**COME RAPPRESENTARE UNA FORZA 2D**

Una forza è una **grandezza vettoriale**: dunque essa deve avere una **direzione** (la retta su cui agisce la forza), un **verso** (dove spinge la forza) ed una **intensità** o **modulo** (quanto forte spinge la forza).

Una **forza** può essere rappresentata in differenti modi a secondo delle necessità e dei problemi proposti. In questi brevi appunti descriverò le sue tre rappresentazioni più usate: quella **vettoriale** (grafica), quella **per componenti** e quella **polare** (quest’ultime due numeriche)



**Rappresentazione vettoriale**

La **rappresentazione vettoriale** la conoscete già: la forza viene descritta con una **freccia** (vedi figura 1).

* **la direzione** è la retta dove giace la freccia disegnata
* **il verso** è dove punta la freccia
* **l’intensità** (o **modulo**) è la lunghezza della freccia.
* Il **punto di applicazione** è dove viene posta la freccia

Tutto questo è già stato abbondantemente spiegato in classe e non voglio tornarci sopra.

**Figura 1**

**Rappresentazione per componenti**

In Fisica, come in tutte le Scienze, è spesso più semplice fare le operazioni con i numeri piuttosto che con grandezze geometriche. Perciò è utile associare ad una freccia (grandezza geometrica) dei numeri. Come si fa? Facilissimo! Usando la **rappresentazione per componenti** (chiamata anche **rappresentazione cartesiana**).

Considera i vettori in Figura2: per rappresentare le frecce disegnate si costruisce un Sistema di Riferimento (S.d.R.) cartesiano con origine il punto di applicazione del vettore e poi si misurano le **proiezioni perpendicolari** del vettore lungo x e lungo y. Tali proiezioni si chiamano **componenti** e si indicano rispettivamente con **Fx** e **Fy**. Determinare le componenti di una Forza (di un vettore) si dice **scomporre la Forza** (il vettore) **nelle sue componenti.**

**Figura 2: scrivi le componenti Fx e Fy del quart vettore!**

Il S.d.R può essere orientato a piacere: ad esempio posso considerare 4 diverse combinazioni di orientazioni degli assi come in Figura2; il segno delle componenti Fx e Fy cambia di conseguenza. In Figura2 sono disegnate 4 diverse forze e i rispettivi S.d.R: trova le componenti del quarto vettore! [**Soluz**: Fx=-2N , Fy=-3N]

****

Hai messo i segni alle componenti dei 4 vettori di Figura2? Bene, adesso scomponi i vettori mostrati in Figura3 nelle loro componenti Fx e Fy (con i segni giusti!).

**Figura 3: scomponi i vettori mostrati sopra nelle loro componenti Fx e Fy!**

**Rappresentazione in componenti oblique**

****Posso scomporre un vettore anche **obliquamente**: consideriamo ancora la figura 4. In questo caso il vettore F7 è verticale: il suo valore è F7=-6N, che si ottiene misurando la lunghezza di F7 usando la scala del foglio. Voglio scomporre F7 secondo la direzione di un piano inclinato che indico con **//** e secondo la direzione perpendicolare al piano che indico con **⊥**, parimenti inclinata. La procedura è la medesima: si disegnano l’asse parallelo e quello perpendicolarte al piano passanti per l’estremo iniziale del vettore (punto O); per ottenere F7// si traccia per l’estremo finale di F7 la perpendicolare al piano fino ad incontrare l’asse parallelo (punto a) mentre per avere F7⊥ si disegna per l’estremo la parallela al piano fino ad incontrare l’asse perpendicolare (punto b). Per trovare i valori di F7// e F7⊥ dobbiamo **misurare** la lunghezza dei vettori usando la scala del foglio: se usate un righello, trovate che F7//=-3,1N e F7⊥=-6,25N.

**Figura 4**

Una seconda scomposizione obliqua è presente in Figura5: in questo caso gli assi perpendicolari sono chiamati x’ e y’. Trova le componenti FBx’ e FBy’ !

**Figura 5: scomposizione di un vettore lungo 2 assi generici perpendicolari fra loro.**

**Dalla rappresentazione per componenti alla rappresentazione vettoriale**

Una volta che conosco le componenti, disegnare il vettore associato è immediato: basta segnare la punta della freccia alle coordinate Fx ; Fy e congiungere l’origine con essa. Ad es. se dichiaro che Fx=4N ; Fy=3N ottengo la figura in alto/sinistra di Figura2. Rimane da risolvere un problema: come fare a conoscere **modulo**, **direzione** e **verso** di una forza conoscendone le componenti? Ecco come!

