Domande

1. La massa di un oggetto è una misura quantitativa della sua inerzia ed è una proprietà intrinseca dell'oggetto, indipendentemente dal luogo in cui esso si trova. Il peso di un oggetto, invece, è la forza gravitazionale che la Terra esercita su di esso e, ovviamente, dipende dalla distanza tra l'oggetto stesso e il centro della Terra. Quindi, quando un oggetto viene spostato dal livello del mare alla cima di una montagna, la sua massa non cambia, ma il suo peso sì.

2. Il peso di un oggetto è direttamente proporzionale alla sua massa e la costante di proporzionalità è rappresentata dall'accelerazione di gravità (g) del luogo in cui l'oggetto si trova. Se l'oggetto A sulla Terra pesa il doppio dell'oggetto B, vuol dire che A ha una massa doppia di B, caratteristica che conserverà anche sulla Luna. Di conseguenza, sulla Luna l'oggetto A peserà ancora il doppio dell'oggetto B (pur se i valori dei pesi di A e B saranno diversi sulla Terra e sulla Luna, in quanto cambia il valore dell'accelerazione di gravità).

3. La velocità v di un satellite in un'orbita circolare di raggio r intorno alla Terra è $v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$ e, quindi, dipende dalla massa della Terra.

4. Sì, e, in questo caso, la costante è $4\pi^2/GM_T$, dove M_T è la massa della Terra.

5. *Sembrano* senza peso, perchè si muovono attorno alla Terra con la stessa accelerazione centripeta della navicella e la forza di gravità esercitata dalla navicella su di loro è molto piccola. In realtà il loro peso, cioè la forza di attrazione gravitazionale che la Terra esercita su di essi, è di poco minore rispetto al peso che hanno sulla Terra per via della maggiore distanza da essa.

6. Sì. L'energia potenziale gravitazionale calcolata come mgh è solo un'approssimazione locale e andrebbe calcolata sempre come $U = -GmM/r$.

Test

1. A
2. C
3. C
4. D
5. D
6. C
7. C
8. B
9. D
10. B
11. C
12. C
13. A
14. C
15. D

Problemi

1.
Per la terza legge di Keplero i valori dovrebbero essere uguali. Non lo sono a causa degli arrotondamenti.

2.
Sapendo che $\frac{a^3}{T^2} = K$, possiamo impostare la relazione

$$\frac{r_M{}^3}{T_M{}^2} = \frac{r_T{}^3}{T_T{}^2}, \text{ da cui } r_M = \sqrt[3]{\frac{r_T{}^3}{T_T{}^2} T_M{}^2} = r_T \sqrt[3]{\frac{T_M{}^2}{T_T{}^2}} = 0{,}058 \cdot 10^{12} \text{ m} = 5{,}8 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

3.

$$\frac{a^3}{T^2} = K, \text{ allora } \frac{r_V{}^3}{T_V{}^2} = \frac{r_T{}^3}{T_T{}^2},\ T_V = T_T \sqrt{\frac{r_V{}^3}{r_T{}^3}} = 365 \text{ giorni} \cdot \sqrt{0{,}723^3} = 224 \text{ giorni}$$

4.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{G(P_1/g)(P_2/g)}{r^2} =$$

$$= \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(11\,000 \text{ N}\right)\left(3400 \text{ N}\right)}{\left(9{,}80 \text{ m/s}^2\right)^2 \left(12 \text{ m}\right)^2} = 1{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

5.
Il modulo della forza è massimo quando le due bocce sono a contatto, cioè alla loro distanza minima, per cui la distanza tra i loro centri è: $r = r_{\text{bowling}} + r_{\text{biliardo}}$. Quindi:

$$F = \frac{Gm_{\text{bowling}}m_{\text{biliardo}}}{r^2} = \frac{Gm_{\text{bowling}}m_{\text{biliardo}}}{\left(r_{\text{bowling}} + r_{\text{biliardo}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(7{,}2 \text{ kg}\right)\left(0{,}38 \text{ kg}\right)}{\left(0{,}11 \text{ m} + 0{,}028 \text{ m}\right)^2} = 9{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

6.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(7{,}35 \cdot 10^{22} \text{ kg}\right)\left(40 \text{ kg}\right)}{\left(3{,}84 \cdot 10^7 \text{ m}\right)^2} = 133 \cdot 10^{-3} \text{N} = 1{,}33 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

7.

