LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPERE

“Bene Prof, negli appunti “VETTORE MAGNETICO B” abbiamo imparato a calcolare il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo… ma cosa succede se il filo è curvo? O se si ripiega su se stesso? Guardi la figura di una bobina! Sicuramente non posso applicare le legge di Biot-Savart!” “Bravo, vedo che hai seguito la lezione. E’ chiaro che nel caso di una bobina, o più generalmente di un filo non rettilineo, non è possibile applicare la Legge di Biot-Savart. E’ necessario trovare la legge generale che permette di calcolare il vettore B a partire da una correnteI.”

Una legge generale di questo tipo, ottenuta partendo dalla Legge di Biot-Savart, esiste ma non è di facile applicazione: infatti, non è possibile isolare una singola corrente nello spazio (le correnti elettriche si muovono lungo un circuito, non stanno ferme in un punto!) e perciò la legge che associa una corrente elettrica al vettore B richiede un complesso calcolo di integrazione che non è fattibile al Liceo.

Possiamo però usare una legge che ci permette di ottenere, se non direttamente il vettore B, una proprietà essenziale di B cioè il suo legame con la corrente elettrica. Questa legge va sotto il nome di **Legge della circuitazione di Ampere**.

Circuitazione e Legge della circuitazione di Ampere

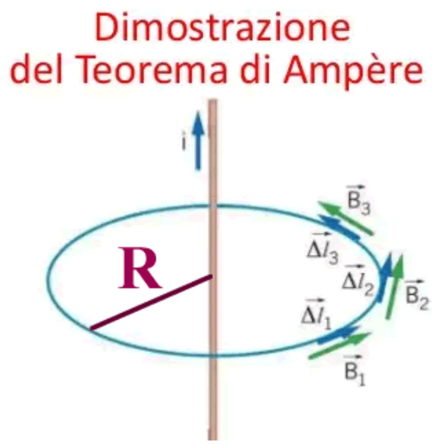

Figura 1

La Legge della circuitazione di Ampere descrive la relazione fra il vettore B e le correnti che lo generano attraverso un’operazione matematica che si chiama **circuitazione** [$\oint(\boldsymbol{B})$]**,** del tutto identica (dal punto di vista matematico) al Lavoro.

Per circuitazione di B si intende il “Lavoro”[1] eseguito da $\vec{B}$ lungo un **percorso chiuso**. Sapete di già che il Lavoro di una forza $\vec{F}$ per un tratto ΔS è dato da F//·ΔS; allo stesso modo, la circuitazione di $\vec{B}$ per un percorso chiuso di lunghezza ΔS è data da B//·ΔS. Detto in formule:

$$\oint(\boldsymbol{B}) = \mathbf{B}_{//}\cdot\Delta\mathbf{S} \qquad \mathbf{(1)} \quad , \quad \Delta S=\text{lunghezza del percorso chiuso}$$

Per capire come calcolare la circuitazione, consideriamo il caso del campo magnetico $\vec{B}$ prodotto da un filo rettilineo. Come percorso di circuitazione considero una circonferenza di raggio R. Voglio calcolare $\oint(\boldsymbol{B})$ lungo tale circonferenza (vedi figura 1).

- Poiché $\vec{B}$ è diretto circolarmente, allora esso è sempre tangente alla circonferenza in ogni suo tratto Δl, cosicché posso scrivere che in ogni tratto si ha **B// = B** (il vettore B è sempre tutto parallelo alla circonferenza).
- Il percorso chiuso è la circonferenza, la cui lunghezza (ΔS) è: **ΔS = 2·π·R**

Sostituisco i valori ottenuti nell’eq. (1) ed ottengo:

$$\textbf{Circuitazione di B lungo la circonferenza} = \oint(\boldsymbol{B}) = \mathbf{B}_{//}\cdot\Delta\mathbf{S} = (B_{//}=B\ ,\ \Delta S = 2\cdot\pi\cdot r) = \mathbf{B\cdot 2\cdot\pi\cdot R} \qquad \mathbf{(2)}$$

Sappiamo già[2] che la formula del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da una corrente I0 è:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu 0}{2\pi}\frac{I0}{R} \qquad \mathbf{(3)}$$

Sostituendo l’eq. (3) nell’eq. (2) ottengo, dopo una facile semplificazione:

$$\oint(\boldsymbol{B}) = \mu_0\cdot I_0 \qquad \mathbf{(4)}$$

L’eq. (3) si enuncia: “la circuitazione del vettore B lungo una circonferenza è uguale al prodotto μ0·I0, con I0 la corrente rettilinea attraversante al centro la circonferenza, con verso positivo secondo la regola dell’avvitamento della mano destra”.

