# Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

**PIANO NAZIONALE INFORMATICA**

**Tema di**: MATEMATICA

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.***

PROBLEMA 1

Sia $\gamma$ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove $k$ e $\lambda$ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni $\gamma$;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su $\gamma$;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a $k$ affinché l'area compresa tra $\gamma$ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di $k$ e $\lambda$ sopra attribuiti, $\gamma$ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* ( da *Karl Friedrich Gauss, 1777-1855*). Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

## *Soluzione*

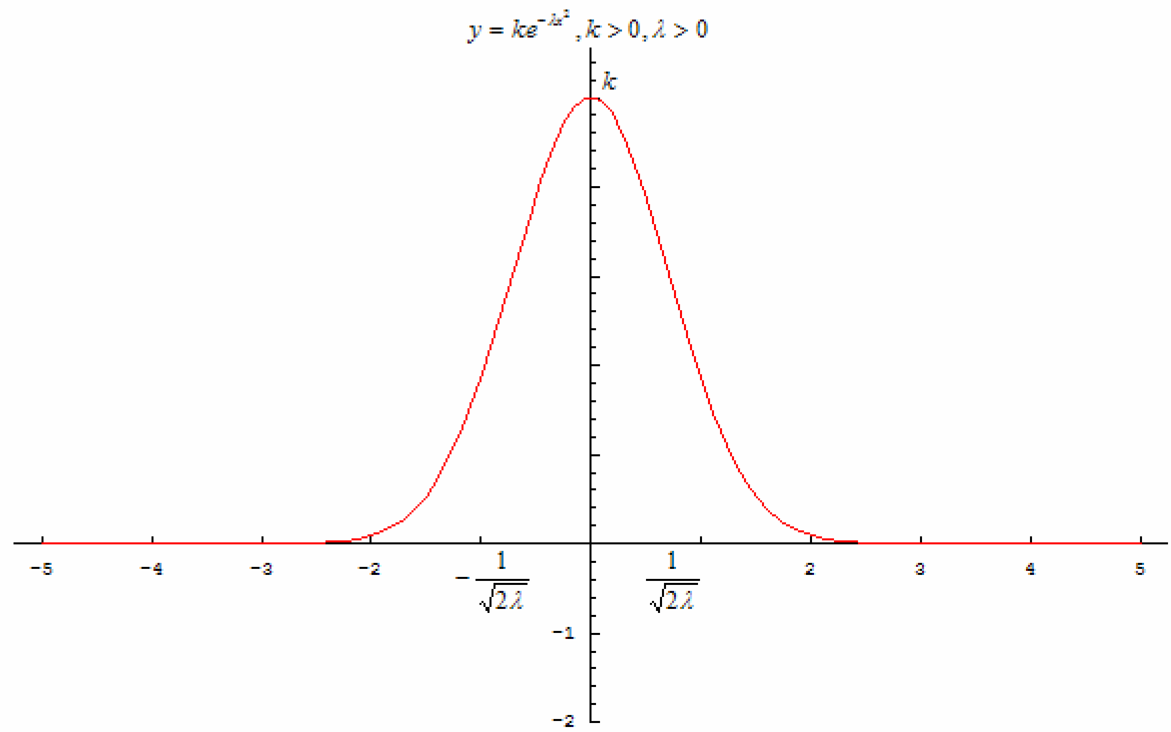
***1)***

Studiamo la funzione $y = ke^{-\lambda x^2}, k > 0, \lambda > 0$

- Dominio: la funzione è definita in tutto R;
- Intersezione asse delle ascisse: non esistono intersezioni con l'asse delle ascisse;
- Intersezione con l'asse delle ordinate: $x = 0 \to y = k$;
- Parità o disparità: $f(-x) = ke^{-\lambda(-x)^2} = ke^{-\lambda x^2} = f(x)$ per cui la funzione è pari;
- Positività: essendo per ipotesi $k > 0$ allora $y = ke^{-\lambda x^2} > 0 \ \forall x \in R$;
- Asintoti verticali: non ce ne sono visto il dominio;
- Asintoti orizzontali: $\lim_{x \to \pm\infty}\left(ke^{-\lambda x^2}\right) = ke^{(-\infty)} = 0$ per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale destro e sinistro;
- Asintoti obliqui: non ce ne sono visto che $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(ke^{-\lambda x^2}\right)}{x} = 0$;

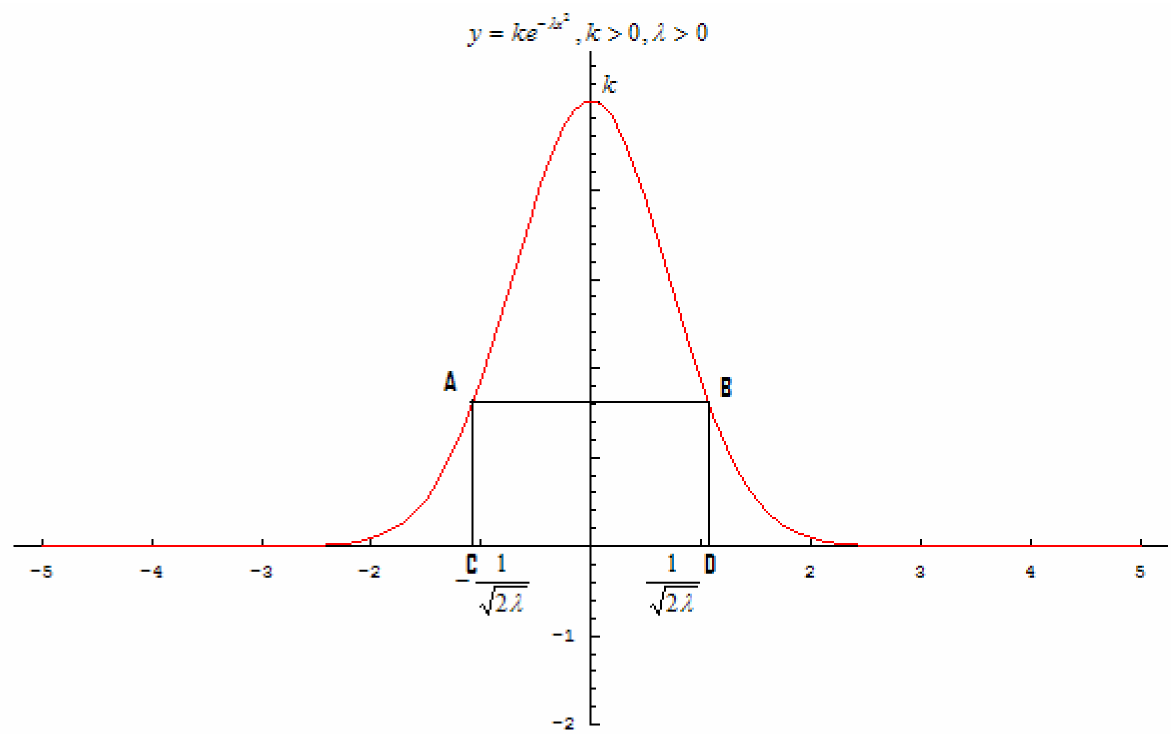
- Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $y' = -2k\lambda x e^{-\lambda x^2}$ ed essendo $k > 0, \lambda > 0$ si ha $y' \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ per cui la funzione è crescente in $(-\infty, 0]$ e decrescente altrimenti; la derivata seconda è $y'' = 2k\lambda e^{-\lambda x^2}[2\lambda x^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow [2\lambda x^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ per cui i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, ke^{-\frac{1}{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, ke^{-\frac{1}{2}}\right)$ sono due flessi; inoltre $y''(0) = -2k\lambda < 0$ per cui $(0, k)$ è un massimo relativo ed assoluto.