$$\Sigma F = ma \qquad \Rightarrow \qquad \left(1430 \text{ N}\right) - f = \left(5{,}90 \cdot 10^3 \text{ kg}\right)\left(0{,}220 \text{ m/s}^2\right)$$

E, risolvendo in funzione di f, otteniamo:

$$f = \left(1430 \text{ N}\right) - \left(5{,}90 \cdot 10^3 \text{ kg}\right)\left(0{,}220 \text{ m/s}^2\right) = 132\text{N}$$

8.

$$mg = \frac{GM_{\mathrm{T}}m}{r^2}$$

dove $r = 3{,}59 \cdot 10^7\ \mathrm{m} + 6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, e, quindi, l'accelerazione di gravità è

$$g = \frac{GM_{\mathrm{T}}}{r^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(3{,}59 \cdot 10^7\ \mathrm{m} + 6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m})^2} = 0{,}223\ \mathrm{m/s^2}$$

9.

Calcoliamo prima la forza che si esercita, due a due, tra i corpi indicati e assumiamo positivo il verso di destra.

$$F_{AB} = \frac{Gm_A m_B}{r^2} = \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}\right)\left(363\ \mathrm{kg}\right)\left(517\ \mathrm{kg}\right)}{\left(0{,}500\ \mathrm{m}\right)^2} = 5{,}007 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$

$$F_{BC} = \frac{Gm_B m_C}{r^2} = \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}\right)\left(517\ \mathrm{kg}\right)\left(154\ \mathrm{kg}\right)}{\left(0{,}250\ \mathrm{m}\right)^2} = 8{,}497 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$$

$$F_{AC} = \frac{Gm_A m_C}{r^2} = \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}\right)\left(363\ \mathrm{kg}\right)\left(154\ \mathrm{kg}\right)}{\left(0{,}750\ \mathrm{m}\right)^2} = 6{,}629 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

Sul corpo A si esercitano le forze F_{AB} e F_{AC}, ovvero

$$F_A = F_{AB} + F_{AC} = 5{,}007 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} + 6{,}629 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N} = 5{,}67 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}, \text{ verso destra}$$

Sul corpo B

$$F_B = F_{BC} - F_{AB} = 8{,}497 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} - 5{,}007 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} = 3{,}49 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}, \text{ verso destra}$$

Sul corpo C, invece,

$$F_C = F_{AC} + F_{BC} = 6{,}629 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N} + 8{,}497 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N} = 9{,}16 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}, \text{ verso sinistra}$$

10.

L'intensità della forza che agisce sul satellite è uguale a quella che agisce sulla Terra, e vale:

$$F = \frac{Gm_{\text{satellite}} m_{\text{Terra}}}{r^2} = \frac{\left(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}\right)\left(425\ \mathrm{kg}\right)\left(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}{\left[2\left(6{,}38 \cdot 10^6\ \mathrm{m}\right)\right]^2} = 1{,}04 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$$

L'accelerazione del satellite e della Terra valgono, rispettivamente:

$$a_{\text{satellite}} = \frac{F}{m_{\text{satellite}}} = \frac{1{,}04 \cdot 10^3\ \mathrm{N}}{425\ \mathrm{kg}} = 2{,}45\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_{\text{Terra}} = \frac{F}{m_{\text{Terra}}} = \frac{1{,}04 \cdot 10^{3}\ \text{N}}{5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}} = 1{,}74 \cdot 10^{-22}\ \text{m/s}^2$$

11.

$$F_{\text{T-a}} = G\frac{m_{\text{T}}m_{\text{a}}}{r_{\text{T}}^2}$$

$$F_{\text{p-a}} = G\frac{m_{\text{p}}m_{\text{pa}}}{r_{\text{p}}^2}$$

Dividendo membro a membro, otteniamo:

$$\frac{F_{\text{p-a}}}{F_{\text{T-a}}} = \frac{G\frac{m_{\text{p}}m_{\text{a}}}{r_{\text{p}}^2}}{G\frac{m_{\text{T}}m_{\text{a}}}{r_{\text{T}}^2}} = \left(\frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{T}}}\right)\left(\frac{r_{\text{T}}}{r_{\text{p}}}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad F_{\text{p-a}} = F_{\text{T-a}}\left(\frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{T}}}\right)\left(\frac{r_{\text{T}}}{r_{\text{p}}}\right)^2$$

