Problema 2

Nel piano è assegnata la funzione

$$\Gamma: y = x^2 + a \log(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in x = 1;

b) Si studi e si disegni **Γ;**

c) Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γrispetto alla retta y = y (1);

e) Si disegni per i valori di a e b trovati il grafico di

$$\Gamma: y = |x^2 + a \log(x + b)|$$

Soluzione

Punto a

Si trovino i valori di a e b tali che la curva $\Gamma: y=x^2 + a \log(x + b)$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in x = 1.

Siccome il testo non lo specifica, nel seguito intenderemo che log vuol dire logaritmo neperiano cioè in base e.

Imponendo la condizione che il grafico della funzione passi per l'origine degli assi si ha:

$O(0,0) \in \Gamma \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow 0=a \log b \Rightarrow b=1$ (essendo $a \neq 0$).

La derivata prima della funzione è $y' = 2x + \frac{a}{x+1}$

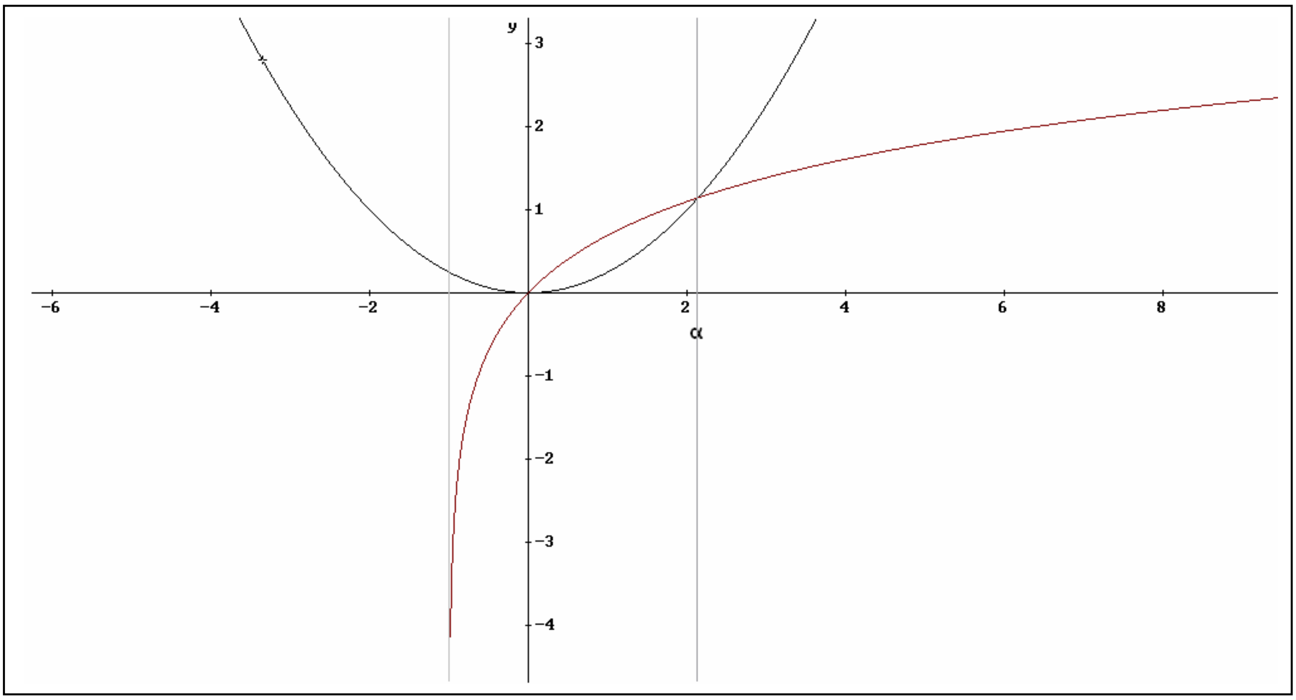
La condizione necessaria affinché una funzione ammetta un minimo impone che la derivata prima sia uguale a zero, cioè deve essere $y'(1) = 0 \Rightarrow 2 + \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -4$

Quindi funzione richiesta è $\Gamma: y=x^2 -4 \log(x+1)$.