---

[1] Anche se la circuitazione è matematicamente identica ad un Lavoro… essa non è un Lavoro! Infatti, si ha un Lavoro quando il percorso è eseguito da un vettore-forza. B non è una forza e perciò non può produrre Lavoro.

[2] Come già trovato negli appunti “VETTORE MAGNETICO B”

Legge di Ampere e corrente concatenata

La cosa fondamentale è che la legge, che abbiamo appena dimostrato per un caso molto particolare (percorso circolare con al centro la corrente I0), è in realtà generale! E' stato sperimentalmente dimostrato che essa vale per qualsiasi tipo di percorso e qualunque sia la distribuzione delle correnti! Generalizzare la legge summenzionata è molto facile: Essa si esprime come: "la circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo un generico percorso è uguale al prodotto $\mu_0 \cdot I_{CONC}$, con I_{CONC} la somma di tutte le correnti attraversanti in qualsiasi punto il percorso di circuitazione, con verso positivo secondo la regola di avvitamento della mano destra."

In Fisica una corrente che passa attraverso un percorso si chiama **corrente concatenata**. Perciò posso dare la definizione definitiva della **legge della circuitazione di Ampere** come:

la circuitazione del vettore $\vec{B}$ è uguale al prodotto $\mu_0 \cdot I_{CONC}$, con I_{CONC} tutte le correnti concatenate, con verso positivo secondo la regola di avvitamento della mano destra

In formule: $\oint(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \cdot I_{CONC}$ (i segni seguono la regola di avvitamento della mano destra) **(5)**

L'eq. (5) è la **formulazione matematica della Legge di Ampere**.

Alcuni esempi

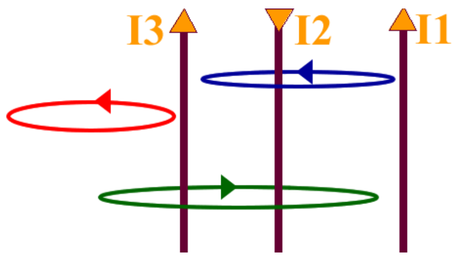

Figura 2

Vi faccio alcuni disegni che illustrano questa legge. In figura 2 sono mostrate 3 correnti e 3 circuitazioni. Supponiamo che I1=2A , I2=3A , I3=5A. Calcoliamo $\oint(\boldsymbol{B})$ secondo le 3 circuitazioni: verde, blu , rossa di figura 2.

Circuitazione verde: attraverso il percorso passano I3 e I2 (I3 e I2 sono concatenate). Il verso di avvitamento di I2 segue il verso di circuitazione (I2 è positivo), quello di I3 è opposto (I3 è negativo). Perciò:

$$\oint(\boldsymbol{B})\ \textbf{verde} = \mu 0 \cdot (I2+I3) = \mu 0 \cdot [3A + (-5A)] = -2\mu 0$$

Circuitazione blu: dentro il percorso passano ancora una volta I3 e I2 (I3 e I2 concatenate). Però questa volta il verso di avvitamento di I2 è opposto al verso di circuitazione (I2 è negativo), quello di I3 è concorde a quello di avvitamento (I3 è positivo). Perciò: $\oint(\boldsymbol{B})$ **verde** $= \mu 0 \cdot (I2+I3) = \mu 0 \cdot [-3A +5A] = 2\mu 0$

Circuitazione rossa: Non ci sono correnti dentro il percorso di circuitazione! Ciò significa che $\oint(\boldsymbol{B})=0$.

Nota che $\oint(\boldsymbol{B})$ lungo la circuitazione rossa è nulla anche se sicuramente $\vec{B} \neq 0$; infatti, nella regione toccata dal percorso rosso ci sono sicuramente i campi magnetici prodotti dai tre fili. Questo significa che lungo la circuitazione rossa gli effetti magnetici si annullano: se in un tratto B// risulta concorde allo spostamento in un altro tratto esso deve essere opposto, cosicché la somma totale è nulla.

Nota anche che nessuna circuitazione tiene conto della presenza del filo I1! Esso sicuramente produce un campo magnetico che si somma a quello degli altri fili: però, a quanto pare, esso non contribuisce alle circuitazioni. Ciò significa che il suo effetto si compensa: se in un tratto di circuitazione il campo B prodotto da I1 è positivo, in un altro tratto è sicuramente negativo.