Sapendo che $\frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{T}}} = 2$ e $\frac{r_{\text{T}}}{r_{\text{p}}} = \frac{1}{3}$, otteniamo:

$$F_{\text{p-a}} = (540\ \text{N})(2)\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 120\ \text{N}$$

12.

$$g = \frac{GM_{\text{M}}}{R_{\text{M}}^2}$$

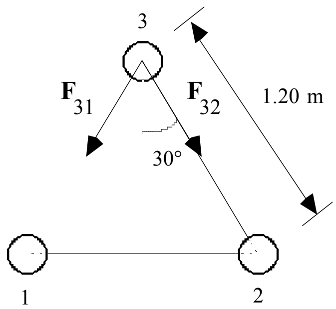
Da cui

$$g = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(6{,}46 \cdot 10^{23}\ \text{kg})}{(3{,}39 \cdot 10^{6}\ \text{m})^2} = 3{,}75\ \text{m/s}^2$$

E, quindi,

$P = mg = (65\ \text{kg})(3{,}75\ \text{m/s}^2) = 2{,}4 \cdot 10^2\ \text{N}$

13.



Sulla sfera 3 agisce la risultante delle forze esercitate dalle sfere 1 e 2, la cui intensità è:
$F = \frac{GMm_3}{r^2}$.
Osservando il disegno, si comprende che la somma delle componenti orizzontali è nulla, mentre quella delle componenti verticali vale:

$F_3 = 2F\cos\theta = 2\frac{GMm_3}{r^2}\cos\theta$ e, di conseguenza, l'accelerazione della terza sfera è:

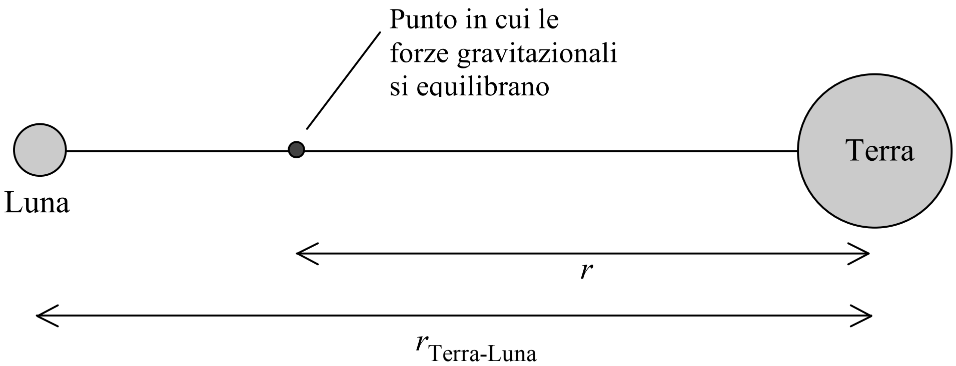
$$a_3 = \frac{F_3}{m_3} = 2\frac{GM}{r^2}\cos\theta = 2\frac{(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(2{,}80\ \mathrm{kg})}{(1{,}20\ \mathrm{m})^2}\cos 30{,}0° = 2{,}25\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m/s^2}$$

14.
Indichiamo con M la massa della mongolfiera e dell'equipaggio e con m la massa della zavorra.
Quando il sistema è in equilibrio, per la seconda legge di Newton, avremo:
$F_\mathrm{g} - Mg = 0$, dove F_g rappresenta la forza di galleggiamento.
Quando la zavorra viene buttata fuori dalla mongolfiera, avremo, invece
$F_\mathrm{g} - (M-m)g = (M-m)a$, dove $F_\mathrm{g} = Mg$, e quindi

$Mg - (M-m)g = mg = (M-m)a$ e infine

$$m = \frac{Ma}{g+a} = \frac{(310\ \mathrm{kg})(0{,}15\ \mathrm{m/s^2})}{9{,}80\ \mathrm{m/s^2} + 0{,}15\ \mathrm{m/s^2}} = 4{,}7\ \mathrm{kg}$$

15.



