**LA MACCHINA DI ATWOOD**



**Figura 1**

La **macchina di Atwood** è stata inventata nel 1784 da [George Atwood](http://it.wikipedia.org/wiki/George_Atwood), matematico, inventore e scacchista inglese, come un [esperimento](http://it.wikipedia.org/wiki/Esperimento) di [laboratorio](http://it.wikipedia.org/wiki/Laboratorio) per verificare le [leggi](http://it.wikipedia.org/wiki/Legge_%28scienza%29) del [moto uniformemente accelerato](http://it.wikipedia.org/wiki/Moto_uniformemente_accelerato).

La macchina di Atwood è costituita da due [oggetti](http://it.wikipedia.org/wiki/Oggetto) di [massa](http://it.wikipedia.org/wiki/Massa_%28fisica%29) MA e MB connessi da un filo inestensibile posto sopra una [carrucola](http://it.wikipedia.org/wiki/Carrucola) priva di attrito. In questo modo è possibile studiare il rapporto tra [forza-peso](http://it.wikipedia.org/wiki/Forza_peso), massa e [accelerazione](http://it.wikipedia.org/wiki/Accelerazione). (Come mai per la macchina di Atwood si usa una carrucola e non un chiodo o comunque una sospensione non ruotante come un chiodo? Pensaci…). La corda viene accelerata verso il basso dal peso maggiore: durante il suo movimento la corda trascina la carrucola facendola ruotare. Perciò la macchina di Atwood è composta da tre oggetti: i due pesi accelerati verticalmente, uno in alto e l’altro in basso, e la carrucola che viene fatta ruotare. Lo studio della rotazione della carrucola necessita l’applicazione delle formule di cinematica rotazionale, che non abbiamo ancora affrontato: perciò **considereremo la carrucola come se fosse immobile** (ad esempio, come se fosse inchiodata) e studieremo solo il moto dei due pesi.

**Equazione del moto**

A questo punto è possibile ricavare l'equazione del moto dei due corpi. Se consideriamo un filo inestensibile e una carrucola priva di attrito, le forze da tenere in conto sono la [forza-peso](http://it.wikipedia.org/wiki/Forza_peso) delle masse(**PA** e **PB**) , la forza con cui il filo sostiene le due masse (rispettivamente la [tensione](http://it.wikipedia.org/wiki/Tensione_%28meccanica%29) applicata dal filo sulle masse **TA** e **TB**) e la reazione con cui le due masse stirano il filo (rispettivamente la [tensione](http://it.wikipedia.org/wiki/Tensione_%28meccanica%29) applicata dalle masse sul filo **T’A** e **T’B** ; TA=T’A , TB=T’B in modulo per il Principio di Azione e Reazione). C’è infine da considerare l’effetto del peso della corda parallelo alla traiettoria, **Pcorda//** (non disegnata in figura). Le forze-peso PA e PB rappresentano le **forze motrici in opposizione** (in quanto tirano il Sistema in versi opposti) che sono applicate al Sistema.

Per trovare l’accelerazione **a** e le tensioni **TA** e **TB** del Sistema, la prima cosa da fare è **segnare il verso positivo**: nel nostro caso scegliamo il verso (+) da MA a MB, cioè il verso orario (il verso da MB a MA andava altrettanto bene: uno può scegliere il verso che più gli piace).

Un accenno indispensabile su **Pcorda//**. La corda è distesa in parte lungo A (e perciò agisce negativamente), in parte lungo B (dove invece agisce positivamente): ne segue che Pcorda//=PcordaB// - PcordaA//.

Poi dobbiamo considerare le **forze agenti sulle singole masse**. Infine si applica **F=M⋅a**.

* Sul corpo **MA** la forza agente è **TA – PA** → (PA=MA⋅g) : **TA – MAg = MA⋅a**
* Sul corpo **MB** la forza agente è **PB – TB** → (PB=MB⋅g) : **MB⋅g – TB = MB⋅a**
* Sulla **corda** la forza agente è **T’B – T’A + Pcorda//** : **T’B – T’A + Pcorda// = Mcorda⋅a**

**Corda senza massa**

La terza equazione è quella più complicata da trattare. Infatti, abbiamo detto: Pcorda// = PcordaA// - PcordaB//. Da ciò segue che, al passare del tempo, a causa dello scorrimento della corda la quantità di corda presente da un lato cambia (ad esempio, se le masse scorrono verso il “+” si ha che PcordaB// aumenta mentre PcordaA// diminuisce), cosicché la forza complessiva agente sul Sistema delle masse cambia con il tempo ed il moto non è più uniformemente accelerato.

