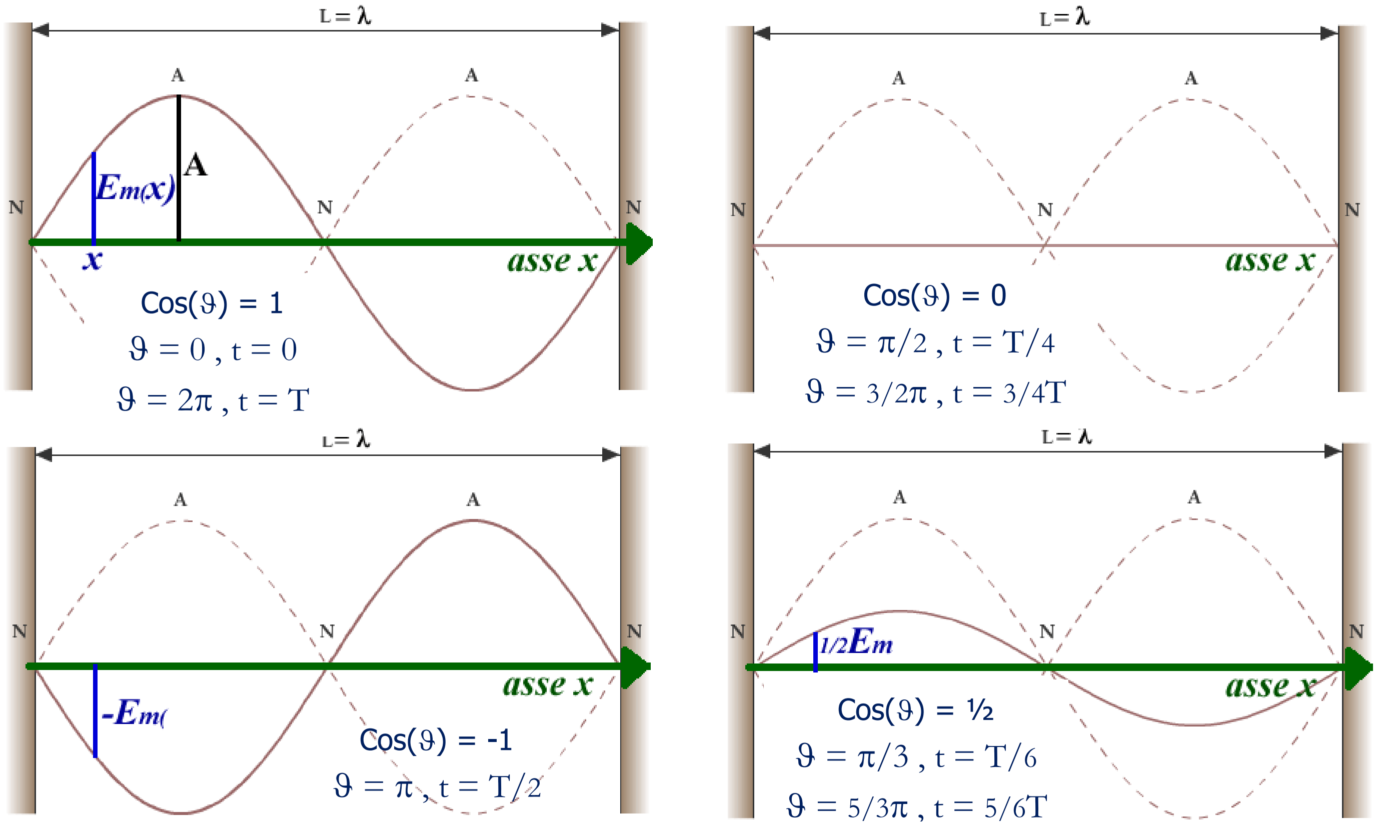
Un’onda non rimane immobile ma oscilla: al variare del tempo l’ampiezza dell’onda (**E**) passa dal suo valore massimo **Em** al valore “zero” per poi passare al valore **–Em** per poi ritornare a “zero” e infine giungere nuovamente al valore **Em**: tutto questo ciclo viene compiuto in un tempo uguale al periodo dell’onda (**T**).