* Il **modulo** è dato dalla lunghezza del vettore
* La **direzione** è data dalla retta su cui giace la Forza.
* Il **verso** viene ottenuto in base al quadrante di appartenenza della Forza.

Nota che con la rappresentazione vettoriale noi possiamo **disegnare** il modulo, la direzione e il verso di una forza ma non siamo in grado di calcolarli. Per poterlo fare è necessario introdurre la seconda rappresentazione numerica: quella delle coordinate polari.

**Coordinate polari**

Le **coordinate polari** di cui ora tratterò hanno l’importante proprietà di permettere di conoscere immediatamente il modulo, la direzione ed il verso di un vettore e perciò sono il modo più naturale di rappresentare numericamente una forza.

Nella rappresentazione polare non vengono date le coordinate Fx e Fy del vettore $\vec{F}$ ma viene indicato il **modulo** **di** $\vec{F}$ (**|**$\vec{F}$**|**) e l’**angolo di** $\vec{F}$ **rispetto all’asse X** (**angolo ϑ**). Un esempio è dato dalla Figura 7: il vettore F1 è rappresentato dalle componenti F1x=3N e F1y=4N (rappresentazione cartesiana) ma anche dal modulo |F1|=5N e l’angolo ϑ1= 53,13° (coordinate polari). Sempre in Figura 6 sono dati altri tre vettori con le loro rappresentazioni cartesiane (Fx, Fy: in nero) e polari (|F|, ϑ).

**Figura 6**

Nota che il valore dell’angolo ϑ in Figura 6 è dato sempre nell’intervallo 0°-90°: questa è una scelta del Prof (esistono modi più formali per indicare ϑ) che serve per semplificare i calcoli. Discutine a lezione con il Prof!

**Dalle coordinate cartesiane a quelle polari**

E’ utile, anzi devo dire indispensabile, conoscere come passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari. Sappiamo già che il vettore F1 possiede coordinate cartesiane F1x=4N, F2x=3N: devo conoscere il suo modulo |F1| e il suo angolo ϑ1.

**Calcolo del modulo:** il modulo |F| si ottiene dal **Th. di Pitagora**:

**|**$\vec{F}$**| = √Fx2+Fy2**

 **Calcolo dell’angolo:** per poter eseguire il calcolo di ϑ è **necessario seguire l’intuizione di Galileo Galilei e trasformare le proprietà fisiche delle forze in grandezze geometriche**.

**Figura 7**

Osserva il vettore $\vec{F}$1 di Figura 7 con uno sguardo geometrico: noterai che il vettore $\vec{F}$1 insieme alle sue componenti Fx e Fy forma un **triangolo rettangolo**, di cui ϑ1 è l’angolo all’origine: **Fy è il cateto opposto a ϑ** mentre **Fx è il cateto adiacente a ϑ**.

Adesso nota che Fx = 4N (cateto adiacente a ϑ) , Fy = 3N (cateto opposto a ϑ): ne segue che il rapporto Fy/Fx = (cateto opposto a ϑ)/(cateto adiacente a ϑ) = 3N/4N = ¾. Posso perciò dichiarare che: l’angolo ϑ1 è tale che il triangolo rettangolo ha il rapporto (cateto opposto a ϑ1)/(cateto adiacente a ϑ1) = ¾

Tangente dell’angolo e tan-1

Il rapporto (cateto opposto a ϑ)/(cateto adiacente a ϑ) è ben noto in trigonometria fin dai tempi antichi: esso ha il nome di **tangente dell’angolo** [**tan(ϑ)**]: posso perciò scrivere:

tan(ϑ)=(cateto opposto a ϑ)/(cateto adiacente a ϑ) (1)

Tornando alle forze, l’equazione (1) diventa:

**tan(ϑ) = Fy/Fx (2)**

Ed ecco infine l’ultimo passaggio. Una volta noto il valore di tan(ϑ) è possibile conoscere il valore di ϑ usando la **funzione tan-1** che è a disposizione in ogni calcolatrice. In formule: ϑ = tan-1[tan(ϑ)] → [tan(ϑ)=Fy/Fx]

**ϑ = tan-1(Fy/Fx) (3)**

Nel nostro caso abbiamo calcolato che: Fy/Fx = ¾ → ϑ1 = tan-1(¾) = 36,87°

Alcuni esempi.