Il grafico è sotto presentato:




*2)*

Si consideri la figura sottostante:




Vista la simmetria della funzione (ricordiamo che è pari) allora anche i vertici del rettangolo saranno simmetrici rispetto all'asse delle ordinate, per cui indicata con $x = h, h > 0$ l'ascissa generica del punto D, i vertici del rettangolo saranno:

$$
\begin{aligned}
&A = \left(-h, ke^{-\lambda h^2}\right)\\
&B = \left(h, ke^{-\lambda h^2}\right)\\
&C = (-h,0)\\
&D = (h,0)
\end{aligned}
$$

Quindi il rettangolo avrà area:

$$A(h) = DB * BA = ke^{-\lambda h^2}(2h) = 2hke^{-\lambda h^2}, h > 0, k > 0, \lambda > 0$$

Calcoliamo le derivate della funzione $A(h) = 2hke^{-\lambda h^2}$ :

$$
\begin{aligned}
&A'(h) = 2ke^{-\lambda h^2}\left(1-2\lambda h^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < h \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\\
&A''(h) = -4hk\lambda e^{-\lambda h^2}\left(1-2\lambda h^2\right) + 2ke^{-\lambda h^2}(-4\lambda h) = -4hk\lambda e^{-\lambda h^2}\left(1-2\lambda h^2+2\right) = 4\lambda hke^{-\lambda h^2}\left(2\lambda h^2-3\right)\\
&A''\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right) = \frac{-8\lambda k}{\sqrt{2\lambda}}e^{-\frac{1}{2}} = -4k\sqrt{\frac{2\lambda}{e}} < 0
\end{aligned}
$$

per cui l'area massima la si ha per $h = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e quindi in corrispondenza dell'ascissa di flesso.

***3)***

Consideriamo l'integrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Esso può essere riscritto in questo modo:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}} dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

ed effettuando la sostituzione $t = \frac{x}{\sqrt{2}} \to dx = \sqrt{2}dt$ esso viene scritto come:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}} dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \overset{t=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} k\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t)^2} dt$$

ed essendo per ipotesi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ si ha:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}} dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \overset{t=\frac{x}{\sqrt{2}}}{=} k\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t)^2} dt = k\sqrt{2} * \sqrt{\pi} = k\sqrt{2\pi}$$

Ora l'integrale $I$ non è altro che l'area sottesa dalla curva iniziale per cui tale area è unitaria se e solo se $I = k\sqrt{2\pi} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

In tal modo la funzione di partenza diventa $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ e questa non è altro che la curva degli errori di Gauss, quella che in probabilità e statistica va sotto il nome di distribuzione gaussiana standard con media nulla e varianza unitaria.

***4)***

In generale una densità di probabilità gaussiana con media $\mu \neq 0$ e varianza $\sigma^2 \neq 1$ (od equivalentemente deviazione standard $\sigma \neq 1$) è così espressa:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

In particolare il passaggio da una variabile aleatoria gaussiana non standard $X = N(\mu, \sigma^2)$ ad una standard $Y = N(0,1)$ avviene tramite la trasformazione lineare $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$, per cui una trasformazione lineare trasforma una gaussiana in una gaussiana. Infatti indicando con $E[\bullet]$ la media statistica, ricordando la proprietà di additività della media e che la media di una costante coincide con la costante stessa, si ricava la media statistica della variabile aleatoria $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$:

$$E[Y] = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}\left(E[X] - E[\mu]\right) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

Inoltre ricordando che in una trasformazione lineare, il cambiamento di scala influisce col suo quadrato sulla varianza mentre una traslazione non influisce sulla varianza, si ricava la varianza della variabile aleatoria $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$:

$$\sigma_Y^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma_X^2\right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

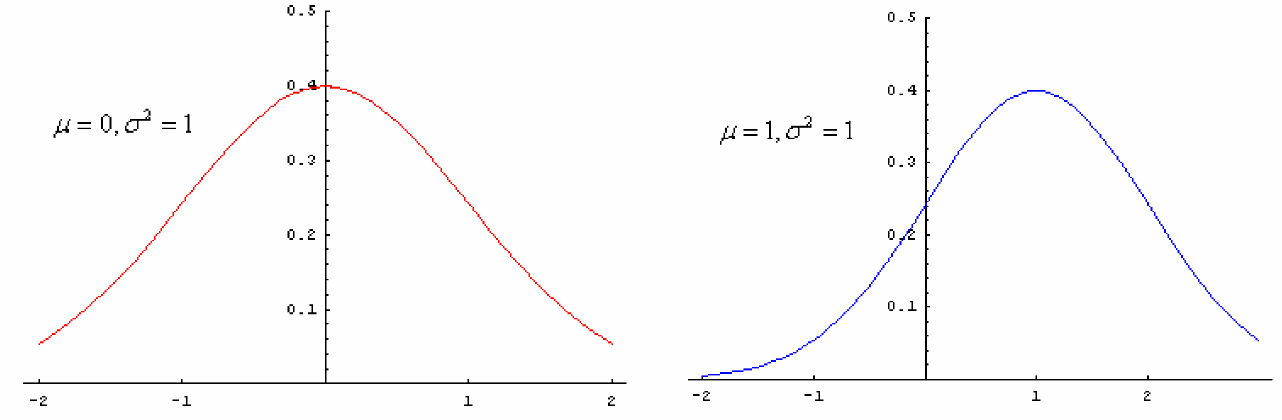
Le proprietà della funzione $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ sono le seguenti:

1. Il massimo lo si ha per $x = \mu$ e vale $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
2. La retta $x = \mu$ è l'asse di simmetria della curva ed il valore $\mu$ è la media coincidente con la moda e la mediana ;
3. E'crescente per $x < \mu$ e decrescente per $x > \mu$;
4. E'asintotica all'asse delle ascisse da ambo i lati;
5. Presenta flessi in $x = \mu \pm \sigma$ ;
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$ essendo una densità di probabilità.