Circuitazione con corrente a spirale

Figura 3

Gli esempi sopra dovrebbero aver fatto capire che la circuitazione di $\vec{B}$ è diversa da zero solo se il percorso è attraversato da almeno una corrente: ma cosa accade se invece scelgo un percorso che è attraversato N volte dalla solita corrente? In figura 3 il percorso di circuitazione (rettangolo porpora) è attraverso dal filo verde che rappresenta la corrente elettrica I0: la corrente I0 passa per 6 volte attraverso il percorso, cioè I0 è 6 volte concatenata: $I_{CONC} = 6 \cdot I0$.

L'eq. (5) si scrive perciò come: $\oint(B) = \mu 0 \cdot 6 \cdot I0$ (in valore assoluto): il segno è dato dal senso di percorrenza della corrente dentro la spirale, secondo la regola dell'avvitamento della mano destra. Non capisci come calcolare il segno giusto? Fattelo spiegare dal Prof!

Più in generale: se la corrente attraversa il percorso di circuitazione per N volte (cioè: è concatenata N volte), allora:

$$\oint(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \cdot N \cdot I_0 \qquad (6) \quad , \; N = \text{numero di volte che la corrente si concatena al circuito}$$

L'eq. (6) è usata in moltissime applicazioni, ad esempio per il calcolo del campo magnetico dentro una bobina o dentro un toro, così come spiegato dal Prof a lezione.

Applicazione della Legge della circuitazione di Ampere: un solenoide ed un toroide

La Legge della circuitazione di Ampere, nella forma dell'eq. (6), può essere immediatamente applicata per calcolare il campo magnetico in due semplici geometrie di correnti: il **solenoide** ed il **toroide**.

Un **solenoide** (da σωλην (solen): tubo, condotto, canale) è un avvolgimento di forma cilindrica realizzato con un unico filo di materiale conduttore girato su sé stesso in modo da formare una serie di spire circolari molto vicine fra loro. Facendo passare la corrente elettrica nel filo si viene a creare un campo magnetico dentro e fuori il solenoide: se il solenoide è sufficientemente esteso **fuori dal solenoide il campo magnetico è del tutto trascurabile** mentre **dentro il solenoide il campo magnetico è diretto parallelamente all'asse del solenoide**, come visto nel video [direzione e verso del vettore B]() del sito Fisica Facile e in Figura 5.

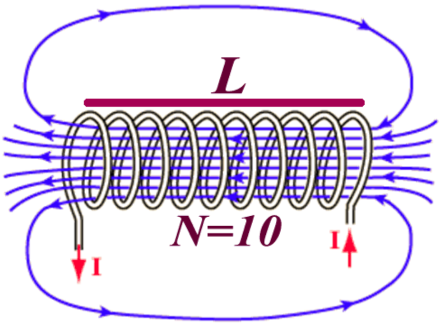

Figura 4

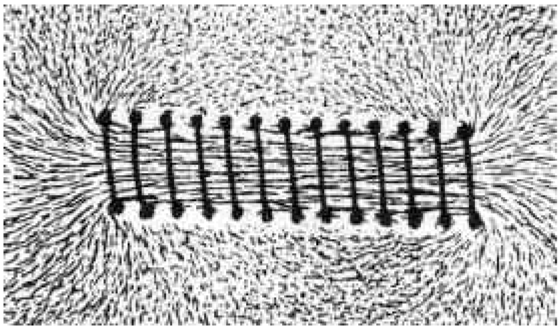

Figura 5

Il **campo magnetico dentro un solenoide** è facilmente calcolabile usando la **Legge della circuitazione di Ampere**: se **N=numero di spire**, **L=lunghezza del solenoide**, **I=corrente del solenoide** si dimostra facilmente usando l'eq. (6) (supponendo $\vec{B}$=0 fuori dal solenoide, $\vec{B}$ parallelo all'asse del solenoide dentro il solenoide) che:

$$B = \mu_0 \cdot I \cdot N/L \qquad (7)$$

Il rapporto N/L è la **densità lineare di spire** del solenoide.

La dimostrazione dell'eq. (7) è stata data a lezione, perciò… studiatela sugli appunti!

