**SOMMA DI FORZE**

Spesso su di un oggetto agiscono più forze contemporaneamente: basti pensare al caso di un viaggiatore che solleva la valigia da terra: sulla valigia agisce sia la forza-peso che la forza della mano. Anche su di una barca a vela agiscono almeno due forze: quella del vento e la resistenza dell’acqua. Come abbiamo già visto[[1]](#footnote-1), su di un’auto in moto agiscono almeno tre forze: quella del motore, l’attrito dell’aria e l’attrito volvente sulle ruote. E quando cammini? Sulla pianta del piede di appoggio agiscono ben quattro forze: il tuo peso, la forza dei tuoi muscoli che la spingono all’indietro, la forza di attrito statico che blocca il piede al suolo e la spinta verso l‘alto del terreno che si oppone al peso e ti impedisce di sprofondare. Avere più forze applicate contemporaneamente allo stesso oggetto è più la norma che l’eccezione! Perciò è necessario scoprire una tecnica che ci permetta di calcolare l’effetto di più forze contemporanee.

Sappiamo già che le forze sono rappresentabili da **vettori** ed in quanto tali esse sono soggette a tutte le proprietà di questi. In particolar modo esse si sommano seguendo la **regola del parallelogramma** o **del punta-coda**, che abbiamo già descritto in altri appunti[[2]](#footnote-2): queste due regole (che sono del tutto equivalenti) hanno come risultato finale un’unica forza, chiamata **risultante**, che perciò descrive l’effetto complessivo di tutte le forze che sono state applicate. Conseguentemente, posso affermare che:

**la spinta complessiva di più forze applicate contemporaneamente ad un unico oggetto è equivalente alla spinta di un’unica forza (risultante)**

Come già detto, per ottenere la risultante devo applicare la “regola del parallelogramma” o quella del “punta-coda”. Anche se la “regola del parallelogramma” è la vera definizione matematica della somma vettoriale essa ha il difetto di essere alquanto lenta se applicata a più di due vettori: perciò considereremo solo la “regola del punta-coda”, più grezza ma più snella, con buona pace dei Matematici.

Detto questo, non ci resta che esercitarci a risolvere qualche semplice problema. Esistono almeno due tecniche per ottenere la risultante: la **tecnica grafica**, basata su un disegno in scala dove sono riportati con precisione i moduli e gli angoli delle direzioni delle forze; la **tecnica matematica**, basata sul calcolo delle proiezioni. Iniziamo con la tecnica grafica: per rendere più chiari i passaggi dei problemi che vi proporrò alla pagina successiva, qua sotto in Figura1 mostro alcuni esempi grafici di “punta-coda” ed un esempio di “parallelogramma”. Nel sito “Fisica Facile” ci sono dei video che ti illustrano entrambe le tecniche.



**Figura1: risultante R=A+B ottenuta con “parallelogramma” [2] e con “punta-coda” [3].**

**Somma di 2 o più vettori con “punta-coda” [4].**

**SOMMA DI FORZE – metodo grafico**

Problema1: il vecchietto e la valigia (descrizione passo-passo del “punta-coda”)

Una valigia di peso P=8N è spostata in alto e a destra con una forza F0=12N, inclinata di 30° rispetto all’orizzontale (Figura2). Trova qual è la spinta complessiva (**Ftot**) che riceve la valigia: trova poi la spinta lungo X e quella lungo Y.

***Soluz:*** la prima cosa da fare è decidere una scala per i moduli. Nel nostro caso, ho deciso come scala 1 quadretto = 2N.

* la seconda cosa da fare è disegnare le forze in scala, con gli angoli giusti (ci vuole un righello ed un goniometro). Io ho disegnato le forze Peso (P, celeste) e F0 (verde): le ho applicate al solito punto della valigia. A (non importa quale, purché sia il medesimo).
* la terza cosa da fare è applicare la tecnica “punta-coda”: alla punta di P ho collegato la coda di F0 (in grigio).
* la quarta cosa da fare è tracciare il vettore risultante R che dalla coda del primo vettore (punto A) giunge alla punta del secondo vettore.
* la quinta e ultima cosa da fare è… misurare! Con un goniometro misura l’angolo di R=Ftot; con un righello la sua lunghezza e le sue componenti lungo X e Y. Dovresti ottenere questi valori:

angolo ≈ 11° ; || ≈ 10,4N ; Fx ≈ 10,2N verso destra ;

Figura 2

Fy ≈ 2N verso il basso



Problema2: Furia è diventato bianco! Furia, cavallo del West, è stato lavato con il detersivo e si è sbiancato! Per la sorpresa, fa un salto spingendo con lo zoccolo sul suolo con una forza F0=9000N inclinata di 45° verso il basso. Di conseguenza, Furia preme al suolo con due forze: il suo Peso (6000N) + F0 (Figura3). Qual è la forza complessiva con cui Furia spinge al suolo?