Tutti questi problemi si risolvono se supponiamo che **la massa della corda sia trascurabile rispetto alle altre masse in gioco**, cioè se **Mcorda << MA+MB**. In questo caso Pcorda≈0 e perciò posso trascurare Pcorda//. Inoltre se Mcorda≈0 il secondo membro della terza equazione si annulla e di conseguenza T’A ≈T’B, cioè le due tensioni sono praticamente identiche. Se chiamo T le due tensioni (cioè, se pongo T’A=T’B=T) e sostituisco il tutto nel sistema ottengo l’**equazione di moto approssimata al caso Mcorda=0**, data dal sistema:

 $\left\{\begin{array}{c}T- M\_{A}g = M\_{A}a\\M\_{B}g-T= M\_{B}a\end{array}\right.$ **(equazione di moto, approssimazione Mcorda=0)**

Si può facilmente dimostrare (con una dimostrazione che ometto per brevità) che **l’errore relativo (R)** **sul valore di a e di T** compiuto trascurando la massa della corda è: r = Mcorda/(MA+MB). Ad esempio, nel caso di due masse di 3kg e 2kg sostenute da una corda di 5g, l’errore nel porre Mcorda=0 è R=5g/(2kg+3kg) = 0,001 = 0,1%.

Quando MA = MB la macchina si trova in [equilibrio](http://it.wikipedia.org/wiki/Equilibrio), in quanto la somma delle forze motrici è nulla, mentre quando una delle due masse è maggiore dell'altra (ad esempio MA > MB) i due oggetti subiscono un'accelerazione causata dalla differenza fra le due masse.

**La reazione vincolare Rv**

I pesi attaccati e la tensione T non sono le uniche forze agenti sul Sistema: esiste anche un’altra forza, la **reazione vincolare Rv**. Che cosa è Rv? **Rv è la forza con cui la carrucola sostiene la corda impedendole di cadere**: essa è applicata come in Figura2.

Nota che Rv non appare nell’equazione di moto: come mai? Il motivo è questo: la velocità di un oggetto è modificata solo dalla componente parallela della forza agente, in questo caso da Rv//: ma **Rv è sempre perpendicolare alla corda** e perciò la sua componente parallela (Rv//) è sempre nulla e dunque Rv non può né accelerare né rallentare il Sistema! In altre parole: Rv non accelera né rallenta il moto del Sistema perché Rv// = 0 in quanto Rv è sempre perpendicolare alla corda.

Perché calcolare Rv?

“Ma allora, Prof, a cosa serva calcolare Rv?” “Serve per una cosa importante importante… Pensa un po’: se la carrucola applica una forza Rv sulla corda, cosa accade?” “Uhmmm…. Per il **III Principio** la corda applica una forza Rv’=Rv (in modulo) alla carrucola!” “Bravo! Hai indovinato.” E’ proprio quello che succede: poiché la carrucola applica una forza Rv sulla corda, per il Principio di Azione e Reazione essa subisce dalla corda una forza Rv’=Rv (in modulo): se progetto una macchina di Atwood **devo conoscere il valore Rv per sapere quanta forza deve sopportare la carrucola** altrimenti rischio di progettarla troppo debole e rischiare di spezzarla.

**Figura 2**

Calcolo di Rv

Per sapere come calcolare Rv guarda la Figura2. Rv agisce sulla corda: perciò dobbiamo scrivere F=M⋅a per quanto riguarda la corda: Rv – T’1 – T’2 = Mcorda⋅aTOTALE\_CORDA. (“+” in alto). **aTOTALE\_CORDA****rappresenta l’accelerazione totale della corda**, che tiene conto che essa accelera in parte verso l’alto e in parte verso il basso. In classe non abbiamo spiegato come calcolare il valore di aTOTALE\_CORDA: il motivo è che… è del tutto inutile calcolarlo! Infatti, avendo supposto che Mcorda=0 scrivo: Rv – T’1 – T’2 = 0⋅aTOTALE\_CORDA , perciò il secondo membro è sempre nullo qualunque sia il valore di aTOTALE\_CORDA → Rv – T’1 – T’2 = 0.

Facendo un semplice passaggio ho: Rv = T’1 + T’2. Sempre per il **III Principio** ho che: T’1=T1 , T’2=T2 (in modulo) →

**Rv = T1 + T2 (1)**