Se tutta questa procedura sembra lunga o complicata, con alcuni semplici esempi vi convincerò che è più semplice fare il calcolo che spiegarne il metodo!

Guarda la Figura 6: calcoliamo ϑ2

F2y/F2x=(-4N)/(-2N) = 2 → tan(ϑ2) = 2 ; ϑ2 = tan-1(2) = 63,43°

calcoliamo ϑ3

F3y/F3x=(-3N)/4N = -¾ → tan(ϑ3) = -¾ ; ϑ3 = tan-1(-¾) = -63,43° (63,43° in valore assoluto)

calcoliamo ϑ4

F4y/F4x=(-3N)/2N = -3/2 → tan(ϑ4) = -3/2 ; ϑ4 = tan-1(-3/2) = -33,69° (33,69° in valore assoluto)

**Dalle coordinate polari a quelle cartesiane**

Così come è indispensabile saper passare dalle coordinate cartesiane a quelle polari è altresì indispensabile saper eseguire il procedimento inverso, cioè passare da coordinate polari a quelle cartesiane.

Detto in parole povere: passare da coordinate a polari a cartesiane significa saper calcolare le componenti Fx e Fy di una forza $\vec{F}$ quando si conosce il suo modulo e il suo angolo. Per poter eseguire questa trasformazione dobbiamo ancora una volta ricorrere alla **trigonometria**: in particolare, dobbiamo fare la conoscenza con il **seno** ed il **coseno** di un angolo.

Coseno e seno di un angolo

Nel paragrafo “Dalle coordinate cartesiane a quelle polari” abbiamo detto che per un triangolo rettangolo è possibile definire il rapporto fra i due cateti, chiamato **tangente** [**tan(ϑ)]**: tan (ϑ)=(cateto opposto a ϑ)/(cateto adiacente a ϑ) [vedi l’eq. (1)].

E’ evidente che per un triangolo rettangolo è possibile definire altri due rapporti, cioè quelli fra i due cateti e l’ipotenusa: il “rapporto (cateto adiacente a ϑ)/(ipotenusa)”, chiamato **coseno(ϑ)** [cos(ϑ)] e il “rapporto (cateto opposto a ϑ)/(ipotenusa)”, chiamato **seno(ϑ)** [sen(ϑ)]:

cos(ϑ)=(cateto adiacente a ϑ)/(ipotenusa) (4)

sen(ϑ)=(cateto opposto a ϑ)/(ipotenusa) (5)

Tornando alle forze: osserva il vettore $\vec{F}$1 di Figura 7. Abbiamo già detto che il vettore $\vec{F}$1 insieme alle sue componenti Fx e Fy forma un **triangolo rettangolo**, di cui ϑ1 è l’angolo all’origine: **Fy è il cateto opposto a ϑ** mentre **Fx è il cateto adiacente a ϑ**: il vettore $\vec{F}$**1 è l’ipotenusa.** Perciò le equazioni (4) e (5) diventano:

cos(ϑ)=Fx/|$\vec{F}$1| (6)

sen(ϑ)=Fy/|$\vec{F}$1| (7)

 Per trovare le component Fx e Fy posso invertire le eq. (6) e (7):

**Fx=|F1|⋅cos(ϑ) (8)**

**Fy=|F1|⋅sen(ϑ) (9)**

Il valore di cos(ϑ) e sen(ϑ) al cambiare del valore dell’angolo ϑ è tabulato in ogni calcolatrice.

Nota che le eq. (8) e (9) danno solo il valore assoluto di Fx e Fy: per quanto riguarda il segno, ne discuteremo a parte.

**Alcuni esempi commentati**

Se tutta questa procedura sembra lunga o complicata, con alcuni semplici esempi vi convincerò che è più semplice fare il calcolo che spiegarne il metodo!

Guarda la Figura 6 (l’ho riportata a destra come “Figura 8” per comodità): supponiamo di conoscere il modulo e l’angolo ma di non sapere il valore delle componenti: calcoliamo quest’ultime usando le eq. (8) e (9) e verifichiamo se i risultati coincidono con quelli della Figura 6 (Figura 8).

Calcoliamo Fx e Fy

Sappiamo che |F1| = 5N e ϑ=37,86°.