$F_\mathrm{T} = G\frac{m_\mathrm{T}m_\mathrm{a}}{r^2}$ $F_\mathrm{L} = G\frac{m_\mathrm{L}m_\mathrm{a}}{(r_\mathrm{T\text{-}L} - r)^2}$

Uguagliando le due forze, otteniamo:

$$\cancel{G}\frac{m_\mathrm{T}\cancel{m_\mathrm{a}}}{r^2} = \cancel{G}\frac{m_\mathrm{L}\cancel{m_\mathrm{a}}}{(r_\mathrm{T\text{-}L} - r)^2}$$

Da cui, risolvendo in funzione di r:

$$r = \frac{\left(r_{\text{T-L}}\right)\sqrt{\dfrac{m_{\text{T}}}{m_{\text{L}}}}}{1+\sqrt{\dfrac{m_{\text{T}}}{m_{\text{L}}}}} = \frac{\left(3{,}85\cdot 10^{8}\ \text{m}\right)\sqrt{81{,}4}}{1+\sqrt{81{,}4}} = 3{,}47\cdot 10^{8}\ \text{m}$$

16.

$$\frac{F_{\text{S}}}{F_{\text{L}}} = \frac{\dfrac{GM_{\text{S}}m}{r_{\text{S-T}}^{2}}}{\dfrac{GM_{\text{L}}m}{r_{\text{L-T}}^{2}}} = \left(\frac{M_{\text{S}}}{M_{\text{L}}}\right)\left(\frac{r_{\text{L-T}}}{r_{\text{S-T}}}\right)^{2} =$$

$$= \left(\frac{1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}}{7{,}35\cdot 10^{22}\ \text{kg}}\right)\left(\frac{3{,}85\cdot 10^{8}\ \text{m}}{1{,}50\cdot 10^{11}\ \text{m}}\right)^{2} = 178$$

È maggiore la forza esercitata dal Sole.

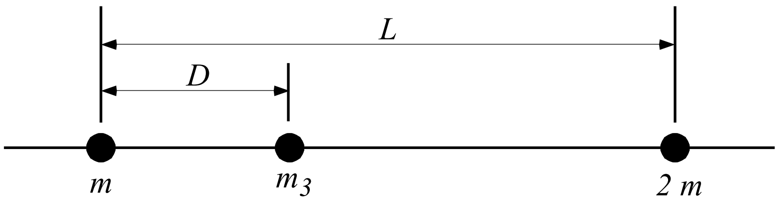
17.
The acceleration due to gravity at the surface of the neutron star is

$$a = \frac{Gm}{r^{2}} = \frac{(6.67\cdot 10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^{2}/\text{kg}^{2})(2.0\cdot 10^{30}\text{kg})}{(5.0\cdot 10^{3}\text{m})^{2}} = 5.3\cdot 10^{12}\ \text{m/s}^{2}$$

Since the gravitational force is assumed to be constant, the acceleration will be constant and the speed of the object can be calculated from $v^{2} = v_{0}^{2} + 2ay$, with $v_{0} = 0$ m/s since the object falls from rest. Solving for v yields

$$v = \sqrt{2ay} = \sqrt{2\left(5.3\cdot 10^{12}\ \text{m/s}^{2}\right)\left(0.010\ \text{m}\right)} = 3.3\cdot 10^{5}\ \text{m/s}$$

18.



Prima che venga inserita la terza particella, la forza che agisce tra le due particelle è: $F_{\text{prima}} = Gm2m/L^{2}$. Dopo l'inserimento della terza particella, entrambe le particelle risentono di una forza maggiore, perché anche la terza particella agisce su di esse. In particolare, per la particella di massa m, avremo

$$\frac{F_{\text{dopo}}}{F_{\text{prima}}} = \frac{\dfrac{Gmm_{3}}{D^{2}} + \dfrac{Gm2m}{L^{2}}}{\dfrac{Gm2m}{L^{2}}} = \frac{L^{2}m_{3}}{2mD^{2}} + 1$$

E per la particella di massa $2m$,

$$\frac{F_{\text{dopo}}}{F_{\text{prima}}}=\frac{\frac{G2mm_3}{(L-D)^2}+\frac{Gm2m}{L^2}}{\frac{Gm2m}{L^2}}=\frac{L^2m_3}{m(L-D)^2}+1$$

Dato che $F_{\text{dopo}}/F_{\text{prima}} = 2$ per entrambe le particelle, ricaviamo

$$\frac{L^2m_3}{2mD^2}+1=\frac{L^2m_3}{m(L-D)^2}+1 \quad\Rightarrow\quad 2D^2=(L-D)^2 \ \Rightarrow D^2+2LD-L^2=0$$

E quindi:

$$D=\frac{-2L\pm\sqrt{(2L)^2-4(1)(-L^2)}}{2(1)}= 0,414L \quad \text{o} \quad -2,414L$$

La soluzione negativa va scartata perché la terza particella si trova *tra* le prime due.

19.
La velocità orbitale di un satellite intorno a un pianeta è: $v=\sqrt{GM_{\text{P}}/r}$
Quindi, il rapporto tra le due velocità è

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\sqrt{GM_{\text{P}}/r_2}}{\sqrt{GM_{\text{P}}/r_1}}=\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

Che, risolta in funzione di v_2, dà

$$v_2=v_1\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}=\left(1,70\cdot10^4\ \text{m/s}\right)\sqrt{\frac{5,25\cdot10^6\ \text{m}}{8,60\cdot10^6\ \text{m}}}=1,33\cdot10^4\ \text{m/s}$$

20.
$v^2 = GM_G/r$, dove $r = 6,00\cdot10^5\ \text{m} + 7,14\cdot10^7\ \text{m} = 7,20\cdot10^7\ \text{m}$
Quindi,

$$v=\sqrt{\frac{\left(6,67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(1,90\cdot10^{27}\text{kg}\right)}{7,20\cdot10^7\text{m}}}=4,20\cdot10^4\ \text{m/s}$$

21.
The orbital speed is

$$v=\frac{2\pi r}{T} \qquad (1)$$

To find a value for the radius, we begin with:

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_E}} \quad \text{or} \quad r^{3/2} = \frac{T\sqrt{GM_E}}{2\pi}$$

Next, we square both sides of the result for $r^{3/2}$:

$$\left(r^{3/2}\right)^2 = \left(\frac{T\sqrt{GM_E}}{2\pi}\right)^2 \quad \text{or} \quad r^3 = \frac{T^2 GM_E}{4\pi^2}$$

We can now take the cube root of both sides of the expression for r^3 in order to determine r:

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_E}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(1.20\cdot10^4\ \text{s}\right)^2\left(6.67\cdot10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(5.98\cdot10^{24}\ \text{kg}\right)}{4\pi^2}} = 1.13\cdot10^7\ \text{m}$$

With this value for the radius, we can use Equation (1) to obtain the speed:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\left(1.13\cdot10^7\ \text{m}\right)}{1.20\cdot10^4\ \text{s}} = 5.92\cdot10^3\ \text{m/s}$$

22.

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM_E}} \qquad \text{da cui} \quad \frac{T_A}{T_B} = \frac{\dfrac{2\pi r_A^{3/2}}{\sqrt{GM_E}}}{\dfrac{2\pi r_B^{3/2}}{\sqrt{GM_E}}} = \frac{r_A^{3/2}}{r_B^{3/2}}$$

Sappiamo che $r = vT/2\pi$ e, quindi, sostituendo nell'equazione (1) avremo:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{r_A^{3/2}}{r_B^{3/2}} = \frac{\left[v_A T_A/(2\pi)\right]^{3/2}}{\left[v_B T_B/(2\pi)\right]^{3/2}} = \frac{\left(v_A T_A\right)^{3/2}}{\left(v_B T_B\right)^{3/2}}$$

E, infine:

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{v_B^3}{v_A^3} = \frac{v_B^3}{\left(3v_B\right)^3} = \frac{1}{27}$$

23.

$(T_V/T_T)^2 = (r_V/r_T)^3$ da cui $T_V/T_E = 0{,}611$

E, infine:

$T_V = (0{,}611)(365\text{ giorni}) = 223\text{ giorni}$

24.

$$M_{pianeta} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2\left[\left(4{,}15\cdot 10^6\ \text{m}\right)+\left(4{,}1\cdot 10^5\ \text{m}\right)\right]^3}{\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}\right)\left(7{,}20\cdot 10^3\ \text{s}\right)^2} = 1{,}08\cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

dove r è il raggio dell'orbita circolare *relativamente al centro del pianeta* e T il periodo del satellite $T = 2{,}00\text{h} = 7{,}20 \times 10^3$ s

Ricaviamo ora il peso del satellite:

$$P = \frac{GM_p m}{r^2} = \frac{\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}\right)\left(1{,}08\cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)\left(5850\ \text{kg}\right)}{\left(4{,}15\cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = 2{,}45\cdot 10^4\ \text{N}$$