Punto b

Si studi e si disegni $\Gamma: y=x^2 -4 \log(x+1)$

- ✓ Dominio: $D =]-1,+\infty[$ ($x+1>0 \Rightarrow x>-1$)
- ✓ Segno: $x^2 -4 \log(x+1)>0 \Rightarrow x^2 / 4 > \log(x+1)$



Dallo studio grafico si ricava che:
y>0 per $-1<x<0$ e per $x>\alpha$
y<0 per $0<x<\alpha$
y=0 per $x=\alpha$ e per x=0
Dove $2<\alpha<2{,}25$

- ✓ Intersezione con gli assi O(0,0) e P(α,y(α))
- ✓ Asintoti

Asintoti verticali

$$\lim_{x\to 1^+}\left[x^2-4\log(x+1)\right]=+\infty \quad \Rightarrow \text{ La retta } x=1 \text{ è un asintoto verticale}$$

Asintoti orizzontali

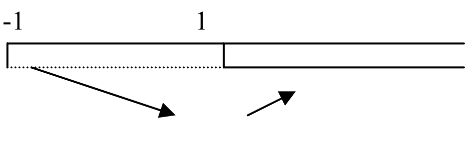
$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2-4\log(x+1)\right]=+\infty \quad \Rightarrow \text{Non esistono asintoti orizzontali}$$

Asintoti obliqui

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[x^2-4\log(x+1)\right]}{x}=+\infty \quad \Rightarrow \text{Non esistono asintoti obliqui}$$

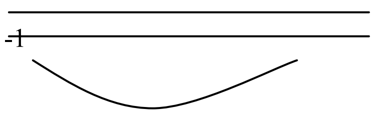
- ✓ Monotonia

$$y'=2x-\frac{4}{x+1}=\frac{2x^2+2x-4}{x+1}$$



y'>0⇒x<-2 e x>1

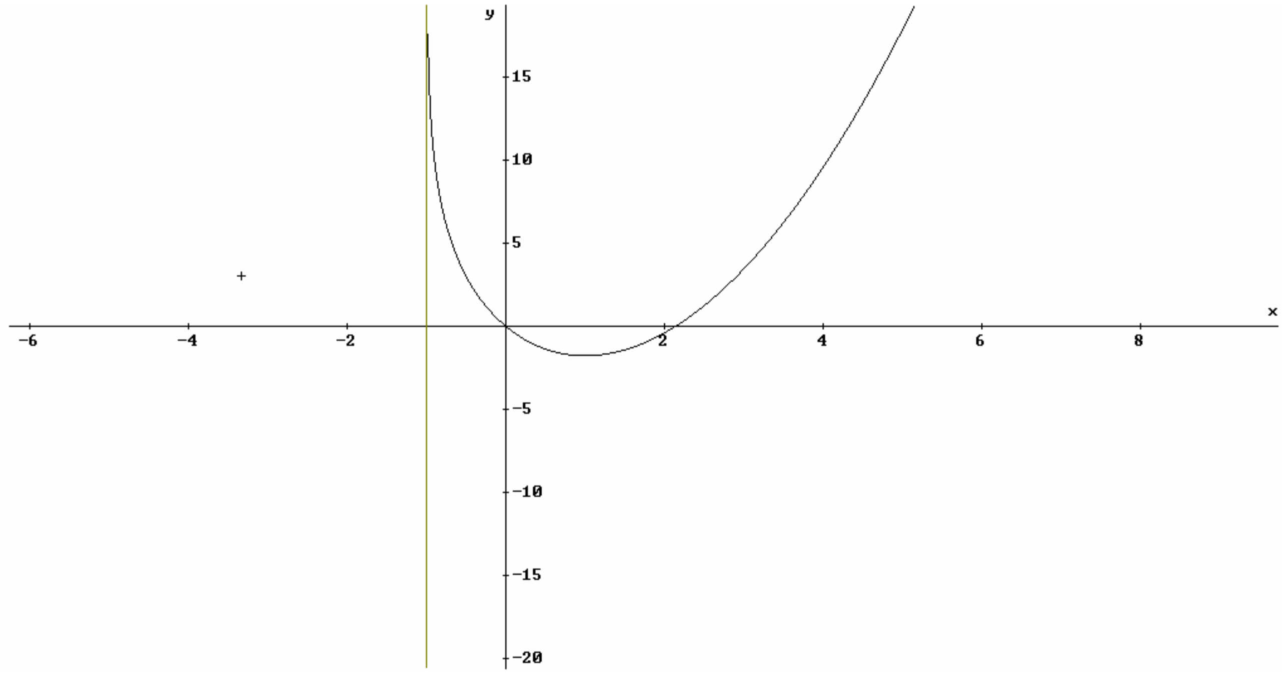
La funzione è crescente per x>1
È decrescente per $-1<x<1$
Presenta un punto di minimo in P(1,1-4log2)=(1,1-log16)