**Figura 8**

calcolo Fx: Fx=|F1|⋅cos(ϑ) ; con la calcolatrice ottengo il valore di cos(37,86°) = 0,8 → F1x = 5N⋅0,8 = 4N

calcolo Fy: Fy=|F1|⋅sen(ϑ) ; con la calcolatrice ottengo il valore di sen(37,86°) = 0,6 →

Fx = 5N⋅0,6 = 3N

Un attimo di riflessione: definizione di coseno e seno come percentuali

“Prof! Ma che è ‘sta roba!?!? seno, coseno, angoli… Sono cose che ancora non abbiamo ancora studiato a Matematica! Non ci sto capendo niente!c c c” “Hai ragione, mimmo: tutta questa procedura deve essere chiarita, sennò diventa un fritto misto che non riuscite a digerire. Soffermiamoci un istante e riflettiamo su quale potrebbe essere il **significato pratico** di: seno e coseno di un angolo”.

Cosa significa che “cos(37,86°) = 0,8?” Significa che “quando l’angolo ϑ è 37,86° il cateto adiacente a ϑ (Fx) è 0,8 = 80% dell’ipotenusa (|F1|).” Allo stesso modo, “sen(37,86°) = 0,6” significa che “quando l’angolo ϑ è 37,86° il cateto opposto a ϑ (|Fy|) è 0,6 = 60% dell’ipotenusa (|F1|).” Ecco allora un modo semplice e pratico di definire il seno ed il coseno!

il seno di un angolo dà la percentuale del cateto opposto a ϑ rispetto all’ipotenusa

(per quanto riguarda le forze: il seno di un angolo dà la percentuale di Fy rispetto a |F1|)

il coseno di un angolo dà la percentuale del cateto adiacente a ϑ rispetto all’ipotenusa

(per quanto riguarda le forze: il coseno di un angolo dà la percentuale di Fx rispetto a |F1|)

Riassumendo: affermare che “cos(37,86°) = 0,8” significa che “in ogni triangolo rettangolo avente l’angolo ϑ=37,86° il cateto adiacente a ϑ è 0,8 = 80% dell’ipotenusa (per quanto riguarda le forze: Fx è l’80% di |F1|)”

Affermare che “sen(37,86°) = 0,6” significa che “in ogni triangolo rettangolo avente l’angolo ϑ=37,86° il cateto opposto a ϑ è 0,6 = 60% dell’ipotenusa (per quanto riguarda le forze: Fy è il 60% di |F1|)”

Detto questo, andiamo avanti con qualche altro esempio!

Riprendiamo gli esempi

Continuiamo con i nostri esempi di Figura 8.

calcoliamo Fx e Fy di $\vec{F}$2

Sappiamo che |F2| = √20N e ϑ2=63,43°:

cos(63,43°) = 0,447 → Fx è il 44,7% di |F2| → Fx = √20N⋅0,447 = 2N

sen(63,43°) = 0,894 → Fy è l’89,4% di |F2| → Fy = √20N⋅0,894 = 3N

calcoliamo Fx e Fy di $\vec{F}$3

Sappiamo che |F3| = 5N e ϑ3=36,87°:

cos(36,87°) = 0,8 → Fx è l’80% di |F3| → Fx = 5N⋅0,8 = 4N

sen(36,87°) = 0,6 → Fy è il 60% di |F3| → Fy = 5N⋅0,6 = 3N

calcoliamo Fx e Fy di $\vec{F}$4

Sappiamo che |F4| = √13N e ϑ4=33,69°:

cos(33,69°) = 0,852 → Fx è l’85,2% di |F4| → Fx = √13N⋅0,852 = 3N

sen(33,69°) = 0,555 → Fy è il 55,5% di |F4| → Fy = √13N⋅0,555 = 2N

**SEGNO DELLE COMPONENTI**

Avrai notato che tutti i valori ottenuti negli esempi che abbiamo fatto sono positivi, cioè le componenti sono date in **valore assoluto** [questa è una scelta del Prof: in realtà è possibile, grazie ad una definizione più rigorosa dell’angolo ϑ, ottenere anche il **verso** della componente usando le eq. (2), (8), (9)]. Eppure per una forza (e per un vettore in generale) è indispensabile indicarne anche il verso! Come si fa? E’ semplicissimo: è sufficiente osservare il disegno e vedere se la componente punta nel verso positivo o in quello negativo. In Figura 8 sono indicati i segni del verso delle componenti in base al S.d.R. disegnato: verifica se sono giusti!