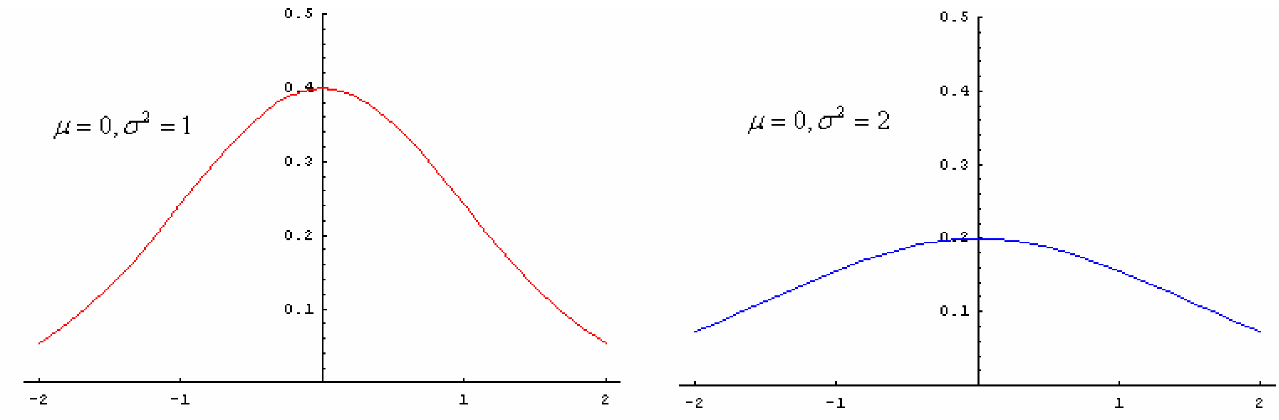
Una tale funzione, visto il suo vastissimo uso è tabellata numericamente. In particolare esistono tabelle che $\forall x \in R$ contengono i valori dell'integrale $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$. Questo integrale non è altro che la probabilità che una variabile aleatoria gaussiana $X = N(\mu, \sigma^2)$ assuma valori maggiori di *x*, cioè $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \Pr(X > x)$.

Una tale densità di probabilità presenta come parametri caratteristici la media $\mu$, la varianza $\sigma^2$ e la deviazione standard $\sigma$ definita come la radice quadrata della varianza. Discutiamo ora il significato della media $\mu$ e della varianza al variare dell'una e fissata l'altra.

- Fissata la varianza $\sigma^2$, al variare della media $\mu$ la forma della campana non muta, ma trasla lungo l'asse delle ascisse. Infatti $x = \mu$, come già evidenziato, è asse di simmetria per la densità ed in corrispondenza di $x = \mu$ la densità assume valore massimo pari a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.




- Fissata la media $\mu$, al variare della varianza $\sigma^2$, la densità cambia forma. Infatti al decrescere della varianza $\sigma^2$ ( e quindi di $\sigma$) la campana di Gauss si restringe sempre più ed il massimo raggiunto per $x = \mu$ aumenta (visto che l'area sottesa deve essere sempre unitaria), e la campana tende a diventare una delta di Dirac centrata in $x = \mu$ quando $\sigma^2 \to 0$. Viceversa al crescere di $\sigma^2$ (e quindi di $\sigma$) la campana si allarga sempre più, il suo massimo diminuisce, e la curva si abbassa, ed al limite quando $\sigma^2 \to \infty$ la curva tende a coincidere con l'asse delle ascisse. Questo ci fa pensare che la deviazione standard e la varianza siano degli indici di come si distribuiscono i valori intorno alla media.




In conclusione la media $\mu$ non influisce sulla forma della densità di probabilità, mentre la varianza $\sigma^2$ fa cambiare il diagramma, facendo alzare il massimo e restringere le code, oppure abbassare il massimo ed allargare le code al suo variare.

PROBLEMA 2

Sia $f$ la funzione così definita:

$$f(x) = sen\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{2b}x + x$$

con $a$ e $b$ numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti $a$ e $b$, esiste sempre un valore di x tale che $f(x) = \frac{a+b}{2}$
2. Si consideri la funzione $g$ ottenuta dalla $f$ ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

## *Soluzione*

***1)***

La funzione $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) + x$ è una funzione $\forall a,b \neq 0$ continua in tutto R per cui anche in un intervallo chiuso e limitato [a,b]; per il teorema dei valori intermedi allora la funzione assumerà almeno una volta un valore compreso nell'intervallo $[f(a), f(b)]$. Ora essendo $f(a) = a,\ f(b) = b$ si ha $f(x) = \frac{a+b}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ che è il valore medio dell'intervallo $[f(a), f(b)]$, ed è perciò incluso in esso.

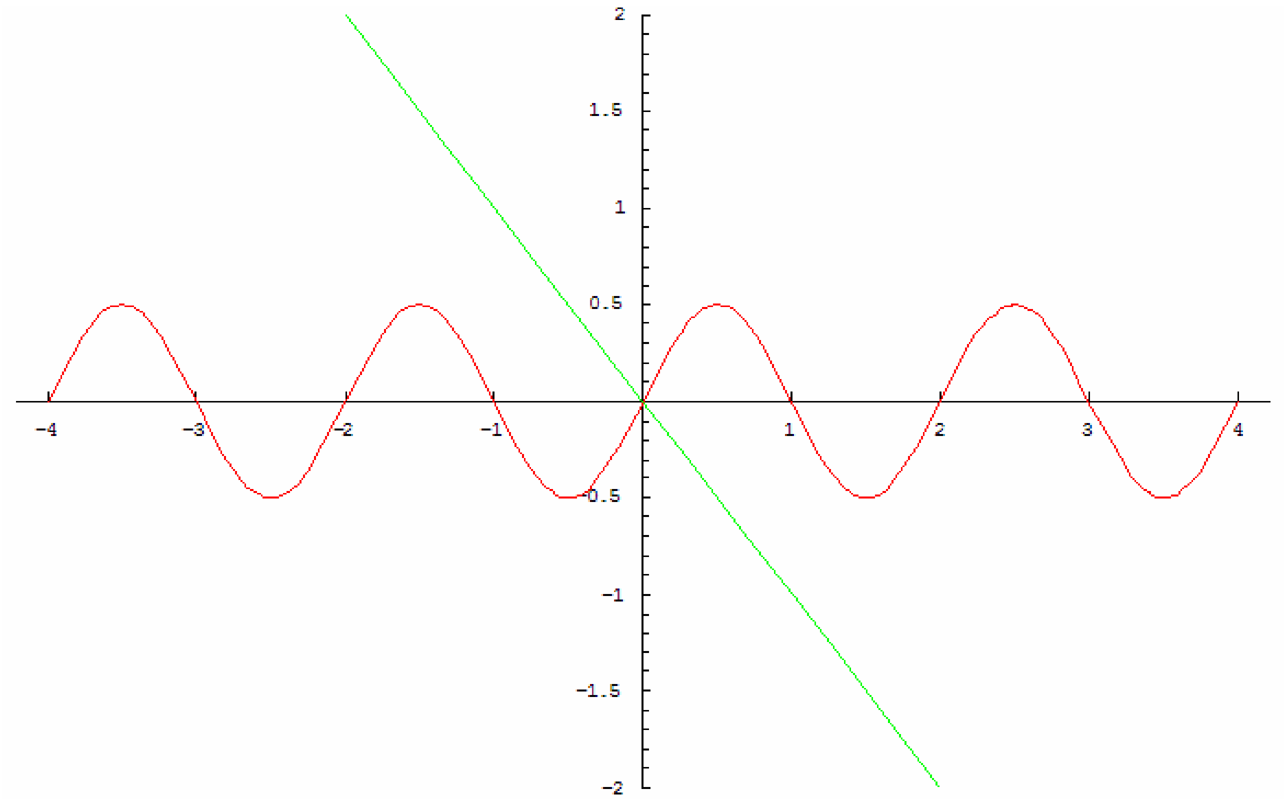
***2)***

Se $a = 2b = 2$ la funzione diventa $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + x = \frac{1}{2}\sin(\pi x) + x$. Discutiamola:

- Dominio: tutto R;
- Intersezione asse delle ascisse: (0,0);
- Intersezione asse delle ordinate: (0,0);
- Parità o disparità: la funzione è dispari in quanto $f(-x) = -f(x)$;
- Positività: $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\pi x) + x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(\pi x) \geq -x$ ed essa può essere risolta se risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\sin(\pi x) \\ y_1 = -x \\ y \geq y_1 \end{cases}$$

La funzione $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x)$ è una funzione periodica di periodo T=2, mentre la funzione $y_1 = -x$ è la bisettrice del secondo e quarto quadrante. La sovrapposizione dei due grafici è sotto presentata:

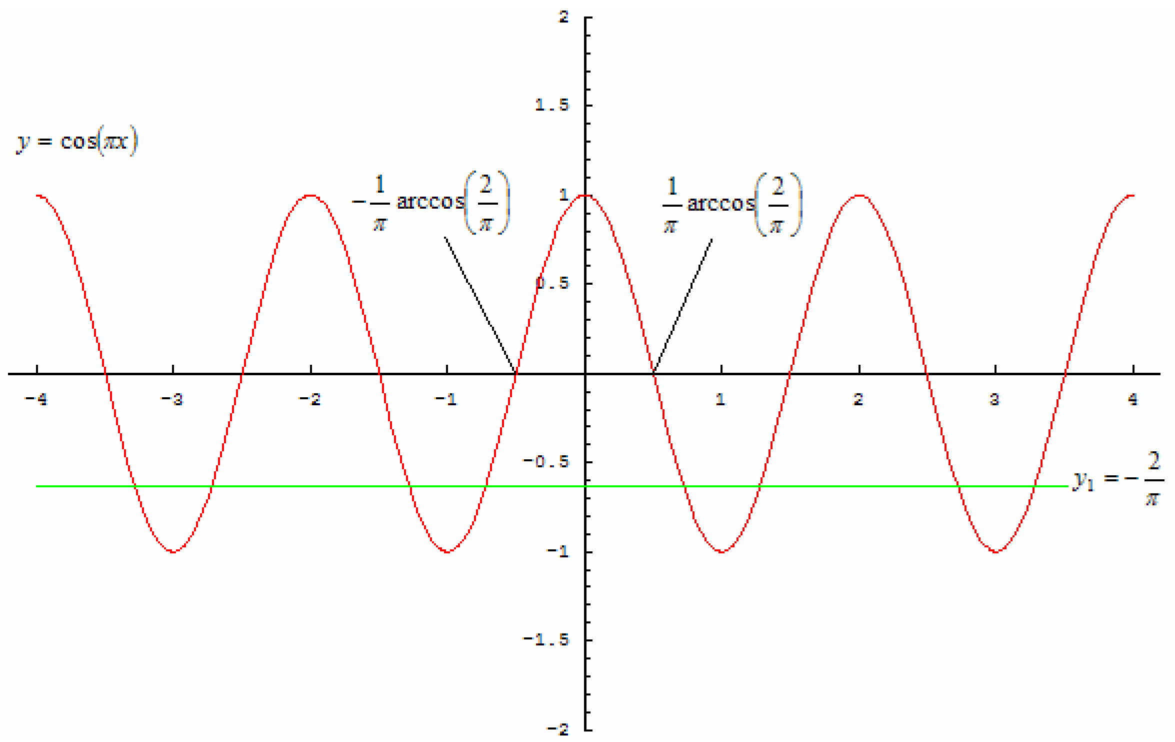



Dal grafico si nota che $\frac{1}{2}\sin(\pi x) \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$;

- Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui: non esistono;
- Crescenza e decrescenza: la derivata prima è $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(\pi x) \geq -\frac{2}{\pi}$ e la risoluzione della disequazione la si ricava dalla risoluzione del sistema seguente

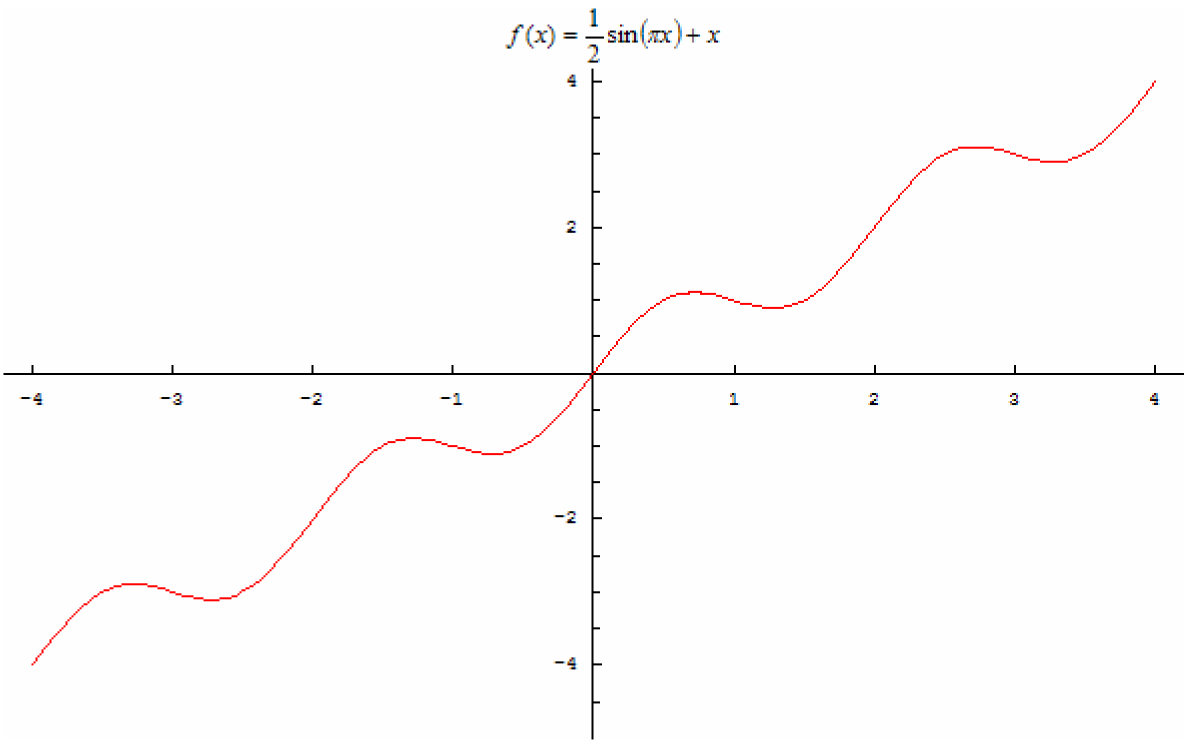
$$\begin{cases} y = \cos(\pi x) \\ y_1 = -\frac{2}{\pi} \\ y \geq y_1 \end{cases}$$

La funzione $y = \cos(\pi x)$ è una funzione periodica di periodo T=2, mentre la funzione $y_1 = -\frac{2}{\pi}$ è una retta parallela all'asse delle ascisse. La sovrapposizione dei due grafici è sotto presentata:




Ora $\cos(\pi x)=-\frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \pi x=\pm\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k$, per cui dal grafico soprastante si deduce che $\cos(\pi x)\geq-\frac{2}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k\leq x\leq\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k$. Inoltre la derivata seconda è $f''(x)=-\frac{\pi^2}{2}\sin(\pi x)=0 \Leftrightarrow \pi x=k\pi \Leftrightarrow x=k=\pm1,\pm2\cdots\cdots$, per cui $f''\left(-\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k\right)>0,\ f''\left(\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k\right)<0$ e per questo motivo le ascisse $x=-\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k$ sono ascisse di minimi relativi e le ascisse $x=\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)+2k$ sono ascisse di massimi relativi.

Il grafico è sotto presentato:




*3)*

Per $x > 0$ l'ascissa del primo massimo relativo è $x = \frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$. Esso cade nell'intervallo $\left[\frac{1}{2},1\right]$: infatti considerando la derivata prima si ha $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 > 0,\ f'(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ per cui per il teorema degli zeri esisterà un valore $\alpha$ incluso nell'intervallo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ in cui la funzione derivata prima $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) + 1$ si annullerà . Tale valore lo si può calcolare attraverso un metodo iterativo, ad esempio il metodo di bisezione che illustriamo di seguito:

1. $f'\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{3}{4} \cong -0.22 < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$;
2. $f'\left(\frac{5}{8}\right) = \pi\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right) + \frac{5}{8} \cong 0.79 > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right)$;
3. $f'\left(\frac{11}{16}\right) = \pi\cos\left(\frac{11}{16}\pi\right) + \frac{11}{16} \cong 0.25 > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{11}{16},\frac{3}{4}\right)$;
4. $f'\left(\frac{23}{32}\right) = \pi\cos\left(\frac{23}{32}\pi\right) + \frac{23}{32} \cong 0.0069 > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{23}{32},\frac{3}{4}\right)$;

5. $f'\left(\frac{47}{64}\right) = \pi \cos\left(\frac{47}{64}\pi\right) + \frac{47}{64} \cong -0.1098 < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(\frac{23}{32}, \frac{47}{64}\right)$.

Quindi $0.71875 < \alpha < 0.7344$ per cui $\alpha \approx 0.7$, e se procediamo con l'algoritmo troveremmo più precisamente $\alpha \approx 0.719668$.

# Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

**PIANO NAZIONALE INFORMATICA**

**Tema di**: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, *i radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
2. Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
3. Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?
4. Dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?
5. Dare un esempio di funzione $g$, non costante, tale che:
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \text{ e } g(2) = 4$$
6. Dare un esempio di funzione *f(x)* con un massimo relativo in *(1, 3)* e un minimo relativo in *(-1, 2)*.
7. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.
8. Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.
9. Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimato utilizzando un metodo iterativo a scelta.
10. Nel piano è data la seguente trasformazione:
$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}$$

Di quale trasformazione si tratta?

## *Soluzione*

***1)***

Il grado sessagesimale si definisce come la trecentosessantesima parte dell'angolo giro ed i suoi sottomultipli sono il primo ed il secondo.

Il radiante misura l'angolo al centro che sottende un arco di circonferenza di lunghezza pari al raggio.

Il grado centesimale rappresenta invece la quattrocentesima parte dell'angolo giro.

La relazione tra grado e radiante è:

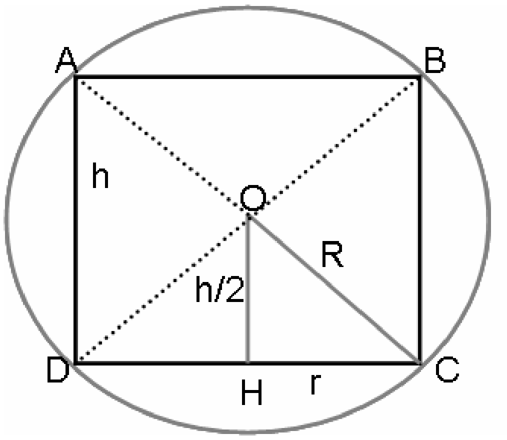
$$\frac{\alpha_{rad}}{\alpha°} = \frac{\pi}{180°} \Rightarrow \alpha° = 180°\left(\frac{\alpha_{rad}}{\pi}\right)$$

In particolare se $\alpha_{rad} = 1 \Rightarrow \alpha° = \frac{180°}{\pi} \cong 57°17'44''$.

La relazione tra gradi sessagesimali e centesimali è $\frac{\alpha^{\circ}_{cent}}{\alpha^{\circ}_{sess}} = \frac{400°}{360°} \Rightarrow \alpha^{\circ}_{sess} = 0.9\alpha^{\circ}_{cent}$ e se $\alpha^{\circ}_{cent} = 1 \Rightarrow \alpha^{\circ}_{sess} = 0.9° = 0°\, 0'\, 54''$.

*2)*

Si consideri la figura seguente in cui vengono rappresentati in sezione la sfera ed il cilindro equilatero:




La sezione del cilindro, essendo equilatero, è il quadrato ABCD. L'altezza $h$ del cilindro allora coinciderà col diametro di base, per cui $h = 2r$. Inoltre il raggio $R$ della sfera sarà la metà della diagonale del quadrato, per cui $R = \frac{2r\sqrt{2}}{2} = r\sqrt{2}$.

La superficie totale del cilindro è $S_{cilindro} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$ mentre quella della sfera è $S_{sfera} = 4\pi R^2$, per cui $\frac{S_{cilindro}}{S_{sfera}} = \frac{2\pi r(h+r)}{4\pi R^2} = \frac{2\pi r(2r+r)}{4\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}$

*3)*

La superficie del solido varierà con rapporto $k^2 = 9$ mentre il volume con rapporto $k^3 = 27$.

*4)*

Ricordiamo come si definisce una funzione:

$$f{:}A \to B \Leftrightarrow \forall x \in A \;\; \exists!\, y \in B \;\; : \;\; y = f(x)$$

Dobbiamo allora creare una corrispondenza tra tutti gli elementi di A e quelli di B (non necessariamente tutti quelli di B), potendo ripetere anche lo stesso elemento. Per cui il numero di applicazioni è dato dalle disposizioni di 3 oggetti in gruppi di 4, e ricordando il calcolo combinatorio tale numero è pari a $D'_{n,k} = n^k = 3^4 = 81$.

***5)***

Esistono infinite espressioni di $g(x)$ che soddisfano alle ipotesi del problema: quella più banale è la funzione non costante $g(x) = \begin{cases} 3 & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$.

Un'altra famiglia di espressioni può essere $g(x) = \begin{cases} 3 + (x-2)^n & x \neq 2, n \in R^+ \\ 4 & x = 2 \end{cases}$ e così via.

***6)***

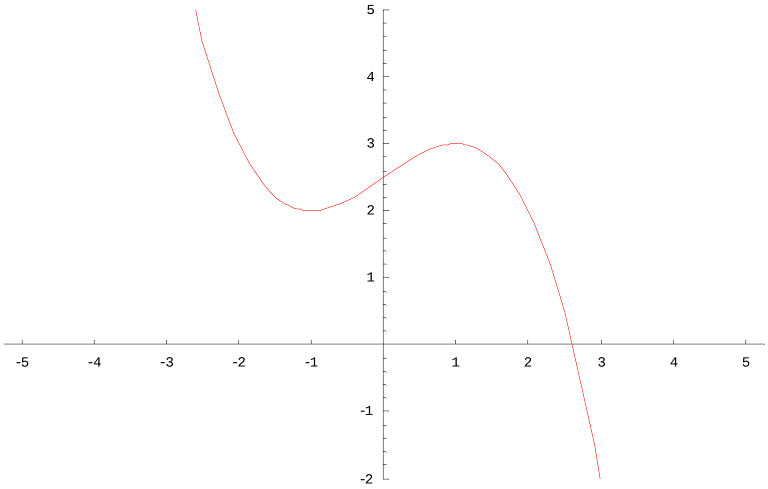
Una funzione come quella richiesta può essere una cubica di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

La derivata prima della funzione è $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, ed imponendo $y'(\pm 1) = 0$ si ricavano due condizioni : $3a + 2b + c = 0, 3a - 2b + c = 0$ e se si sottrae l'una dall'altra si ricava subito $b = 0$ e $c = -3a$. La derivata seconda è $y'' = 6ax + 2b = 6ax$, ed affinché la funzione abbia il massimo in (1,3) o il minimo in (-1,2) deve accadere che $y''(1) = 6a < 0 \Rightarrow a < 0$ oppure $y''(-1) = -6a > 0 \Rightarrow a < 0$, per cui scegliendo $a < 0$ vengono soddisfatte le condizioni che i punti (1,3) e (-1,2) siano estremi relativi. Inoltre imponendo il passaggio per i punti suddetti si ricavano gli altri parametri della curva $y = ax^3 + cx + d$: infatti si ricavano altre due condizioni: $a + c + d = 3, -a - c + d = 2$ . Il sistema da risolvere è allora :

$$\begin{cases} c = -3a \\ a + c + d = 3 \\ -a - c + d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -3a \\ -2a + d = 3 \\ 2a + d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ c = \frac{3}{4} \\ d = \frac{5}{2} \end{cases}$$

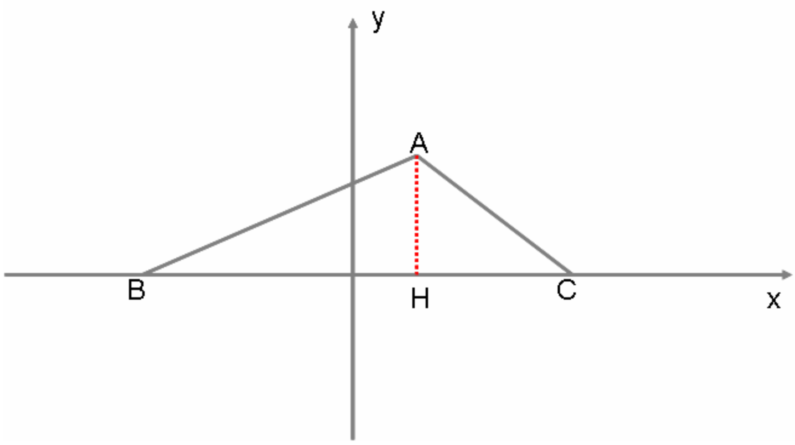
con $a = -\frac{1}{4}$ effettivamente minore di zero.

La curva è allora $y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ con grafico sotto presentato:




*7)*

Consideriamo la figura sottostante, in cui il triangolo di partenza viene raffigurato in un sistema di riferimento con origine nel punto medio della base del triangolo stesso:




La base è costante, per cui supponiamo misuri $BC = 2k > 0$. Inoltre è assegnata pure l'area, per cui risulta assegnata pure l'altezza che supponiamo misuri $AH = h > 0$.

Per come è stato scelto il sistema di riferimento, allora supponendo che la base misuri $BC = 2k > 0$ i vertici ed il piede dell'altezza assumeranno le seguenti coordinate:

$$C = (k,0), B = (-k,0), A = (x,h), H = (x,0)$$

Ora per il teorema di Pitagora si ha:

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{(k+x)^2 + h^2}$$
$$AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = \sqrt{(k-x)^2 + h^2}$$

per cui il perimetro vale

$$2p(x)=\sqrt{(k+x)^2+h^2}+\sqrt{(k-x)^2+h^2}+2k$$

Dobbiamo ora massimizzare tale funzione e lo facciamo calcolando la derivata:

$$2p'(x)=\frac{k+x}{\sqrt{(k+x)^2+h^2}}-\frac{k-x}{\sqrt{(k-x)^2+h^2}}=\frac{(k+x)\sqrt{(k-x)^2+h^2}-(k-x)\sqrt{(k+x)^2+h^2}}{\sqrt{\left[(k+x)^2+h^2\right]\left[(k-x)^2+h^2\right]}}\geq 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (k+x)\sqrt{(k-x)^2+h^2}\geq (k-x)\sqrt{(k+x)^2+h^2}$$

Ora il primo membro della disequazione $(k+x)\sqrt{(k-x)^2+h^2}\geq (k-x)\sqrt{(k+x)^2+h^2}$ è sempre positivo mentre il secondo varia. Ora se $k-x<0 \Leftrightarrow x>k$ allora il secondo membro è negativo e la disequazione è sempre soddisfatta. Se, invece, $x\leq k$ allora è possibile elevare ambo i membri al quadrato e risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases}(k+x)^2\left[(k-x)^2+h^2\right]\geq (k-x)^2\left[(k+x)^2+h^2\right]\\ x\leq k\end{cases}$$

La prima disequazione può essere riscritta in questo modo:

$$\left(k^2+x^2\right)\left[(k-x)^2+h^2\right]+2kx\left[(k-x)^2+h^2\right]\geq \left(k^2+x^2\right)\left[(k+x)^2+h^2\right]-2kx\left[(k+x)^2+h^2\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(k^2+x^2\right)(-4kx)+2kx\left(2k^2+2x^2+2h^2\right)\geq 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4kxh^2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$$

Quindi il sistema è soddisfatto per $0\leq x\leq k$.

Quindi la disequazione $(k+x)\sqrt{(k-x)^2+h^2}\geq (k-x)\sqrt{(k+x)^2+h^2}$ è soddisfatta per $0\leq x\leq k$ e $x>k$, per cui si ha in conclusione che essa è soddisfatta per $x\geq 0$, e questo significa che il perimetro minimo lo si ha per $x=0$ e cioè quando il vertice A si trova sulle ordinate, per cui quando AH divide la base in due parti uguali, da cui si deduce che il perimetro è minimo per un triangolo isoscele.

***8)***

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases}a+b=ab\\ a\neq b\end{cases}$$

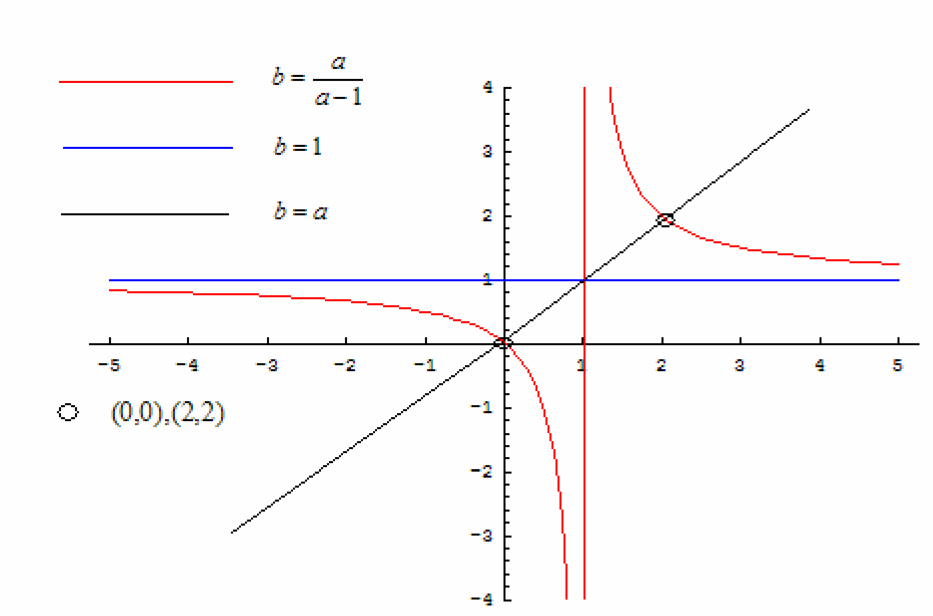
Ora la prima condizione, quella di uguaglianza tra somma e prodotto può essere riscritta come $b=\dfrac{a}{a-1}$, per cui tale relazione non è definita per $a=1$. Inoltre la condizione $a\neq b$ comporta

$\frac{a}{a-1} \neq a \Rightarrow a(a-1) \neq a \Rightarrow a^2 - 2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \cap a \neq 2$. Quindi tutte le coppie $(a,b)$ che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} b = \dfrac{a}{a-1} \\ a \neq 0 \cap a \neq 2 \end{cases}$$

soddisfano le richieste del quesito.

Il quesito può anche essere interpretato geometricamente: in particolare le coppie di numeri $(a,b)$ che soddisfano al quesito, sono quelle coppie che danno luogo ad una funzione omografica di asintoto verticale $a=1$ ed asintoto orizzontale $b=1$, da cui vanno escluse le due coppie $(0,0),(2,2)$ per le considerazioni sopra fatte, perché $(0,0),(2,2)$ soddisfano alla condizione che la somma sia uguale al prodotto, ma hanno ascissa ed ordinata uguale. Cioè in conclusione le coppie richieste sono tutte quelle che appartengono all'iperbole di equazione $b = \frac{a}{a-1}$ cui vanno sottratte quelle date dall'intersezione dell'iperbole con la bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $b = a$ come sotto rappresentato:




*9)*

Consideriamo la funzione $y = e^x + 3x$. Si ha:

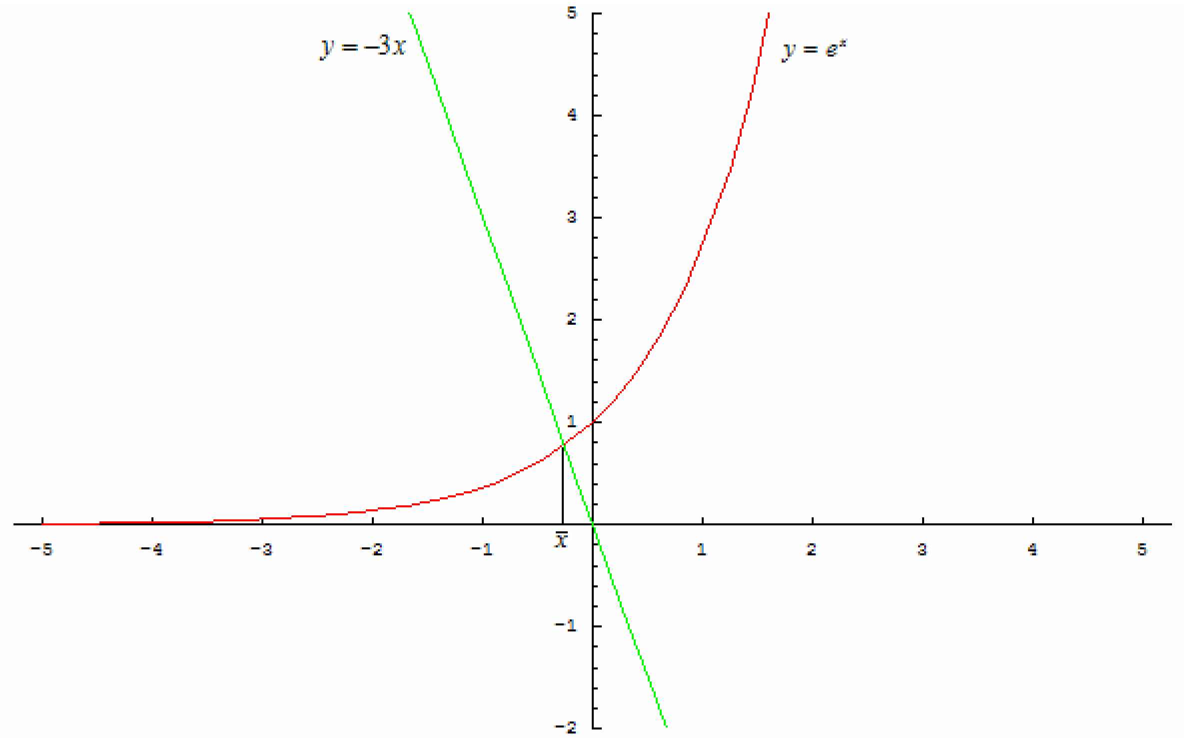
$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x + 3x\right) = +\infty, \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + 3x\right) = -\infty$$

Inoltre la funzione è sempre crescente visto che $y' = e^x + 3 > 0 \ \forall x \in R$. Quindi la funzione è sempre crescente , a $-\infty$ tende a $-\infty$, a $+\infty$ tende a $+\infty$, quindi essa intersecherà l'asse delle ascisse in uno ed un sol punto.

Un altro modo di procedere è la via grafica risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x \end{cases}$$

sotto rappresentato:




Per capire in che intervallo si trova l'unico zero si nota che $y(0)=1>0, y(-1)=e^{-1}-3<0$ per cui per il teorema degli zeri $\exists \bar{x} \in (-1,0): e^{\bar{x}}+\bar{x}=0$. In particolare con uno dei metodi numerici preferiti ( ad esempio quello di bisezione) si calcola che $\bar{x} \cong -0.258$.

Applichiamo tale metodo all'intervallo (-1,0):

1. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{3}{2}<0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{1}{2},0\right)$;

2. $f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}-\frac{3}{4}>0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$;

3. $f\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt[8]{e^3}}-\frac{9}{8}<0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{3}{8},-\frac{1}{4}\right)$;

4. $f\left(-\frac{5}{16}\right)=\frac{1}{\sqrt[16]{e^5}}-\frac{15}{16}<0 \Rightarrow \bar{x} \in \left(-\frac{5}{16},-\frac{1}{4}\right)$;

5. $f\left(-\frac{9}{32}\right)=\frac{1}{\sqrt[32]{e^9}}-\frac{27}{32}<0 \Rightarrow \bar{x}\in\left(-\frac{9}{32},-\frac{1}{4}\right)$;

6. $f\left(-\frac{17}{64}\right)=\frac{1}{\sqrt[64]{e^{17}}}-\frac{51}{64}<0 \Rightarrow \bar{x}\in\left(-\frac{17}{64},-\frac{1}{4}\right)$;

7. $f\left(-\frac{33}{128}\right)=\frac{1}{\sqrt[128]{e^{33}}}-\frac{93}{128}>0 \Rightarrow \bar{x}\in\left(-\frac{33}{128},-\frac{17}{64}\right)$;

8. $f\left(-\frac{67}{256}\right)=\frac{1}{\sqrt[256]{e^{67}}}-\frac{201}{256}<0 \Rightarrow \bar{x}\in\left(-\frac{33}{128},-\frac{67}{256}\right)$;

9. $f\left(-\frac{133}{512}\right)=\frac{1}{\sqrt[512]{e^{133}}}-\frac{399}{512}<0 \Rightarrow \bar{x}\in\left(-\frac{33}{128},-\frac{133}{512}\right)$;

10. $f\left(-\frac{265}{1024}\right)=\frac{1}{\sqrt[1024]{e^{265}}}-\frac{795}{1024}<0 \Rightarrow \bar{x}\in\left(-\frac{33}{128},-\frac{265}{1024}\right)$

Quindi $\bar{x}\in\left(-\frac{33}{128},-\frac{265}{1024}\right)\approx(-0.257812,-0.258789)$ per cui $\bar{x}\cong -0.258$; in particolare l'approssimazione potrebbe essere più precisa e trovare $\bar{x}\cong -0.257628$.

***10)***

La trasformazione

$$s:\begin{cases} x'=x\sqrt{3}-y \\ y'=x+y\sqrt{3} \end{cases}$$

rientra nella casistica delle centro affinità dirette visto che il rapporto di affinità è $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}=4>0$.

Inoltre essa è anche una similitudine. Infatti una similitudine non è altro che la composizione, in ordine qualsiasi, di una isometria e di una omotetia; ed infatti se riscriviamo la trasformazione in questo modo

$$s:\begin{cases} x'=2\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}y\right) \\ y'=2\left(\frac{1}{2}x+y\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

in essa si riconosce una rotazione (che è un tipo di isometria nel piano) di 30° ed una omotetia di rapporto 2.