Un **solenoide toroidale** o **toroide** è un solenoide le cui spire sono state avvolte a forma di ciambella. Il **campo magnetico di un toroide** è facilmente calcolabile usando l'eq. (6). Risulta immediatamente che **all'esterno della ciambella $\vec{B}$=0** mentre **all'interno della ciambella $\vec{B}$ è diretto tangente all'asse del toro**. Se **N=numero di spire**, **r=distanza dal centro del toro**, **I=corrente passante dal toro,** si dimostra facilmente che:

$$B = (\mu_0/2\pi) \cdot I \cdot N/r \qquad (8) \qquad \text{-valida dentro il toro, al di fuori } \vec{B}=\vec{0}\text{-}$$

Anche la dimostrazione dell'eq. (8) è stata data a lezione, perciò… studiate pure questa sugli appunti!

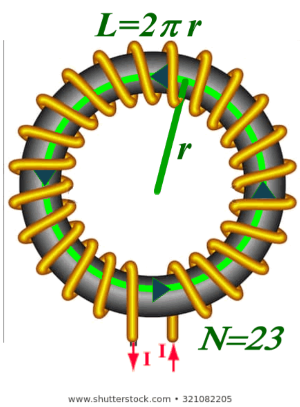

Figura 6

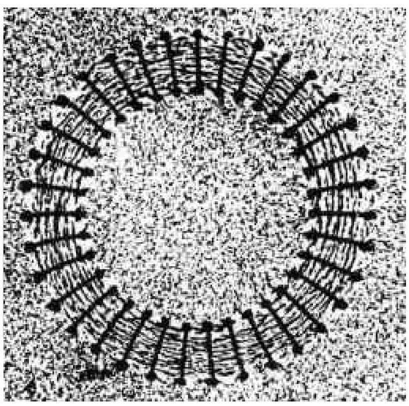

Figura 7

DIMOSTRAZIONI DELLE EQUAZIONI (7) e (8)

Solenoide: considera un percorso rettangolare come in Figura 8. Dal video [direzione e verso del vettore B] del sito Fisica Facile e dalla Figura 5 sai che $\vec{B}$ è presente solo dentro il solenoide ed è diretto parallelo al suo asse. Scriviamo la circuitazione di $\vec{B}$ usando l'eq. (1): calcoliamo B//·ΔS separatamente per i 4 lati del percorso:

$$\oint(B) = B_{//}\cdot\Delta S \text{ (lato a)} + B_{//}\cdot\Delta S \text{ (lato b)} + B_{//}\cdot\Delta S \text{ (lato c)} + B_{//}\cdot\Delta S \text{ (lato d)}$$

Calcoliamo I singoli termini sapendo che:

a) $\vec{B}$ è parallelo al lato di lunghezza L → B//·ΔS = B·L
b) , d) $\vec{B}$ è perpendicolare al lato → B//=0 → B//·ΔS = 0
c) Fuori dal solenoide $\vec{B}$ è praticamente nullo → B//·ΔS = 0.

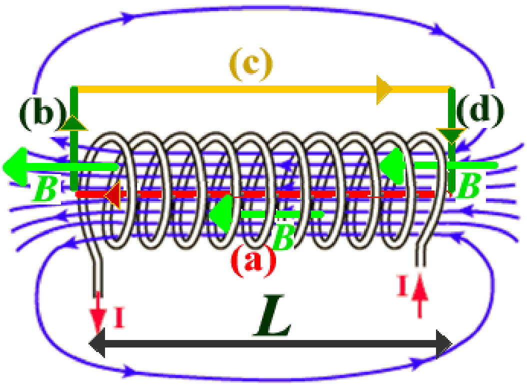

Figura 8

Sommando i 4 termini ho: $\oint(B) = B\cdot L + 0 + 0 + 0 = B\cdot L$

Applico adesso la **Legge di Ampere** per le correnti a spirali, cioè, cioè l'eq. (6):

$$\oint(B) = \mu_0\cdot N\cdot I_0 \rightarrow B\cdot L = \mu_0\cdot N\cdot I_0 \rightarrow \mathbf{B = \mu_0\cdot I\cdot N/L}. \qquad \textit{C.V.D.}$$

Toroide: guarda la Figura 9: sono distinte tre regioni: interna al toro (A), dentro il toro (B), esterna al toro (C). Per tutte le 3 regioni considero come percorso chiuso una circonferenza di raggio r e calcolo la circuitazione: $\oint(B) = B\cdot 2\cdot\pi\cdot R$

Applico poi l'eq (5): $\oint(B) = \mu_0\cdot I_{CONC} \rightarrow B\cdot 2\cdot\pi\cdot R = \mu_0\cdot I_{CONC} \rightarrow \mathbf{B(r) = (\mu_0/2\pi)\cdot I_{CONC}/r}$

Attenti! la dimostrazione non è finita! Bisogna calcolare I_{CONC} nelle tre regioni.