25.
L'accelerazione centripeta è uguale per l'aereo e per il satellite, quindi:

$$a_c = \frac{v_{aereo}^2}{r_{aereo}} = \frac{v_{sat}^2}{r_{sat}} \Rightarrow v_{aereo} = \left(\sqrt{\frac{r_{aereo}}{r_{sat}}}\right) v_{sat}$$

dove $v_{sat} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r_{sat}}}$

Quindi:

$$v_{aereo} = \left(\sqrt{\frac{r_{aereo}}{r_{sat}}}\right)\sqrt{\frac{Gm_T}{r_{sat}}} = \frac{\sqrt{r_{aereo}Gm_T}}{r_{sat}} = \frac{\sqrt{\left(15\ \text{m}\right)\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}\right)\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)}}{6{,}7\cdot 10^6\ \text{m}} = 12\ \text{m/s}$$

26.
$a_A = v_A^2/r_A = 10{,}0\ \text{m/s}^2$
dove $v_A = 2\pi r_A/T$ e il periodo T è di 60,0 s. Quindi
$r_A = a_A T^2/(4\pi^2) = 912$ m e, di conseguenza, $r_B = r_A/4{,}00 = 228$ m

$$a_B = \frac{v_B^2}{r_B} = \frac{4\pi^2 r_B}{T^2} = \frac{4\pi^2\left(228\ \text{m}\right)}{\left(60{,}0\ \text{s}\right)^2} = 2{,}50\ \text{m/s}^2$$

27.

$$U = -G\frac{M_T M_L}{r_{TL}} = -\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\frac{\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)\left(7{,}35\cdot 10^{22}\ \text{kg}\right)}{3{,}84\cdot 10^8\ \text{m}} = -7{,}63\cdot 10^{28}\ \text{J}$$

28.

$$U = -G\frac{M_T M_L}{r_{TL}} = -\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\frac{\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)\left(20\ \text{kg}\right)}{6{,}37\cdot 10^6\ \text{m}} = -1{,}25\cdot 10^9\ \text{J}$$

29.

$$L = mg\Delta h = \left(20{,}0\ \text{kg}\right)\left(9{,}80\ \text{m/s}^2\right)\left(40{,}0\ \text{m}\right) = 7{,}84\cdot 10^3\ \text{J}$$

$U = mgh$

30.

$$U = -G\frac{M_T m}{r_T + h} = -\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\frac{\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)\left(1{,}1\cdot 10^{3}\ \mathrm{kg}\right)}{(6{,}37\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}) + \left(0{,}50\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}\right)} = -6{,}4\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

31.

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{M_T m}{r} \Rightarrow r = 2G\frac{M_T}{v^2} = 2\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\frac{\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}{\left(6{,}4\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}\right)^2} = 1{,}95\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}$$

32.
Per essere su un’orbita geostazionaria, il satellite deve avere un periodo di 24 ore e ciò avviene solo se si trova a una distanza di 35 800 km sopra l’equatore.

$$U = -G\frac{M_T m}{r_T + h} = -\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\frac{\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)\left(1{,}5\cdot 10^{3}\ \mathrm{kg}\right)}{(6{,}37\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}) + \left(35{,}8\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}\right)} = -1{,}42\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

$E = U + K$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\left(R_T + h\right)}{T} = \frac{6{,}28\left(42{,}17\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}\right)}{24\left(3600\ \mathrm{s}\right)} = 3{,}1\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s} \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}5\left(1{,}5\cdot 10^{3}\ \mathrm{kg}\right)\left(3{,}1\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}\right)^2 = 7{,}2\cdot 10^{9}\,\mathrm{J} = 0{,}72\cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$$

$$E = U + K = -1{,}42\cdot 10^{10}\ \mathrm{J} + 0{,}72\cdot 10^{10}\ \mathrm{J} = -0{,}70\cdot 10^{10}\ \mathrm{J} = -7{,}0\cdot 10^{9}\ \mathrm{J}$$

33.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\left[\frac{1}{45}\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)\right]}{5{,}1\cdot 10^{6}\mathrm{m}}} = 1{,}9\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

34.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\text{, allora } M = \frac{v^2 R}{2G} = \frac{(21{,}2\cdot 10^{3})^2\ \frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}\cdot 2{,}56\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}}{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}} = 8{,}62\cdot 10^{25}\ \mathrm{kg}$$

35.
Il valore di R richiesto è quello per il quale, dato un corpo celeste di massa M, si ha la velocità di fuga uguale a quella della luce:

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\left(2\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\right)}{\left(3\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)^2} = 3\cdot 10^{3}\ \mathrm{m}$$

36.
L’accelerazione di gravità su Saturno è

$$g_S = G\frac{M_S}{r_S^2} = \left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/\,kg^2}\right)\frac{\left(5{,}67\cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}\right)}{(6{,}00\cdot 10^{7}\ \mathrm{m})^2} = 10{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

Il rapporto tra il peso di una persona su Saturno e sulla Terra è

$$\frac{P_S}{P_T} = \frac{mg_S}{mg_T} = \frac{g_S}{g_T} = \frac{10{,}5\ \mathrm{m/s^2}}{9{,}80\ \mathrm{m/s^2}} = 1{,}07$$

37.

$$\frac{a^3}{T^2} = K \quad \rightarrow \quad \frac{a_S{}^3}{T_S{}^2} = \frac{a_M{}^3}{T_M{}^2}$$

$$T_M{}^2 = \left(\frac{a_M{}^3}{a_S{}^3}\right)T_S{}^2 \Rightarrow T_M = \left(8{,}9\cdot 10^{8}\ \mathrm{s}\right)\sqrt{\frac{\left(2{,}3\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}\right)^3}{\left(1{,}4\cdot 10^{12}\ \mathrm{m}\right)^3}} = 5{,}9\cdot 10^{7}\ \mathrm{s}$$

38.

$$P_A - P_B = \frac{GM_A m}{R^2} - \frac{GM_B m}{R^2} = \frac{Gm}{R^2}\left(M_A - M_B\right)$$

da cui

$$M_A - M_B = \frac{\left(P_A - P_B\right)R^2}{Gm} = \frac{\left(3620\ \mathrm{N}\right)\left(1{,}33\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}\right)^2}{(6{,}67\cdot 10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/\,kg^2})\left(5450\ \mathrm{kg}\right)} = 1{,}76\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

39.

$$r_p = \sqrt{\frac{GMT}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\mathrm{N\cdot m^2/\,kg^2}\right)\left(1{,}33\cdot 2{,}0\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\right)\left(26{,}7\cdot 24\cdot 3600\ \mathrm{s}\right)^2}{4\left(3{,}14\right)^2}} = 2{,}88\cdot 10^{10}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{r_p}{r_T} = \frac{2{,}88\cdot 10^{10}\ \mathrm{m}}{1{,}50\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}} = 0{,}192$$

40.

$$E_i = 0; E_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r_T} = 0 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/\,kg^2}\right)\left(5{,}98\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}{6{,}38\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}} = 11{,}2\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s} = 11{,}2\ \mathrm{km/s}$$

41.

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/\,kg^2}\right)\left(6{,}0\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}{7{,}0\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}} = 7{,}6\cdot 10^{3}\ \mathrm{m/s}$$

42.
L'accelerazione è costante in entrambe le situazioni, quindi

$$\frac{y_{\mathrm{G}}}{y_{\mathrm{T}}}=\frac{\frac{1}{2}a_{\mathrm{G}}t_{\mathrm{G}}^{2}}{\frac{1}{2}a_{\mathrm{T}}t_{\mathrm{T}}^{2}}$$

Risolvendo in funzione del rapporto tra i tempi di caduta, otteniamo

$$\frac{t_{\mathrm{G}}}{t_{\mathrm{T}}}=\sqrt{\frac{a_{\mathrm{T}}}{a_{\mathrm{G}}}}=\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{T}}/R_{\mathrm{T}}^{2}}{GM_{\mathrm{G}}/R_{\mathrm{G}}^{2}}}=\frac{R_{\mathrm{G}}}{R_{\mathrm{T}}}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{T}}}{M_{\mathrm{G}}}}=\left(11,2\right)\sqrt{\frac{1}{318}}=0,628$$

43.
Sulla Luna agisce una forza risultante

$$F=\sqrt{F_{\mathrm{SL}}^{2}+F_{\mathrm{TL}}^{2}}$$

dove (tralasciando le unità di misura)

$$F_{\mathrm{SL}}=\frac{Gm_{\mathrm{S}}m_{\mathrm{L}}}{r_{\mathrm{SL}}^{2}}=\frac{\left(6,67\cdot10^{-11}\right)\left(1,99\cdot10^{30}\right)\left(7,35\cdot10^{22}\right)}{\left(1,50\cdot10^{11}\right)^{2}}=4,34\cdot10^{20}\ \mathrm{N}$$

e

$$F_{\mathrm{TL}}=\frac{Gm_{\mathrm{T}}m_{\mathrm{L}}}{r_{\mathrm{TL}}^{2}}=\frac{\left(6,67\cdot10^{-11}\right)\left(5,98\cdot10^{24}\right)\left(7,35\cdot10^{22}\right)}{\left(3,85\cdot10^{8}\right)^{2}}=1,98\cdot10^{20}\ \mathrm{N}$$

e quindi

$$F=\sqrt{\left(4,34\cdot10^{20}\ \mathrm{N}\right)^{2}+\left(1,98\cdot10^{20}\ \mathrm{N}\right)^{2}}=4,77\cdot10^{20}\ \mathrm{N}$$

44.

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^{2}r^{3}}{GM_{\mathrm{T}}}}=\sqrt{\frac{4\pi^{2}\left(3,85\cdot10^{8}\ \mathrm{m}\right)^{3}}{\left(6,67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^{2}/kg^{2}}\right)\left(5,98\cdot10^{24}\ \mathrm{kg}\right)}}=$$

$$=2,38\cdot10^{6}\ \mathrm{s}=27,5\ \text{giorni}$$

circa 1 mese.

45.

$$r_i = \frac{v_i^2}{a_{c,i}} = \frac{\left(2\pi r_i / T\right)^2}{a_{c,i}} = \frac{a_{c,i}T^2}{4\pi^2};$$

$$r_e = \frac{a_{c,e}T^2}{4\pi^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r_e}{a_{c,e}};$$

$$r_i = \frac{a_{c,i} r_e}{a_{c,e}} = \frac{\left(3{,}72\ \text{m/s}^2\right)\left(2150\ \text{m}\right)}{9{,}80\ \text{m/s}^2} = 816\ \text{m}$$

46.

$$\frac{a^3}{T^2} = K \quad \rightarrow \quad \frac{a_H{}^3}{T_H{}^2} = \frac{a_T{}^3}{T_T{}^2},\ a_H{}^3 = (\frac{a_T{}^3}{T_T{}^2})T_H{}^2 \qquad \text{ovvero}$$

$$a_H = a_T\left(\sqrt[3]{\frac{T_H{}^2}{T_T{}^2}}\right) = (0{,}1496\cdot 10^{12}\ \text{m})\left(\sqrt[3]{\frac{(75{,}8\ \text{a})^2}{(1\ \text{a})^2}}\right) \quad = \quad 2{,}68\cdot 10^{12}\ \text{m} = 17{,}9\ \text{UA}$$

$$r_A + r_P = 2a_H \quad \rightarrow \quad r_A = 2a_H - r_p = (35{,}8 - 0{,}6)\ \text{UA} = 35{,}2\ \text{UA};$$

$$L_P = L_A \rightarrow M_H r_A v_A = M_H r_P v_P \quad \rightarrow \quad r_A v_A = r_P v_P,$$

$$v_A = \left(\frac{r_P}{r_A}\right)v_P = \left(\frac{0{,}596\ \text{UA}}{35{,}2\ \text{UA}}\right)54500\ \text{m/s} = 923\ \text{m/s}$$

47.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(6{,}5\cdot 10^{19}\ \text{kg}\right)}{2{,}5\cdot 10^5\ \text{m}}} = 1{,}9\cdot 10^2\ \text{m/s}$$

Olimpiadi della fisica

1. B
2. B
3. A
4. C
5. D
6. C
7. D
8. Sia F la forza che il pavimento dell'ascensore esercita sui piedi di Carlo. Nel caso generico in cui l'ascensore abbia accelerazione a (assunta positiva verso il basso) il moto di Carlo e l'equilibrio della massa m appesa alla molla di costante elastica k sono descritti dalle equazioni $Mg - F = Ma$ e $mg - k\Delta l = ma$. Eliminando a si trova una relazione tra F e Δl:

$$a = g - \frac{F}{M} = g - \frac{k\Delta l}{m} \Rightarrow F = \frac{kM}{m}\Delta l\ .$$

Detti F_0 e Δl_0 i valori particolari quando $a = 0$ (ascensore fermo o in moto uniforme) si ha

$$F = \frac{\Delta l}{\Delta l_0}F_0 = \frac{4}{5}Mg = \frac{4}{5}60\text{kg}\times 9{,}8\text{ms}^{-2} = 470\text{N}$$

Test di ammissione all'Università

1. A
2. B
3. B

Prove d'esame all'Università

1.

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{R} \Rightarrow \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{1}{2} v_0^2 + \frac{GM}{R} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2\frac{GM}{R}}$$

(dove *M* è la massa della Luna e *R* è il raggio della Luna)