**Soluz**: la scala è 1q = 1000N. Disegno Peso (celeste) e F0 (verde) in scala e con le giuste direzioni, applicate al medesimo punto A. Applico la tecnica punta-coda: disegno la parallela al Peso unendola con la coda alla punta di F0. Infine, traccio la risultante Ftot (indicata con R nel disegno) partendo dalla coda di F0 (A) alla punta del Peso. Misuro: angolo, lunghezza di Ftot (indicata con R nel disegno) e le sue componenti ed ottengo: angolo ≈ 60° rispetto all’orizzontale ; ||≈ 14.000N ; Ftotx ≈ 6.400N ; Ftoty ≈ 12.300N

Figura 3

Nota che i valori finali non sono esatti: non ti preoccupare, è una conseguenza naturale del fatto che essi sono stati ottenuti misurando una figura e non eseguendo calcoli.

Nota anche che quando sommi graficamente due vettori l’ordine con cui li disegni non ha importanza perché la somma di vettori gode della **proprietà commutativa**: puoi applicare la coda di F0 alla punta del Peso (Problema1) o la coda del Peso alla punta di F0 (Problema2), a tua scelta. Stessa cosa se devi sommare più di due vettori insieme.

Nota infine che non è indispensabile disegnare i vettori iniziali applicati tutti al medesimo punto (A) -infatti, in Figura1 i vettori iniziali sono disegnati in modo sparso-; però se c’è un unico punto di partenza per tutti i vettori non c’è il rischio di sbagliare il punto di partenza della risultante finale.

**PROBLEMI GRAFICI**

Ecco a voi alcuni Problemi con le forze che potete risolvere graficamente per ottenere la **risultante Ftot**. Il Problema (C) è già stato risolto per illustrare il caso generale in cui le forze F1 e F2 non siano né orizzontali né verticali. Per ognuno dei Problemi:

* disegnate tot, cioè la somma vettoriale F1 + F2 (nel Problema (C) è già stata disegnata)
* misurate la lunghezza e trovate il modulo di tot utilizzando la scala (usate un righello)
* misurate la direzione di tot (usate un goniometro)
* misurate le componenti di tot lungo X ed Y ( in pratica: misurate Ftotx e Ftoty )

Figura 4



**SOMMA DI FORZE – metodo matematico**

Adesso vi presento il secondo metodo usato per sommare le forze, quello più pratico e universalmente applicato: il **metodo matematico**. Esso si basa su una fondamentale proprietà delle forze, che abbiamo descritta in altri appunti[[3]](#footnote-3):

**la spinta esercitata da una forza lungo una direzione generica è uguale alla componente (proiezione) della forza su tale direzione**

In pratica, il metodo matematico si poggia sull’evidente principio che le “spinte si sommano”: se una persona spinge un oggetto con una forza di 10N ed una seconda persona spinge **lungo la stessa direzione della prima persona** lo stesso oggetto con una forza di 5N, quest’ultimo riceverà una spinta complessiva 10N+5N=15N.

Questa proprietà l’abbiamo sempre applicata tutte le volte che abbiamo svolto dei calcoli **1D**, cioè quando le forze erano dirette lungo un’unica direzione: ma ora esse sono su di un piano ed ogni forza ha la sua propria direzione. Adesso le direzioni possibili sono tutte quelle di un piano, cioè infinite: io non posso sommare due forze qualsiasi come se fossero numeri! Però possiamo sfruttare la proprietà che due spinte lungo la stessa direzione si sommano (algebricamente): ed ecco qua il trucco!