La variazione temporale dell’ampiezza è chiaramente descritta da una funzione periodica: si può dimostrare che essa è la funzione **coseno**. Scrivo perciò:

$$E = \cos(\vartheta)\cdot Em \qquad (3)$$

Il coefficiente **cos(ϑ)** rappresenta il valore a cui giunge l’onda all’istante “t” rispetto al suo valore massimo Em. Tanto per fare un esempio: dire che “l’onda al punto x=12cm ha un’ampiezza massima di 15mm e al tempo t=4s ho un valore cos(ϑ) = 0,3” significa che “Em(12cm) = 15mm” e che “quando t=4s allora l’ampiezza dell’onda è E = cos(ϑ)·Em = 0,3·15mm = 4,5mm”.

Per la **fase** ϑ si può fare la medesima analisi eseguita per φ, solo che invece che compararla alla posizione x bisogna confrontarla con il tempo t:



quando $t = 0 \rightarrow \cos(\vartheta) = 1 \rightarrow \vartheta = 0$

quando $t = T/2 \rightarrow \cos(\vartheta) = -1 \rightarrow \vartheta = \pi$

quando $t = T \rightarrow \cos(\vartheta) = 1 \rightarrow \vartheta = 2\pi$

Inoltre: quando $t = T/4 \rightarrow \cos(\vartheta) = 0 \rightarrow \vartheta = \pi/2$

quando $t = \frac{3}{4}T \rightarrow \cos(\vartheta) = 0 \rightarrow \vartheta = 3/2\pi$

dallo schema sopra è evidente che **tempo t e fase ϑ sono direttamente proporzionali**:

$$t : T = \vartheta : 2\pi \rightarrow \vartheta = 2\pi t/T$$

Scrivo perciò l'eq. (3) come:

$$E(t) = \cos(2\pi t/T)\cdot Em \qquad (4a)$$

L'eq. (4a) mi permette di calcolare istante per istante l'ampiezza di un'onda di cui conosco l'ampiezza massima Em. Se invece il valore di Em non è noto io lo devo calcolare grazie all'eq. (2): $Em(x) = A\cdot sen(2\pi x/\lambda)$. Usando l'eq. (2) all'interno dell'eq. (4a) ottengo:

$$E(x,t) = A\cdot\cos(2\pi t/T)\cdot sen(2\pi x/\lambda) \quad (4b)$$

L'eq. (4b) mi permette di calcolare istante per istante l'ampiezza dell'onda in un punto prefissato "x".

Per semplicità, si indica: $2\pi/\lambda = K$ (pulsazione spaziale) ; $2\pi/T = \omega$ (pulsazione temporale) , cosicché l'eq. (4a) e (4b) vengono indicate anche come:

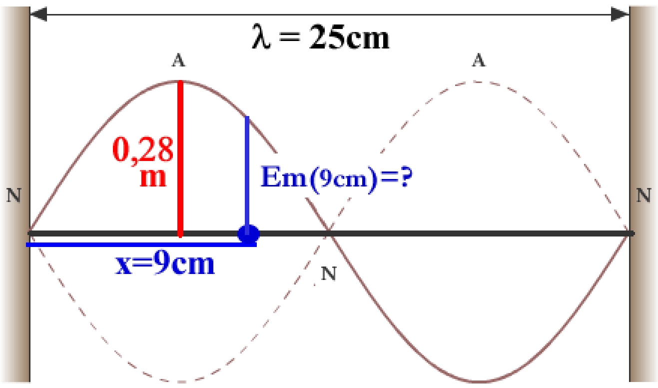
$$E(t) = \cos(\omega\cdot t)\cdot Em \qquad (4c)$$

$$E(x,t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot sen(Kx) \qquad (4d)$$

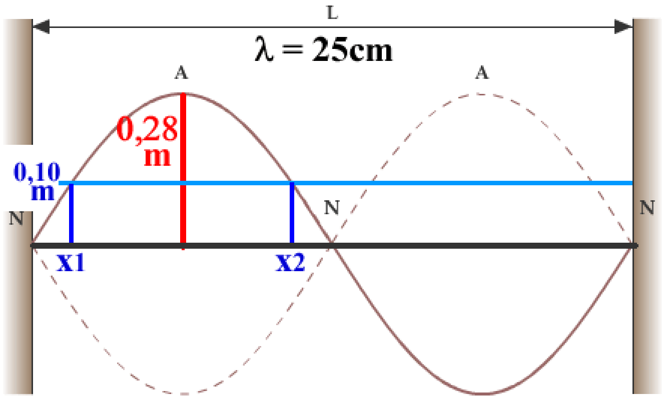
ALCUNI SEMPLICI PROBLEMI

Adesso ci eserciteremo a risolvere alcuni problemi con le onde stazionarie.

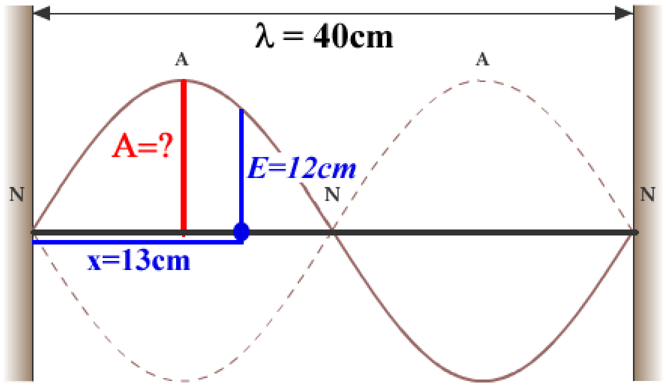
Problema1: Un'onda stazionaria ha una lunghezza d'onda di 25cm ed un'ampiezza massima al ventre di 0,28m. Trova l'ampiezza massima alla distanza dall'origine di 9cm. [Em(9cm) = 0,216m]



Problema2: a quale distanza dall'origine l'onda del Problema1 possiede un'ampiezza max di 0,10m? [x_1=1,452cm + n·λ ; x_2=11,079cm + n·λ]



Problema 3: Un'onda stazionaria oscilla con ampiezza massima di 12cm ad una distanza di 13cm dall'origine. Sapendo che la sua lunghezza d'onda è 40cm, trova l'ampiezza del ventre. [A = 13,47cm]



Problema 4: Un'onda sonora in una cavità si comporta come un'onda stazionaria: l'unica differenza è che l'ampiezza è data in Pascal (l'onda sonora è un'onda di pressione) e non in metri. Considera ora un'onda sonora con una lunghezza d'onda $\lambda=60cm$, un'ampiezza del ventre $A=3\cdot10^2$ Pa ed una pulsazione temporale $\omega=600rad/s$. Calcola la sua ampiezza ad una distanza di 51cm dall'origine dopo un tempo $t=1,2\cdot10^{-3}s$.

Adesso vediamo di risolvere alcuni problemi riguardanti anche **l'oscillazione temporale** dell'onda.

Problema 5: L'onda stazionaria del Problema3 oscilla con pulsazione temporale ω=0,7rad/s. Calcola l'ampiezza a cui giunge l'onda alla distanza 13cm dall'origine al tempo t=2,9s.
[$E(t=2,9s) = -0,443\cdot12cm = -5,32cm$]

Problema 6: Un'onda stazionaria possiede una lunghezza d'onda λ=50cm ed un'ampiezza al ventre di 20cm. Trova le due posizioni rispetto all'origine dove la sua ampiezza massima è 10cm. [$x_1=4,17cm$; $x_2=20,83cm$].

Se l'onda oscilla con pulsazione temporale $\omega=2rad/s$, qual è l'ampiezza del ventre dopo che sono passati 0,9s? [$E = -4,54cm$]. Qual è il periodo T dell'onda? [$T=0,318s$]

A quale tempo l'onda possiede un'ampiezza del ventre di -15cm? (hint: usa l'eq. (4c): otterrai due soluzioni) [$\omega\cdot t_1 = \cos^{-1}(-0,75) \rightarrow t_1=1,21s + n\cdot T$; $t_2=1,93s + n\cdot T$]

Problema 7: Un'onda di pressione oscilla seguendo questa legge: $E(x,t) = 500\cdot\cos(80\cdot t)\cdot sen(35\cdot x)$ Pa

Determina: l'ampiezza massima del ventre (A), la pulsazione temporale (ω) e spaziale (K), il periodo (T), la frequenza (f) e la lunghezza d'onda (λ).

[A=500 Pa ; ω=80rad/s ; K=35m-1 ; T=0,0785s ; f=12,7 Hz ; λ=0,18m]

Problema 8: Un'onda stazionaria esegue 25 oscillazioni al minuto. Sapendo che la sua lunghezza d'onda è λ=136mm e l'ampiezza max dell'onda è 300mm, calcola l'ampiezza dell'onda alla distanza x_1=40mm e x_2=176mm dall'origine al tempo t=0,5s [$E(x_1) = 74,8mm$; $E(x_2) = 74,8mm$]

Scrivi l'equazione E(x,t) dell'onda stazionaria [$E(x,t) = 300\cdot\cos(2,62\cdot t)\cdot sen(46,2\cdot x)$ mm ; t in secondi, x in metri.

E' un caso che $E(x_1) = E(x_2)$?

SOLUZIONI DEI PROBLEMI 1-5

Problema 1: λ=25cm, A=0,28m. Per trovare l'ampiezza max devo usare l'eq. (2):

$Em(x) = A\cdot sen(2\pi x/\lambda)$. Sostituisco i valori: $Em(9cm) = 0{,}28m\cdot sen[(2\pi\cdot 9cm)/25cm] \rightarrow$

$Em(9cm) = 0{,}28m\cdot sen[2{,}26rad] = 0{,}28\cdot 0{,}772 = 0{,}216m$.

Traduciamo il risultato a parole: "il fatto che $sen[(2\pi\cdot 9cm)/25cm]=0{,}772 = 77{,}2\%$" sicnifica che: l'ampiezza massima di un'onda di λ=25cm alla distanza di 9cm dall'origine è il 77,2% dell'ampiezza massima del ventre dell'onda".

Problema 2: anche in questo caso ho λ=25cm, A=0,28m. Scrivo l'eq. (2): $Em(x) = A\cdot sen(2\pi x/\lambda)$ e poi sostituisco i valori noti: $0{,}10cm = 0{,}28m\cdot sen(2\pi x/25cm)$.

Questa è un'equazione dove l'incognita "**x**" appare dentro l'argomento del seno. Per risolverla è necessario per prima cosa isolare il seno:

$(0{,}10cm)/(0{,}28cm) = sen(2\pi x/25cm) \rightarrow 0{,}357 = sen(2\pi x/25cm)$ [I]

Come voi già sapete dalla trigonometria, l'eq. [I] ammette due soluzioni, x_1 e x_2 (vedi la figura del Problema2). Si deve usare la funzione "**arcoseno** (**sen^{-1}**)" per estrarre l'argomento del seno:

$sen^{-1}(0{,}357) = 2\pi x_1/25cm \rightarrow 0{,}365rad = 2\pi x_1/25cm \rightarrow x_1 = 0{,}365\cdot 25cm/(2\pi) = 1{,}452cm$

Per ottenere la seconda soluzione, **x_2**, si calcola l'angolo associato ad x_2, sapendo che esso è uguale a π - (angolo di x_1) = π - 0,357 = 2,783rad. Infine si usa quest'ultimo valore nell'eq. [I] per calcolare x_2: $2{,}783rad = 2\pi x_2/25cm \rightarrow x_2 = 2{,}783\cdot 25cm/(2\pi) = 11{,}079cm$

Problema 3: Em=12cm, x=13cm, λ=40cm. Per risolvere il problema è sufficiente usare l'eq. (2):

$Em(x) = A\cdot sen(2\pi x/\lambda)$. Sostituendo I valori noti ottengo:

$12cm = A\cdot sen[(2\cdot\pi\cdot 13cm)/(40cm)] \rightarrow 12cm = A\cdot 0{,}891 \rightarrow A = 12cm/0{,}891 = 13{,}47cm$

Problema 4: che l'onda sia sonora o prodotta da una corda o da un'onda marina non fa alcuna differenza: **le equazioni sono esattamente le stesse**. In questo caso voglio conoscere l'ampiezza in una certa posizione x=51cm e ad un certo tempo $t=1{,}2\cdot 10^{-3}$s: devo perciò usare l'eq. (4d):

$E(x,t) = A\cdot cos(\omega\cdot t)\cdot sen(Kx)$

Sostituisco i valori numerici: $K=2\pi/\lambda=0{,}105cm^{-1}$

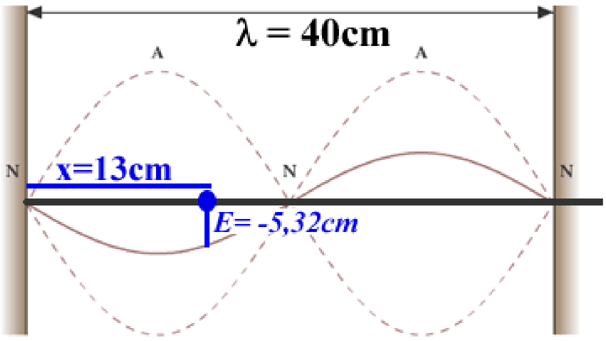
$E(x,t)=3\cdot 10^2\cdot cos(600rad/s\cdot 1{,}2\cdot 10^{-3}\cdot t)\cdot sen(0{,}105\cdot 51)\ Pa = -182{,}6\ Pa$.

Il "-" indica che l'onda di pressione si è dilatata (ha perso pressione).

Problema 5: L'onda è la stessa del Problema 3, perciò: Em=12cm, x=13cm, λ=40cm: inoltre ω=0,7rad/s. Devo calcolare il valore dell'ampiezza E al tempo t=2,9s: uso perciò l'eq. (4a): $E(t) = cos(\omega t)\cdot Em$.

Sostituisco i valori noti: $E(t=2{,}3s) = cos(0{,}7rad/s\cdot 2{,}9s)\cdot Em \rightarrow E(t=2{,}9s) = -0{,}443\cdot 12cm = -5{,}32cm$.

Il segno "-" significa che l'onda ha invertito il verso della sua ampiezza. La soluzione è descritta nella figura sottostante.



L'ONDA STAZIONARIA COME SOMMA DI DUE ONDE PROGRESSIVE

In classe abbiamo visto con un applet che un'onda stazionaria può essere espressa come somma di sue onde progressive propaganti in versi opposti. Vediamo di dimostrare la cosa con una semplice manipolazione **trigonometrica**.

Sono sufficienti le formule di **addizione del seno:**

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\text{sen}(\beta)$$

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\text{sen}(\beta)$$

da cui segue:

$$\text{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\cdot[\,\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\,\alpha - \beta)] \qquad (5)$$

Nota che l'eq. (4b) mostra che l'ampiezza dell'onda stazionaria è data da un prodotto seno·coseno: ciò mi permette di usare l'eq. (5) per scomporre l'eq. (4b) in una somma di due seni. Infatti, se chiamo α=**Kx** e β=ω·t posso scrivere l'eq. (4b) come:

$$E(x,t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\text{sen}(Kx) \quad = \quad [\text{usando l'eq.(5), } \alpha=Kx \text{ e } \beta=\omega\cdot t] =$$

$$\mathbf{E(x,t) = A\cdot\tfrac{1}{2}\cdot[sen(Kx + \omega t) + sen(Kx - \omega t)]} \qquad \mathbf{(6)}$$

½·A·sen(Kx - ωt) descrive un'onda progressive verso destra

Adesso voglio dimostrare che il termine **½·A·sen(Kx - ωt)** descrive **l'ampiezza un'onda progressiva verso destra** (E_+). Scriviamo l'equazione dell'ampiezza dell'onda: $E_+ = \tfrac{1}{2}\cdot A\cdot \text{sen}(Kx - \omega t)$

Poi indichiamo con Φ la fase del seno:

$$Kx - \omega t = \Phi \quad \rightarrow \quad E_+ = \tfrac{1}{2}\cdot A\cdot\text{sen}(\Phi)$$

E' chiaro che si ha un **nodo** quando l'ampiezza è nulla, cioè quando $E_+ = 0$. Di conseguenza, il valore $\Phi = 0$ rappresenta un **nodo** [poiché $\text{sen}(0) = 0$]. E' poi evidente che qualunque sia la posizione x, qualunque sia il tempo t, si ha un nodo ogni qualvolta $\Phi = 0$ → si ha un nodo ogni qualvolta vale l'equazione: $Kx - \omega\cdot t = 0$. Risolvendo:

$$\Phi_{NODO} = 0 \rightarrow (Kx - \omega t = \Phi) \rightarrow Kx - \omega\cdot t = 0 \rightarrow \mathbf{x = \omega/K\cdot t} \qquad \mathbf{(7)}$$

L'equazione (7) ha un significato tanto semplice quanto basilare, perciò studiati bene quello che sto per scrivere: " l'eq. (7) è quella di un moto uniforme con velocità "ω/K" verso destra: perciò l'eq. (7) mostra che la posizione "x" del nodo **scorre verso destra** con velocità uniforme = ω/k".

Questo significa che il nodo dell'onda non rimane immobile ma si sposta verso destra! Nella Tabella1 vengono mostrati con dei semplicissimi calcoli ciò che abbiamo appena affermato.

TABELLA 1

Posizione del nodo Φ=0 allo scorrere del tempo	
x (m)	t (s)
0	0
ω/K	1
$2\omega/K$	2
$3\omega/K$	3

E i **ventri**, cosa fanno? E' chiaro che si ha un ventre quando l'ampiezza è max, cioè quando sen(Φ)=1. Di conseguenza, il valore $\Phi = \pi/2$ rappresenta un **ventre** [poiché $\mathrm{sen}(\pi/2) = 1$]. E' poi evidente che qualunque sia la posizione x, qualunque sia il tempo t, si ha un ventre ogni qualvolta $\Phi = \pi/2 \rightarrow$ si ha un ventre ogni qualvolta vale l'equazione: $Kx - \omega \cdot t = \pi/2$. Risolvendo:

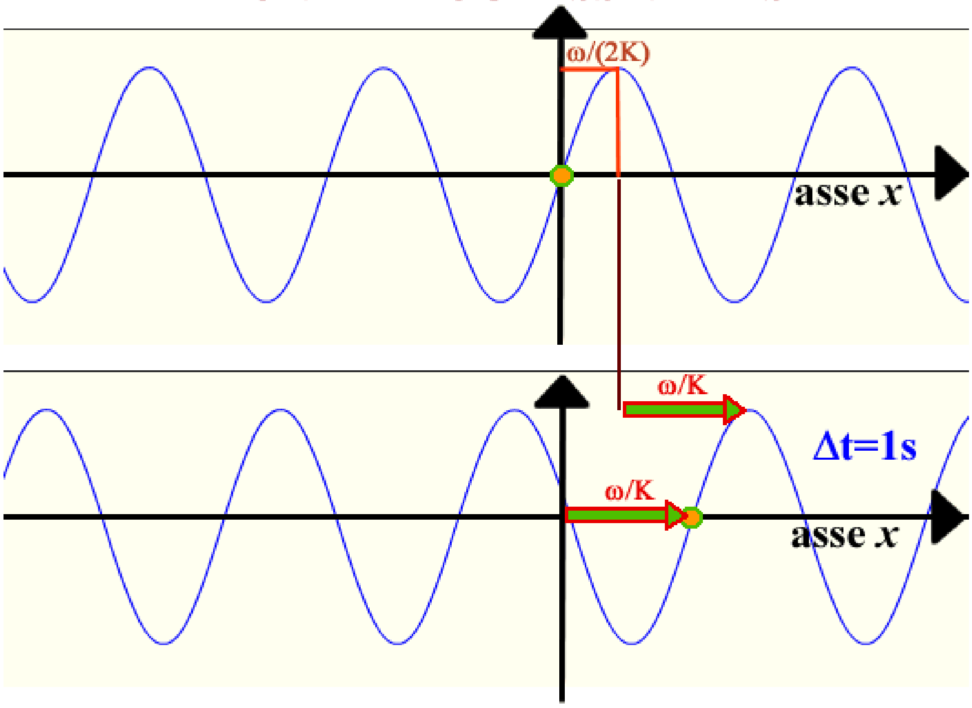
$$\Phi_{VENTRE} = \pi/2 \rightarrow (Kx - \omega t = \Phi) \rightarrow Kx - \omega \cdot t = \pi/2 \rightarrow \mathbf{x = \pi/(2 \cdot K) + \omega/K \cdot t} \qquad (8)$$

E' chiaro che l'eq. (8) è quella di un moto con velocità uniforme "ω/K" verso destra, che parte dal punto x(0)=$\pi/(2 \cdot K)$: perciò l'eq. (8) mostra che anche il ventre **scorre verso destra** con velocità uniforme = ω/K.

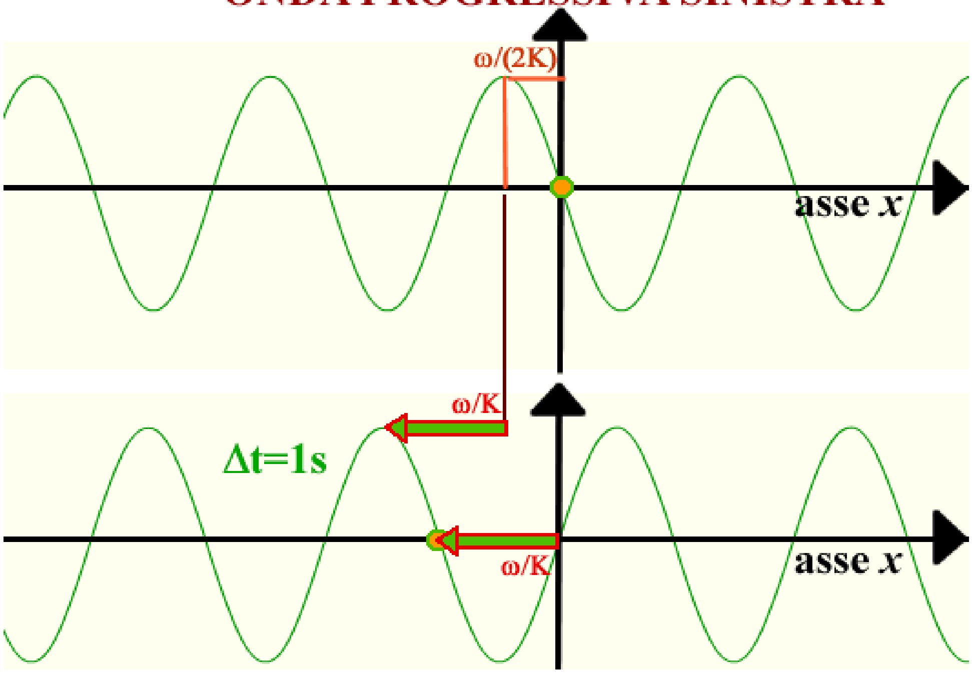
Posso ripetere lo stesso identico calcolo per ogni valore Φ ed otterrò lo stesso identico risultato: ogni punto dell'onda, qualunque sia la sua fase Φ, scorre verso destra con velocità ω/K.

Con lo stesso ragionamento si dimostra che **il termine ½·A·sen(Kx + ωt) descrive l'ampiezza di un'onda progressiva verso sinistra.**

ONDA PROGRESSIVA DESTRA



ONDA PROGRESSIVA SINISTRA



Chiodo Fisso

Adesso è giunta l'ora di fissare i concetti essenziali di questi appunti.
Lo scopo di questi appunti è duplice: prima si dà la descrizione matematica di un'onda stazionaria e poi si dimostra che essa è composta da due onde che si propagano in versi opposti.

Per prima cosa si disegna un'onda stazionaria quando essa giunge al massimo dell'ampiezza (Figura1): dal disegno si nota che essa è di forma sinusoidale. Il valore dell'ampiezza massima (Em) è descritto dall'equazione: $Em(x) = A \cdot sen(\varphi)$, con **A** il valore massimo di ampiezza raggiunto nel ventre dell'onda.

Il valore φ si chiama fase dell'onda. Ogni punto dell'onda possiede la sua fase φ secondo l'equazione: $\varphi = 2\pi x/\lambda$, con "x" la posizione del punto rispetto all'origine dell'onda. Di conseguenza, l'ampiezza massima raggiunta dall'onda (**Em**) è descritta come: $Em(x) = A \cdot sen(\varphi) = A \cdot sen(2\pi x/\lambda)$

Abbiamo poi affermato che l'onda oscilla al passare del tempo e perciò l'ampiezza dell'onda cambia al cambiare di "t". L'oscillazione è descritta dalla funzione coseno: abbiamo perciò introdotto una seconda fase ϑ
in modo da descrivere l'oscillazione dell'ampiezza (**E**) come: $E = cos(\vartheta) \cdot Em = cos(\vartheta) \cdot A \cdot sen(2\pi x/\lambda)$.

La fase ϑ dipende dal tempo "t" secondo l'equazione: $\vartheta = 2\pi t/T$, cosicché posso scrivere l'ampiezza dell'onda come: $E(x,t) = A \cdot cos(2\pi t/T) \cdot sen(2\pi x/\lambda)$: questa è **l'equazione matematica di un'onda stazionaria**.

A questo punto abbiamo introdotto alcuni problemi per esercitarsi sulle equazioni appena imparate.

Dopo di ciò abbiamo dimostrato che l'onda stazionaria è in realtà composta da due onde che si propagano in versi opposti. La dimostrazione si basa sulla formula della addizione del seno: attraverso di essa abbiamo scomposto il prodotto $E(x,t) = A \cdot cos(2\pi t/T) \cdot sen(2\pi x/\lambda)$ come somma di due termini:
$E(x,t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot [sen(Kx + \omega t) + sen(Kx - \omega t)]$

Come ultima cosa, abbiamo mostrato che il termine: $E(x,t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot sen(Kx - \omega t)$ è un'onda progressiva che si sposta verso destra con velocità = ω/K. Per fare questa dimostrazione abbiamo indicato la fase del seno come $\Phi = Kx - \omega t$: abbiamo visto che il valore $\Phi=0$ rappresenta un nodo dell'onda: abbiamo mostrato che al passare del tempo la posizione del nodo è data dall'equazione $x = \omega/K \cdot t$, che è l'equazione di un moto uniforme verso destra con velocità ω/K. Allo stesso modo abbiamo mostrato che anche il ventre -e tutto il resto dell'onda- scorre verso destra con velocità uniforme ω/K.

Una dimostrazione del tutto identica dimostra che il termine $E(x,t) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot sen(Kx - \omega t)$ è un'onda progressiva che si sposta verso sinistra con velocità = ω/K.