Regione A): la circonferenza non è attraversata da alcuna corrente: $I_{CONC} = 0$.

Regione B): ogni singola spira attraversa il percorso **una sola volta**, quando passa dal lato interno del toro: in quel punto la corrente circola sempre dal basso verso l'alto (guarda ad esempio i tre punti marroni in basso a sinistra, dove la corrente entra dentro il percorso dal basso verso l'alto): ci sono N spire e perciò la corrente concatenata è $N\cdot I_0$.

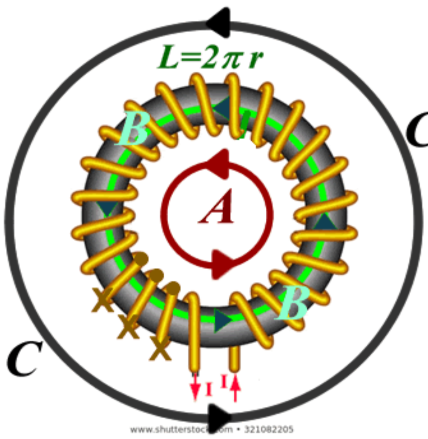

Figura 9

Regione C): ogni singola spira attraversa il percorso **due volte**: quando passa dal lato interno del toro e quando ripassa dal lato esterno (guarda ad esempio i tre punti marroni in basso a sinistra, dove la corrente entra dentro il percorso dal lato interno passando dal basso verso l'alto per poi riattraversare il percorso dalle tre croci sul lato esterno passando dall'alto verso il basso). Perciò la corrente di ogni singola spira si concatena sempre due volte con la circonferenza: +I0 (quando passa dal punto interno) e -I0 (quando ripassa dalla croce esterna): complessivamente la corrente concatenata è nulla → $I_{CONC} = 0$.

In conclusione: $\mathbf{B(r) = (\mu_0/2\pi)\cdot I\cdot N/r}$ **dentro il toro (regione B), B=0 fuori dal toro (regioni A, C)** *C.V.D.*

Chiodo Fisso

Adesso è giunta l'ora di fissare i concetti essenziali di questi appunti.
Lo scopo degli appunti è quello di trattare della **Legge della circuitazione di Ampere**: essa permette di descrivere il legame fra il vettore B e la corrente elettrica e permette di calcolare il campo magnetico prodotto dalle correnti in semplici geometrie.

Per prima cosa abbiamo descritto cosa è dal punto di vista matematico la circuitazione del vettore B: essa è analoga al Lavoro di una forza ed abbiamo ottenuto l'eq. (1).

Abbiamo poi calcolato la circuitazione di B lungo una circonferenza di raggio r estesa intorno ad un filo lineare passante per il suo centro: usando la **Legge di Biot-Savart** abbiamo ottenendo l'eq. (4).

Ampere dimostrò che l'eq. (4), che abbiamo ricavato in un caso molto particolare, è generalizzabile per qualsiasi corrente. Abbiamo perciò enunciato la **Legge della circuitazione di Ampere** come: "la circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo un generico percorso è uguale al prodotto $\mu_0 \cdot I_{CONC}$, con I_{CONC} tutte le correnti attraversanti in qualsiasi punto il percorso di circuitazione, con verso positivo secondo la regola di avvitamento della mano destra."

Poi abbiamo dato la definizione di **corrente concatenata**: una corrente è concatenata ad un percorso (ad un circuito) quando essa lo attraversa. Abbiamo perciò enunciato la legge della circuitazione di Ampere come:

la circuitazione del vettore $\vec{B}$ è uguale al prodotto $\mu_0 \cdot I_{CONC}$, con I_{CONC} tutte le correnti concatenate, con verso positivo secondo la regola di avvitamento della mano destra

Abbiamo infine scritto la legge di Ampere in forma matematica : eq. (5)

Abbiamo poi fatto degli esempi di calcolo di circuitazione.

Dopodiché abbiamo notato che se una corrente attraversa N volte il circuito anche la circuitazione di $\vec{B}$ si moltiplica per N volte, ottenendo così l'eq. (6).

Infine abbiamo applicato l'eq. (6) per ottenere il campo magnetico in due semplici geometrie di correnti: il solenoide ed il toroide: eq. (7) e (8). Le dimostrazioni di queste due ultime equazioni sono date nell'ultimo paragrafo e sono state spiegate a lezione perciò… studiate!