Supponiamo di avere due generiche forze F1 e F2 che devo sommare. La spinta totale di F1+F2 sarà data dalla somma (algebrica) delle loro spinte. In particolare, la spinta complessiva lungo X sarà data dalla spinta di F1 lungo X +(algebrico) la spinta di F2 lungo X : cioè, se lungo X la spinta di F1 è di 10N e quella di F2 è di 5N la spinta complessiva lungo X è 10N+5N=15N. In formule:

**Spinta complessiva lungo X =** **Spinta di F1 lungo X +(algebrico) Spintadi F2 lungo X (1)**

Come abbiamo già detto, la spinta complessiva di più forze si chiama **risultante** (nei disegni sopra indicata con **R** e negli appunti con **Ftot**) e perciò posso scrivere:

Ftotx = Spinta complessiva lungo X.

Inoltre, come abbiamo affermato sopra, la spinta di una forza lungo una direzione coincide con la sua proiezione (componente) lungo tale direzione: e perciò, se **F1x** e **F2x** sono rispettivamente le **componenti** di F1 e F2 lungo X, abbiamo subito che: Spinta di F1 lungo X = F1x ; Spintadi F2 lungo X = F2x.

Mettendo tutto insieme ottengo immediatamente che l’eq. (1) può essere scritta come:

**FTOTx = F1x + F2x** (“+” algebrico) **(2)**

Stesso identico ragionamento vale per la direzione Y:

**FTOTy = F1y + F2y** (“+” algebrico) **(3)**

Possiamo riassumere tutto questo discorso nell’enunciato:

**la risultante di più forze lungo una particolare direzione è uguale alla somma algebrica delle componenti delle forze lungo quella direzione**

Come spesso accade, è più facile risolvere un problema che enunciarlo: ed infatti, mettiamo in pratica tutta la teoria che abbiamo discusso sopra e vedremo che in pochi istanti di calcolo siamo in grado di sommare un numero qualsivoglia di forze insieme!

Problema3: un rapido esempio di somma per componenti. Considera di applicare due forze F1 e F2 su di un oggetto (guarda la Figura 5A): qual è l’effetto complessivo delle due forze?

**Soluz:** Poiché devo sommare le spinte lungo X e quelle lungo Y -e dunque devo sommare separatamente le componenti X ed Y delle forze-, scompongo F1 e F2. Iniziamo dalla figura 4a:

Figura 5

F1x = 10N⋅cos(30°) = 8,66N ; F1y = 10N⋅sen(30°) = 5N

F2x = 8N⋅cos(55°) = 4,59N ; F2y = 8N⋅sen(55°) = 6,55N

FTOTx = F1x + F2x → FTOTx = 8,66N + 4,59N = 13,25N

FTOTy = F1y + F2y → FTOTy = 5N + 6,55N = 11,55N

Il modo più naturale di esprimere un vettore è scriverne il **modulo**, la **direzione** ed il **verso** (**coor. polari**). Per il calcolo sono sufficienti le equazioni che hai imparato a lezione:

Il **modulo** si ottiene con il Th. di Pitagora: **|| =**

L’angolo ϑ della **direzione** si ottiene dalla trigonometria: **ϑ = tan-1(Ftoty/Ftotx)**

Il **verso** si ottiene… facendo il disegno e indicando dove punta il vettore della accelerazione!

Eseguendo i calcoli otteniamo: || = 17,6N ; ϑ=41,1° ; il verso punta in alto.

Per quanto riguarda la Figura 5B, nota che le componenti lungo X di F1 e F2 sono opposte! Come si fa? Esattamente come si faceva nel caso 1D: si sceglie un verso (+), ad esempio a destra: F1x punta a destra → F1x è positiva , F2x punta a sinistra → F2x è negativa. Dopodiché si somma algebricamente F2x a F1x.

F1x = 9N⋅cos(45°) = 6,36N ; F1y = 9N⋅sen(45°) = 6,36N

F2x = -4N⋅cos(30°) = -3,46N ; F2y = 4N⋅sen(30°) = 2N

FTOTx = F1x + F2x → FTOTx = 6,36N + (-3,46)N = 2,90N

FTOTy = F1y + F2y → FTOTy = 6,36N + 2N = 8,36N

Coor. polari: || = 8,85N ; ϑ=70,9° ; il verso punta in alto.

Per quanto riguarda la Figura 5C, devi sommare 3 forze! Ma la procedura è esattamente la stessa: bisogna sommare algebricamente le spinte, cioè le componenti. Fai tu i calcoli!

FTOTx = 3,99N

FTOTy = -1,38N

Coor. polari: || = 4,22N ; ϑ=19,1° ; il verso punta in basso.

Nota che il metodo di somma delle componenti è matematico ma si basa su una proprietà fisica: quella che la spinta di una forza lungo una direzione coincide con la proiezione lungo quella direzione.

Nota poi che una singola direzione, che sia X o Y o una qualsiasi altra a piacere, rappresenta un caso 1D e perciò per il calcolo della somma di componenti valgono esattamente tutte le regole del calcolo 1D.

Nota, in particolare, che una componente ha segno (+) o (-) a seconda del suo verso: un vettore invece non ha segno ma una direzione ed un verso.

**PROBLEMI DI COMPONENTI – forza ed accelerazione**

Il metodo matematico è molto pratico per calcolare l’effetto delle forze: ad esempio, permette un rapido computo dell’**accelerazione**. Per eseguirlo è sufficiente usare il Secondo Principio della Dinamica, cioè:

**TOT=M⋅** **(1) (equazione vettoriale)** che si scompone in [[4]](#footnote-4)

 **(2) (equazioni scalari)**

Per il calcolo del modulo, della direzione e del verso dell’accelerazione è sufficiente tenere a mente che essa è un **vettore** e perciò anche per essa valgono le equazioni che sono state scritte nella pagina precedente.

Problema1: la somma dei vettori inquadrettati. Somma i vettori disegnati in Figura6, misurando le loro componenti con i quadretti. Disegna poi la risultante Ftot. Se l’oggetto a cui sono applicate le forze ha una massa M=5kg, calcola le componenti dell’accelerazione ax e ay; infine calcola modulo e angolo di direzione dell’accelerazione.

1. Ftotx=11N ; Ftoty=2N ;

Figura 6

ax=Ftotx/M → ax=1,2m/s2

ay=Ftoty/M → ay=0,4m/s2

||=1,265m/s2 ; ϑ=18,43° ; verso in alto

1. Ftotx=4N ; Ftoty=1N

ax=0,8m/s2 ; ay=0,2m/s2

||=0,825m/s2  ; ϑ=14,03° ; verso in alto

1. Ftotx=0N ; Ftoty=0N

ax=0m/s2 ; ay=0m/s2

||=0m/s2 ; ϑ=indeterminato ; verso indeterminato

Problema2: la somma dei vettori angolati. Somma i vettori mostrati in Figura7, calcolando le loro componenti con la trigonometria [[5]](#footnote-5). Disegna poi la risultante Ftot. Se l’oggetto a cui sono applicate le forze ha una massa M=2kg, calcola le componenti dell’accelerazione ax e ay; dopodiché calcola modulo e angolo di direzione dell’accelerazione.

Figura 7

1. Ftotx=9,76N ; Ftoty=1,17N ;

ax=4,88m/s2 ; ay=0,59m/s2

||=4,91m/s2  ; ϑ=6,85° ; verso in alto

1. Ftotx=3,99N ; Ftoty=7,28N

ax=1,99m/s2 ; ay=3,64m/s2

||=4,15m/s2 ; ϑ=61,3° ; verso in alto

Infine, UN’ULTIMA FONDAMENTALE OSSERVAZIONE: abbiamo introdotto due diverse tecniche di calcolo di somma, quella grafica e quella matematica: qual è quella giusta? Ovviamente… entrambe! Bene, allora vi do un compito: dimostratemi che esse sono equivalenti, cioè dimostratemi che entrambi i metodi danno la medesima risultante. Per facilitarvi il compito, vi ho disegnato la somma di due vettori nella Figura8: osservatela e fatemi la dimostrazione! Un “+” a chi ci riesce.

Figura 8

1. Negli appunti “BREVE COMMENTO SULLE IPOTESI DI ARISTOTELE SUL MOVIMENTO”, paragrafo “Forza proporzionale alla velocità” [↑](#footnote-ref-1)
2. Negli appunti “SOMMA E DIFFERENZA FRA FORZE (VETTORI)” [↑](#footnote-ref-2)
3. Negli appunti “FORZA E SPINTA OBLIQUA” [↑](#footnote-ref-3)
4. Come visto negli appunti “EQUAZIONE VETTORIALE E SCALARE” [↑](#footnote-ref-4)
5. Come visto negli appunti “SEMPLICE TRIGONOMETRIA E PROIEZIONI” [↑](#footnote-ref-5)