**IMPULSO CON FORZA VARIABILE NEL TEMPO**

Fino ad ora abbiamo trattato casi dove la forza F0 applicata ad un oggetto rimaneva costante: cosa accade se invece essa cambia allo scorrere del tempo? I casi di **forza variabile nel tempo** sono comunissimi, anzi posso dire che essi rappresentano quasi la norma: il problema è che il calcolo del loro Impulso non è immediato ma necessita di una particolare tecnica matematica chiamata **calcolo integrale** che voi imparerete al V anno. Però, come vedremo adesso, è possibile in alcuni semplici casi calcolare l’Impulso di una forza variabile attraverso un metodo grafico.

**L’Impulso Ω di una forza coincide con l’area sottesa dal grafico t-F**

L’**Impulso** **di una forza** (**Ω**) è stato introdotto in altri appunti.[[1]](#footnote-1) Per adesso basti ricordare che, nel caso di una forza costante, esso è definito come:

**Ω = F⋅Δt (1)**

La sua importanza deriva che esso è legato alla quantità di moto di un corpo dall’equazione:

**Ω = ΔP** → **Ω = Pf – Pi (2a)** o anche (P=m⋅V):

**Ω = m⋅Vf - m⋅Vi (2b)**

Le eq. (2a) e (2b) sono sempre applicabili, sia se la forza è costante nel tempo o no, purché si sia in grado di calcolare Ω. Essa si ottiene dall’eq. (1) che però è applicabile solo nel caso di forza costante: come si può calcolare Ω se la forza dovesse cambiare con il tempo? Al riguardo, in classe abbiamo enunciato un’importante proprietà dell’Impulso che vale in ogni situazione:

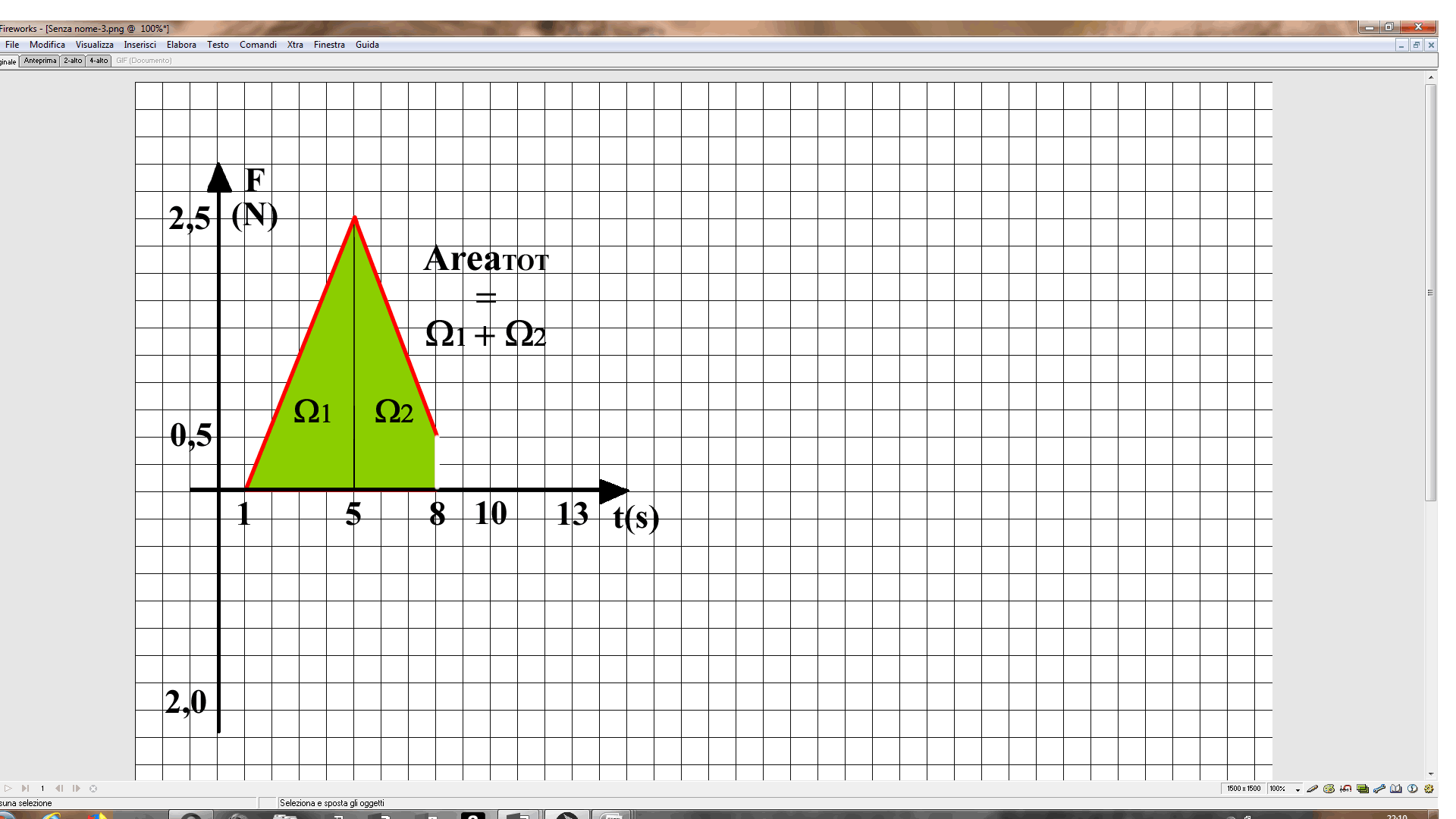
**l’Impulso di una forza corrisponde all’area sottesa dal grafico t-F**

Sul sito “Fisica Facile” c’è un video che spiega questa proprietà -video Th. Impulso, da 0:37 in poi. Nel video Ω=I e p=Q-.

Il Prof non ha fatto nessuna dimostrazione ma si è limitato a dichiarare: “Al III anno abbiamo dimostrato che **lo spostamento ΔS = area sottesa dal grafico t-V**; la dimostrazione che **l’Impulso** **Ω = area sottesa dal grafico t-F** è praticamente identica a quella fatta per ΔS perché l’equazione **ΔS = V⋅Δt,** che vale quando V è costante, è matematicamente identica all’equazione **Ω = F⋅Δt**, che vale quando F è costante -basta scambiare ΔS con Ω e V con F per passare da un’equazione all’altra-. Ne segue che la dimostrazione per il calcolo di Ω si ottiene prendendo quella per ΔS e poi scambiando ΔS con Ω e V con F-[[2]](#footnote-2). Questo è possibile perché la matematica si interessa solo di concetti astratti e non di oggetti concreti.”

“Prof, cosa ha detto… i due teoremi sono praticamente identici… le due equazioni sono matematicamente uguali… la matematica è astratta… che vuol dire?” “Cheee?!?! Non hai capito?!?! Abbiamo discusso l’argomento in classe! Corri subito a ripassarti la discussione sui tuoi appunti!”.

Ma adesso, bando alle ciance! Armiamoci di penna, foglio e voglia di studiare e calcoliamo l’Impulso di una forza variabile nel tempo usando il grafico t-F.

Problema1: la pallina spintonata. Supponi di avere una pallina di massa m=2300g che si muove verso destra (+) con velocità iniziale 2m/s. Al tempo t=1s viene applicata sulla pallina una forza, diretta anch’essa verso destra: la forza cresce linearmente fino al valore F=2,5N al tempo t=5s per poi ridiscendere linearmente fino al valore F=0,5N al tempo t=8s. Il grafico t-F è mostrato in Figura1: la forza è positiva perché abbiamo preso il (+) a destra.

Qual è la velocità finale della pallina al tempo t=8s?

**Soluz:** Applico l’eq. (2a). **Pi = m⋅Vi = 2,3kg⋅2m/s = 4,6kg⋅m/s**. Abbiamo affermato poco sopra che **Ω = area sottesa dal grafico t-F**: dunque, per calcolare Ω… dobbiamo calcolare l’area sottesa nel grafico di Figura1! Per semplicità conviene dividere l’area totale in due aree, **Ω1** e **Ω2**. Un semplice calcolo mostra che:

**Figura 1**

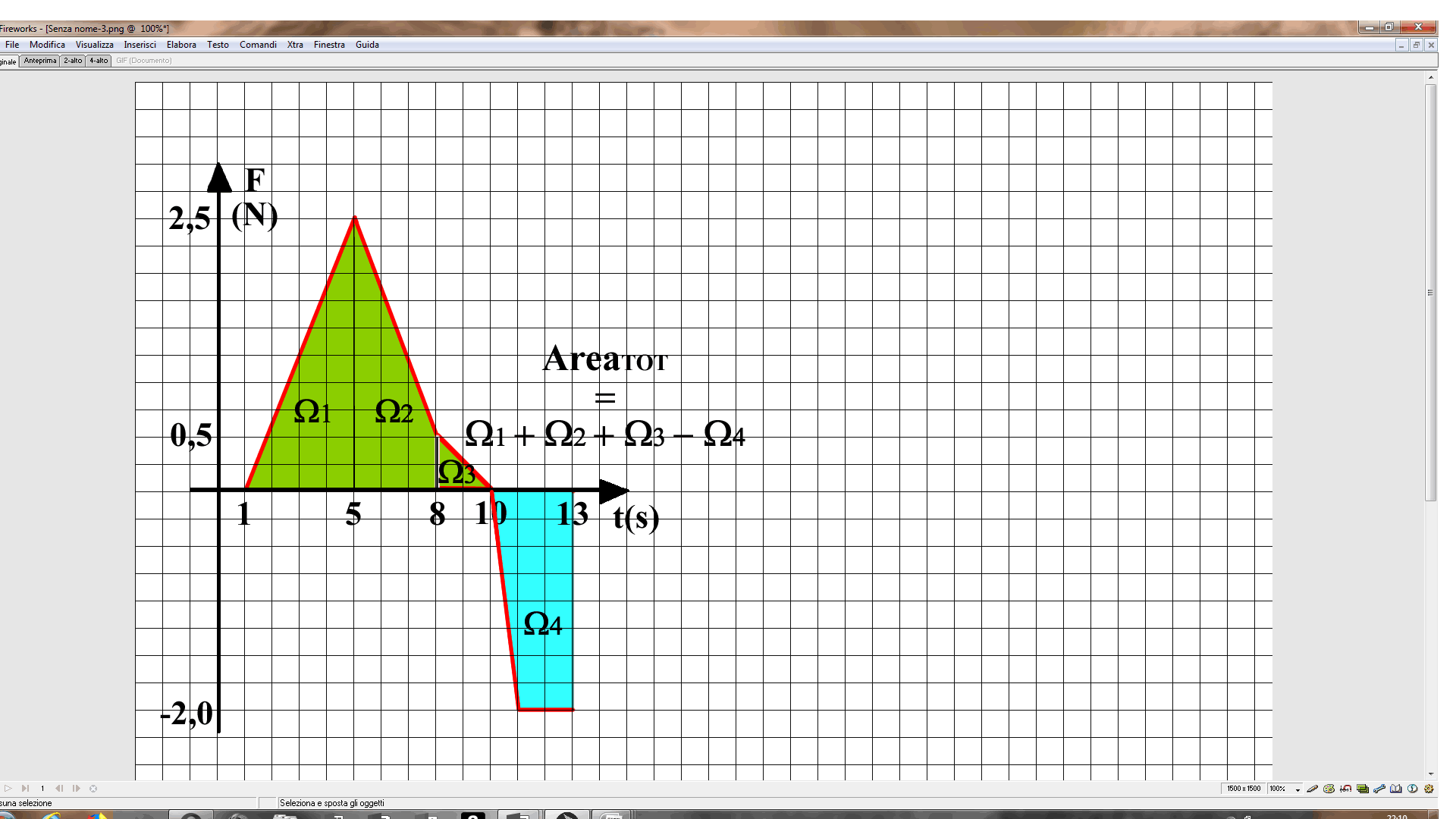
**Area Ω1 = 5N⋅s** ; **Area Ω2 = 4,5N⋅s** → **AreaTOT =** **ΩTOT = Ω1+Ω2 = 5N⋅s + 4,5N⋅s = 9,5N⋅s**

I valori qua sopra hanno un semplicissimo significato fisico:

* fino al tempo 1s la pallina non ha ricevuto alcuna forza e di conseguenza nessun Impulso: si è mossa per inerzia.
* Dal tempo t=1s al tempo t=5s essa ha ricevuto un Impulso complessivo Ω1=5N⋅s positivo (verso destra).
* Dal tempo t=5s al tempo t=8s essa ha ricevuto un Impulso complessivo Ω2=4,5N⋅s positivo (verso destra).
* Di conseguenza, al tempo t=8s la pallina ha ricevuto un Impulso totale (Ω**TOT**) di 9,5N⋅s positivo (verso destra).

Calcolo Pf(8s): **ΩTOT = Pf – Pi** → **9,5N⋅s = Pf – 4,6kg⋅m/s** → **Pf = 14,1kg⋅m/s**.

Calcolo Vf(8s): **Vf(8s) = Pf(8s)/m** → **Vf(8s) = (14,1kg⋅m/s)/(2,3kg) = 6,13m/s**

**Segno negativo della forza**

Problema2: la spinta si inverte! Adesso supponiamo che dopo t=8s la forza continui a scendere e che si annulli al tempo t=10s. Supponiamo poi che dopo t=10s la forza inverta il suo verso, puntando verso sinistra. Il cambiamento di verso è visualizzabile nel grafico t-F in quanto dopo t=10s la forza è negativa poiché punta a sinistra e noi avevamo preso come (+) il verso a destra (Figura2). Supponiamo che la forza giunga al valore -2N per t=11s e che poi si stabilizzi a -2N fino a t=13s: il grafico t-F è indicato nella Figura2. Voglio conoscere il valore di Vf per t=13s: come faccio?

**Soluz:** Devo calcolare l’area sottesa fino a t=13s: calcolo Ω3 e Ω4. Dopo un breve calcolo risulta: Ω3 = 0,5N⋅s , Ω4 = 5N⋅s.

**Figura 2**

Sommando tutti gli impulsi, otteniamo: **ΩTOT = Ω1 + Ω2 + Ω3 - Ω4 = 5N⋅s.** Nota che ho messo il segno “-“ ad Ω4 perché dal tempo t=10s in poi la forza punta verso sinistra, cioè nel verso negativo, e perciò il suo Impulso Ω4 è anch’esso negativo. Nota anche che Ω4 appare nella parte del grafico sotto l’asse delle X (cioè: sotto l’asse del tempo t). Detto tutto questo, posso affermare:

**per il calcolo di Ω, l’area sottesa sotto l’asse X (asse delle t) deve essere considerata negativa**

Calcolo Pf(13s): **ΩTOT = Pf – Pi** → **5N⋅s = Pf – 4,6kg⋅m/s** → **Pf = 9,6kg⋅m/s**

Calcolo Vf(13s): **Vf(13s) = Pf/m** → **Vf(13s) = (9,6kg⋅m/s)/(2,3kg) = 4,17km/s**

**APPENDICE**

**Cosa vuol dire che “la dimostrazione per il calcolo di Ω si ottiene prendendo quella per ΔS e poi scambiando ΔS con Ω e V con F”?**

Riscriviamo la dimostrazione che **lo spostamento ΔS = area sottesa dal grafico t-V** che avevamo fatto al III anno e che è descritta negli appunti: “ EQUAZIONE ORARIA DI UN MOTO UNIF. ACCELERATO”. Riportiamo pari-pari le prime frasi della dimostrazione, con qualche minima variazione per rendere il concetto più comprensibile:

|  |  |
| --- | --- |
| **Dimostrazione che**  **ΔS = area sottesa dal grafico t-V** | **Sostituzione: spostamento → Impulso (Ω) Velocità → Forza** |
| “Lo **spostamento** in un moto con **velocità** variabile corrisponde all’area sottesa al grafico t**V**  *Hp)* Un corpo si muove con **velocità** variabile  *Ts)* **ΔS** ≡ Area sottesa dal grafico t-**V**  Vt-1***Dim)*** Disegniamo il grafico t-**V** del moto con **velocità** variabile: per comodità disegneremo il grafico nel caso particolare del moto con **velocità** che cambia linearmente poiché esso è una linea retta, come abbiamo già visto a lezione: in realtà il teorema che stiamo dimostrando è applicabile ad ogni tipo di **velocità**.  Calcoliamo lo **spostamento ΔS**. Suddividiamo l’intervallo fra ti e tf (cioè **Δt**) in un certo numero di intervallini, ad es. 4 (Figura 2). Per ogni intervallino segniamo la **velocità** minore (gialla) e maggiore (rossa) che il corpo possiede in quell’intervallino. | “L’**impulso** in un moto con **Forza** variabile corrisponde all’area sottesa al grafico t-**F**”  *Hp)* Un corpo si muove con **forza** variabile  *Ts)* **Impulso** ≡ Area sottesa dal grafico t-**F**  ***Dim)*** Disegniamo il grafico t-**F** del moto con **Forza** variabile: per comodità disegneremo il grafico nel caso particolare del moto con **Forza** che cambia linearmente poiché esso è una linea retta, come abbiamo già visto a lezione: in realtà il teorema che stiamo dimostrando è applicabile ad ogni tipo di **Forza**.  Calcoliamo **l’Impulso Ω.** Suddividiamo l’intervallo fra ti e tf (cioè **Δt**) in un certo numero di intervallini, ad es. 4 (Figura 2). Per ogni intervallino segniamo la **Forza** minore (gialla) e maggiore (rossa) che il corpo riceve in quell’intervallino. |

Nota che, anche se nella colonna di destra si parla di Impulso e Forze e non di Spostamento e Velocità, la dimostrazione… fila lo stesso in modo comprensibile senza nessuna contraddizione o errore! In pratica, **dal punto di vista matematico sono stati cambiati solo i nomi delle grandezze**: che io le chiami F o V, Impulso Ω o spostamento ΔS, per la matematica non fa alcuna differenza.

Poiché F e Ω sono legate fra di loro da un’equazione uguale a quella che lega ΔS e V (cioè: ΔS=V⋅Δt ; Ω=F⋅Δt), se un teorema vale per ΔS esso vale pure per Ω, anche se ΔS e Ω sono fisicamente due grandezze del tutto diverse!!! Infatti, **la matematica è astratta e delle differenze fisiche fra grandezze non sa cosa farsene**!

1. Negli appunti “QUANTITA’ DI MOTO” [↑](#footnote-ref-1)
2. Un esempio di quello che questa frase significa è mostrato in Appendice. [↑](#footnote-ref-2)