- ✓ Concavità

$$y''=2+\frac{4}{(x+1)^2}>0\ \forall x$$

Il grafico della funzione presenta sempre la concavità verso l'alto.



Punto c

Si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati un'approssimazione della intersezione positiva di Γcon l'asse x.

La funzione $y=x^2-4\log(x+1)$ nell'intervallo [2,3] soddisfa il *teorema degli zeri*.

- ✓ Y(x) è continua in [2,3]
- ✓ $y(2)\cdot y(3)<0$, in quanto y(0)=-1<0 e $y(1)=1-\frac{1}{e}>0$

  Come si è già visto, la funzione è strettamente crescente nell'intervallo [2,3], pertanto esiste una sola radice x^* compresa tra 2 e 3.

Teorema degli zeri
Se la funzione f(x) è continua nell'intervallo [a,b] e se $f(a)\cdot f(b)<0$*, esiste almeno un punto interno all'intervallo (a,b) in cui la funzione è nulla.*

Utilizzando, per esempio, *il metodo di bisezione* si ha:

x_1	x_2	$y(x_1)$	$y(x_2)$	x^*
2	3	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$2<x^*<3$
2	2,5	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$2<x^*<2,5$
2	2,25	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$2<x^*<2,25$
2,125	2,25	$y(x_1)<0$	$y(x_2)>0$	$2,125<x^*<2,25$

Quindi $2,125<x^*<2,25$

Utilizzando *il metodo di Newton*, con punto iniziale x_0, si ottiene

n	x	y	Y'	(x-y)/y'
1	2	-0,39445	2,(6)	2,147918
2	2,147918	0,026588	3,025156	2,139129
3	2,139129	$9,29*10^{-5}$	3,00402	2,139099
4	2,139099	$1,15*10^{-9}$	3,003946	2,139099
5	2,139099		3,003946	2,139099

Punto d

Si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta y = y (1)

L'asse di simmetria è: y = 1 - 4ln2

La trasformazione è: $\begin{cases} X' = x \\ y' = 2a - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X' = x \\ Y' = 2 - 8\log 2 - y \end{cases}$

Applicata alla funzione Γ:$y=x^2 - 4\log(x+1)$ si ottiene Γ':$y=-x^2 + 4\log(x+1) - 8\log 2 + 2$.

Punto e

Per ottenere il grafico di Γ'':$y=\left|x^2 - 4\log(x+1)\right|$

basta *ribaltare* le parti a ordinata negativa del grafico di Γ:$y=x^2 - 4\log(x+1)$ rispetto all'asse delle x.

Si ottiene: