ESAMI DI STATO 2001
SECONDA PROVA SCRITTA PER IL LICEO SCIENTIFICO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

1. Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x + y = 4$.

c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha centro nel punto di coordinate (1,1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto *a*), risulta tangente alla circonferenza k.

2. Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.

b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13a$, $\overline{BC}=15a$, verificare che tale quadrilatero risulta un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto *b*), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

QUESTIONARIO

1. Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x}$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui le facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4. Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}h\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a,b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-}{k-}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
a) area massima e perimetro massimo;
b) area massima e perimetro minimo;
c) area minima e perimetro massimo;
d) area minima e perimetro minimo.
Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando x tende a + • ,

a) è uguale a 0;
b) è uguale ad 1;
c) è un valore diverso dai due precedenti;
d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione $\dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to$ +• e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hopital.

Durata massima della prova: 6 ore.
Era consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

RISOLUZIONI

Problema 1.
a) Dalla relazione

(1) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \qquad a > 0$$

supponendo x ed y diversi da 0, esplicitando y in funzione di x, si ottiene la funzione

(2) $$f(x) = \frac{ax}{x - a}.$$

Osserviamo che le relazioni in (1) e (2) sono equivalenti quando x e y sono diversi da 0. La funzione $f(x)$ è definita anche per $x = 0$ e vale 0.

Dalle proprietà fondamentali delle coniche si deduce subito che il grafico di $f(x)$ è un'iperbole equilatera di centro $O'(a,a)$, asintoti $x = a$, $y = a$ ed uno degli assi coincidente con la bisettrice del primo e terzo quadrante (fig. 1). Per completezza preferiamo studiare la funzione con gli usuali strumenti dell'analisi.

La funzione $f(x)$ è razionale fratta, e quindi definita in $R - \{a\}$. Per $x = 0$ si ha $f(x) = 0$, quindi la curva passa per l'origine delle coordinate.

La funzione è positiva se, e soltanto se, numeratore e denominatore sono concordi, cioè

$$f(x) > 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (a, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in (0, a)$$

Determiniamo gli eventuali asintoti della funzione. Siccome

$$\lim_{x \to a^{\pm}} \frac{ax}{x-a} = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax}{x-a} = a$$

la retta $x = a$ è un asintoto verticale e la retta $y = a$ è un asintoto orizzontale.

La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = \frac{a(x-a) - ax}{(x-a)^2} = \frac{-a^2}{(x-a)^2}.$$

Essendo la derivata prima negativa in tutto il dominio, la funzione è decrescente in ogni intervallo contenuto nel dominio.

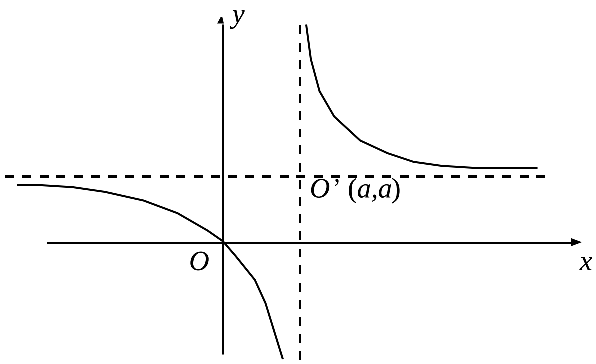

Figura 1

Dalla derivata seconda della funzione, che risulta essere

$$f''(x) = \frac{2a^2}{(x-a)^3}$$

otteniamo che la funzione è convessa per $x > a$ e concava per $x < a$.

b) Affinché la retta t sia tangente alla curva, il sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = \dfrac{ax}{x-a} \end{cases}$$

deve ammettere una soluzione doppia. L'equazione risolvente $x^2 - 4x + 4a = 0$ deve avere pertanto il discriminante nullo. Si conclude che la retta t è tangente alla curva per $a = 1$, mentre per $a < 1$ il discriminante è positivo e la retta risulta secante alla curva.

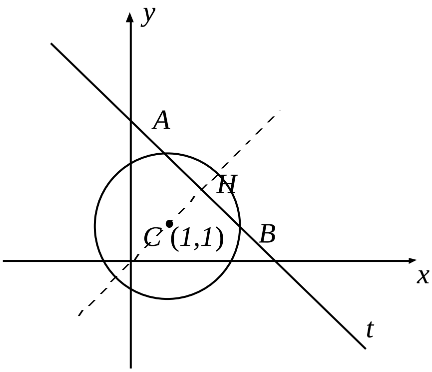

Figura 2

Sia H la proiezione del punto C sulla retta t e siano A e B le intersezioni della retta t con la circonferenza, come in fig. 2. Essendo H il punto medio del segmento AB si ha $\overline{AH} = \sqrt{2}$.

$\overline{CH}$ è la distanza del punto C dalla retta t, onde

$$\overline{CH} = d(C,t) = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Ne segue che il triangolo ACH risulta rettangolo isoscele sulla base AC (raggio della circonferenza k), quindi:

$$\overline{AC} = \overline{AH}\sqrt{2} = 2.$$

L'equazione della circonferenza k è pertanto

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Diamo anche un cenno a una risoluzione più laboriosa, ma concettualmente più semplice. Intersechiamo la retta t e la circonferenza generica di centro C. Dalla risoluzione del sistema costituito dalle relative equazioni si ottengono le coordinate dei punti di intersezione A e B. Imponiamo che la lunghezza del segmento AB (corda individuata dalla retta t sulla circonferenza) abbia lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Dall'osservazione della fig. 2 segue facilmente che l'area del triangolo ABC vale 2, l'area del settore circolare vale π e l'area del cerchio vale 4π. Pertanto l'area della regione di piano richiesta non contenente C vale $\pi - 2$, e l'area della regione di piano richiesta contenente C vale $3\pi + 2$.

e) La curva e la circonferenza, simmetriche rispetto alla retta $y = x$, risultano tangenti in un punto di tale retta, per cui la tangente comune è ad essa perpendicolare ed ha, quindi, coefficiente angolare uguale a -1. Si ha pertanto

$$f'(x) = -\frac{a^2}{(x-a)^2} = -1$$

ovvero $x = 0$ oppure $x = 2a$, e quindi il punto di tangenza è $T = (2a,2a)$. Poiché il punto T appartiene alla circonferenza, con facili calcoli si ha

$$a = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 2.

a) Siano H e K i punti di intersezione della retta passante per il punto A e perpendicolare al lato BC del triangolo dato ABC (vedi fig. 3).

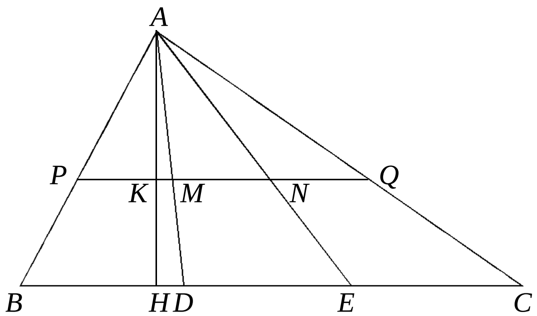

Figura 3

Dall'ipotesi $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$, si ha che i triangoli ABD, ADE e AEC sono equivalenti poiché hanno stessa altezza e basi uguali, e quindi

$$Area(ADB) = Area(AED) = Area(AEC) = \frac{1}{2}\overline{BD}\;\overline{AH} = \frac{1}{3}Area(ABC).$$

Per il teorema inverso del teorema di Talete, la retta MN è parallela alla retta BC perché congiunge i punti medi di due lati di un triangolo. Inoltre, risulta

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{6}\overline{BC} \quad \text{e} \quad \overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AH}.$$

Il quadrilatero $DENM$ è un trapezio la cui area è data da

$$Area(ADE) - Area(AMN) = \frac{1}{3}Area(ABC) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\overline{BC}\;\frac{1}{2}\overline{AH}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}Area(ABC) - \frac{1}{12}Area(ABC) = \frac{1}{4}Area(ABC).$$

Possiamo procedere anche nel seguente altro modo: siano P e Q le intersezioni della retta MN con AB e AC rispettivamente. Il triangolo APQ è simile al triangolo ABC con rapporto fra i lati pari a 1/2.

Pertanto

$$Area(APQ) = \frac{1}{4} Area(ABC).$$

Inoltre, i tre trapezi *PMDB*, *MNED* e *QCEN* sono equivalenti avendo basi uguali ed altezze uguali. Quindi

$$Area(MNED) = \frac{1}{3}\left[Area(ABC) - \frac{1}{4} Area(ABC)\right] = \frac{1}{4} Area(ABC).$$

b) Nell'ipotesi che $Area(MNED) = \frac{45}{2} a^2$, $\overline{BC} = 15a$ e $\overline{AB} = 13a$, proviamo che $H = D$.

Per quanto dimostrato nel punto a) sappiamo che

$$Area\,(ABC) = 4Area\,(MNED) = 90\,a^2;$$

d'altra parte

$$\overline{AH} = 2\frac{Area(ABC)}{\overline{BC}} = \frac{180}{15a}a^2 = 12a.$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo *ABH* troviamo che:

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{169a^2 - 144a^2} = 5a.$$

Abbiamo così provato che $\overline{BH} = \overline{BD}$, e quindi $H = D$; pertanto il trapezio *MNED* è un trapezio rettangolo in *D* ed *M*.

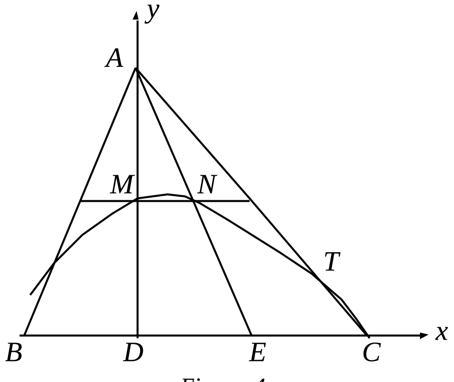

Figura 4

c) Fissiamo un sistema di assi cartesiani con centro nel punto *D*, asse delle ascisse che coincide con la retta *BC* e asse delle ordinate che coincide con la retta AD, come in fig. 4. In questo modo la parabola ha l'asse parallelo a quello delle ordinate ed è quindi rappresentata da una equazione del tipo $y = px^2 + qx + r$. Imponiamo ora il passaggio della parabola per i punti

$$M = (0, 6a),\ C = (10a, 0) \text{ e } N = \left(\frac{5}{2}a, 6a\right).$$

Risolvendo un semplice sistema otteniamo la seguente equazione della parabola, rispetto al sistema di riferimento fissato

$$y = -\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a.$$

d) Determiniamo eventuali altri punti d'intersezione della parabola con la retta per A e C.

L'equazione della retta per A e C è $y = -\frac{6}{5}x^2 + 12a$. Risolviamo il sistema costituito delle equazioni della retta e della parabola; basta così risolvere l'equazione $2x^2 - 35ax + 150a^2 = 0$, che ammette come soluzioni $x = 10\,a$ e $x = \frac{15}{2}a$. Pertanto i punti d'intersezione fra retta e parabola sono $C = (10a, 0)$ e $T = \left(\frac{15}{2}a, 3a\right)$.

La parabola divide il triangolo ADC in due regioni; sia S_1 la parte del triangolo esterna alla parabola e S_2 la parte di triangolo interna alla parabola. L'area della regione S_1 è data da

$$Area(S_1) = \int_0^{15a/2}\left[\left(12a - \frac{6}{5}x\right) - \left(-\frac{2}{25a}x^2 + \frac{1}{5}x + 6a\right)\right]dx = \int_0^{15a/2}\left(\frac{2}{25a}x^2 - \frac{7}{5}x + 6a\right)dx = \frac{135}{8}a^2$$

Da cui si ha

$$Area(S_2) = Area(ACD) - Area(S_1) = \frac{1}{2}\overline{DC}\ \overline{AD} - Area(S_1) =$$

$$= 60a^2 - \frac{135}{8}a^2 = \frac{345}{8}a^2.$$

QUESTIONARIO

1. La risposta è no. Ci sono due casi da considerare: $f(x)$ è definita in a, ma è ivi discontinua, oppure $f(x)$ non è definita in a. Le seguenti due funzioni sono semplici esempi dei due casi: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0' \end{cases}$ oppure la funzione $f(x) = x^2$ definita su $R - \{0\}$.

2. Il calcolo del limite richiesto (numeratore e denominatore tendono a 0) si può effettuare applicando il Teorema di De L'Hopital. Per ipotesi $f(x)$ è continua; quindi la sua funzione integrale è derivabile, e ha per derivata $f(x)$. Per cui si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2e^x(1+x)} = \frac{2}{2} = 1.$$

3. Il cubo risulta suddiviso dai due piani in quattro prismi di uguale altezza, pari allo spigolo del cubo che poniamo uguale a $2a$, come nella fig. 5. È sufficiente quindi lavorare sulle basi dei quattro prismi (vedi fig. 6).

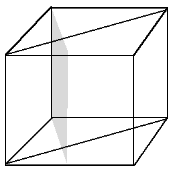

Figura 5

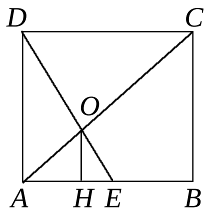

Figura 6

Sia O il punto d'intersezione di AC e DE e sia H il punto d'intersezione della retta perpendicolare ad AB e passante per il punto O. Osserviamo che il triangolo AEO ha area minore del triangolo EBC (infatti i due triangoli hanno basi uguali e altezze diverse, con $\overline{CB} > \overline{OH}$), e pertanto l'area del quadrilatero $EBCO$ è maggiore di quella del triangolo AEO. Inoltre, il triangolo AEO è simile al triangolo OCD con rapporto di proporzionalità fra i lati pari a $\frac{1}{2}$ e quindi ha area minore di OCD. Anche i triangoli ABC e AHO sono simili, e poiché ABC è isoscele anche AHO lo è; quindi $\overline{AH} = \overline{HO}$; pertanto il triangolo AOD ha area maggiore rispetto al triangolo AOE (infatti, i due triangoli hanno stessa altezza ma basi diverse, con $\overline{AD} > \overline{AE}$). Quindi AEO è la parte meno estesa; occorre dimostrare che *Area* $(CBEO)$ = 5 *Area* (AEO). Osserviamo che i triangoli AED e HEO sono simili e pertanto dall'ipotesi $2\overline{AE}$ segue che $\overline{OH} = 2\overline{HE}$. Come già detto i triangoli ABC e AHO sono simili e si ha

$$\overline{AH} = 2\overline{HE}.$$

Allora:

$$\overline{AH} = \frac{2}{3}a,\quad \overline{HE} = \frac{1}{3}a,\quad \overline{OH} = \frac{2}{3}a \text{ e } \qquad \text{Area}(AEO) = \frac{1}{2}\overline{AE}\;\overline{OH} = \frac{1}{3}a^2.$$

D'altra parte

$$Area\,(EBCO) = Area\,(ABC) - Area\,(AEO) =$$
$$= \left(2a^2 - \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{5}{3}a^2 = 5Area\,(AEO).$$

La dimostrazione si può condurre anche nel seguente modo: osserviamo che il punto O è il baricentro del triangolo ABD. Le mediane di un triangolo dividono lo stesso in sei parti equivalenti, quindi $Area(AOE) = \frac{1}{6}Area(ABD)$ e, pertanto, $Area(AOE) = \frac{1}{12}Area(ABCD)$. Se ne deduce

$$Area(EBCO) = Area\,(ABC) - Area\,(AOE) = \frac{5}{12}\,Area(ABCD) = 5Area\,(AOE).$$

4. Nel corso della dimostrazione si suppongono noti il volume della piramide e il teorema delle sezioni parallele in una piramide. Sia O il vertice della piramide alla quale appartiene il tronco di basi $ABCD$, $A'B'C'D'$ e di altezza HH', come in fig. 7.

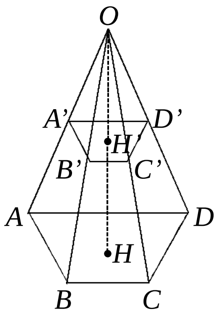

Figura 7

Indichiamo con B e b le aree delle due basi, con h la misura dell'altezza e con x la misura di OH'; la misura di OH è $h + x$. Poiché il volume del tronco è la differenza tra i volumi delle due piramidi di vertice O le cui basi coincidono con quelle del tronco, avremo

$$V = \frac{1}{3}B(h+x) - \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}Bh + \frac{1}{3}x(B-b).$$

Ma per il teorema relativo alle sezioni parallele in una piramide si ha:

$$B : b = (h+x)^2 : x^2 \text{ e quindi anche } \sqrt{B} : \sqrt{b} = (h+x) : x$$

da cui segue

$$x = \frac{h\left(\sqrt{Bb} + b\right)}{B - b}.$$

Sostituendo questo valore di x nella (1) si ottiene

$$V = \frac{1}{3} h\left(B + b + \sqrt{Bb} \right).$$

5. Si tratta di un corollario del Teorema di Lagrange. Fissato un punto x_0 interno all'intervallo $[a,b]$, consideriamo un qualunque punto x π x_0 appartenente all'intervallo $[a,b]$ supponendo, per fissare le idee, $x_0 < x$. In base al Teorema di Lagrange

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

con c opportuno punto interno all'intervallo $[x_0, x]$.

Per ipotesi, la derivata di $f(x)$ è nulla in ogni punto di $[a,b]$, per cui è nulla anche in c; quindi si ha che:

$$f(x) - f(x_0) = 0, \text{ cioè } f(x) = f(x_0)$$

ma allora $f(x)$ assume in $[a,b]$ sempre lo stesso valore.

6. Ricordiamo la definizione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Quindi

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Possiamo ottenere lo stesso risultato rifacendoci all'interpretazione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ come il numero di sottoinsiemi con k elementi di un insieme A con n elementi. Siano $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $B = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. I sottoinsiemi X di A con k elementi sono tutti e soli di questi due tipi:

1) X è un sottoinsieme di B con k elementi
2) $X = Y \cup \{a_n\}$ dove Y è un sottoinsieme di B con $k - 1$ elementi.

Ci sono $\binom{n-1}{k}$ sottoinsiemi di A di tipo 1) e $\binom{n-1}{k-1}$ sottoinsiemi di A di tipo 2); questo conclude la dimostrazione.

7. La risposta esatta è a). Infatti tutti i triangoli inscritti in una semicirconferenza sono rettangoli ed hanno tutti la stessa base; quello isoscele ha altezza massima (uguale al raggio) e quindi area massima.

Per il calcolo del perimetro seguiamo la via trigonometrica.

Sia $AB = 2r$ il diametro del semicerchio, C il terzo vertice del triangolo e l'angolo in B uguale a x.

Per il teorema sui triangoli rettangoli si ha:

$$AC = 2r\text{sen } x \text{ e } CB = 2r\cos x.$$

Da cui il perimetro

$$P(x) = 2r\,(1 + \text{sen } x + \cos x)$$

La derivata è $$P'(x) = 2r\,(\cos x - \text{sen } x)$$

Imponendo che la derivata sia uguale a zero si ricava che $x = \pi/4$ è il valore che rende massimo il perimetro.

Si poteva anche seguire un altro procedimento.

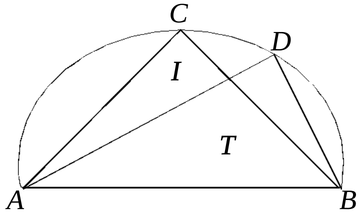

Figura 8

Sia I il triangolo isoscele iscritto nella semicirconferenza e sia T il generico triangolo rettangolo iscritto nella circonferenza (vedi fig. 8). Con $P(I)$ e $P(T)$ indichiamo i perimetri dei due triangoli. Vogliamo dimostrare che $P(I) \geq P(T)$ per ogni T. Siano x e y le lunghezze dei due cateti di T ed a un cateto di I. La tesi è equivalente a provare che $2a \geq x + y$. Procediamo per assurdo, cioè supponiamo che $x + y > 2a$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $y < x$; poiché $y < 2r < 2a$ si ha $y < 2a$. Dall'ipotesi segue che $x^2 > y^2 - 4ay + 4a^2$. D'altra parte per il teorema di Pitagora applicato ad I e T abbiamo $x^2 + y^2 = 2a^2$, cioè $x^2 = 2a^2 - y^2$, quindi $2a^2 - y^2 > y^2 - 4ay + 4a^2$, il che è equivalente a $2(a - y)^2 < 0$, che è chiaramente una contraddizione.

8. La funzione $f(x)$ è un polinomio di terzo grado ed è quindi continua e derivabile in tutta la retta reale. Studiamo il segno di $f'(x) = 3ax^2 + 4ax - 3$. L'equazione associata $f'(x) = 0$ ha discriminante $\Delta = 4a^2 + 9a$.

Per $a \in \left(-\infty, -\dfrac{9}{4}\right) \cup (0, +\infty)$ si ha $\Delta > 0$ e l'equazione ammette due radici reali e distinte x_1 ed x_2. Siccome $f'(x)$ è un polinomio di secondo grado, il suo segno nell'intervallo di estremi x_1 ed x_2 è opposto al segno esternamente all'intervallo stesso. Ne segue che x_1 ed x_2 sono due punti estremanti.

Per $a \in \left(-\frac{9}{4}, 0\right)$ si ha $\Delta < 0$, onde $f'(x) < 0$ avendo lo stesso segno di a. In tal caso la funzione $f(x)$ non presenta punti estremanti.

Infine, essendo per ipotesi a π 0, resta da esaminare il caso $a = -\frac{9}{4}$. In tal caso si ha $\Delta = 0$, e quindi $f'(x) < 0$, assumendo il segno del primo coefficiente, tranne che per $x_1 = x_2 = -\frac{2}{3}$, in cui si ha $f'(x) = 0$. Si conclude che anche per $a = -9/4$ la funzione non ammette né massimi né minimi relativi.

9. La risposta corretta è a). Infatti, la funzione $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$ è il prodotto della funzione limitata sen x – cos x con la funzione infinitesima $1/x$ per x che tende all'infinito; pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x} = 0.$$

10. Osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)} = 1,$$

perché

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

In questo caso non è lecito applicare il teorema di De L'Hopital, in quanto non esiste il limite del rapporto delle derivate, cioè la funzione $\frac{1 + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ non ammette limite per $x \to$ +• .

ALCUNE CONSIDERAZIONI GENERALI

La nuova struttura della prova di matematica è sicuramente più adeguata e meglio articolata rispetto alla vecchia formulazione.

Il questionario è una novità positiva in quanto prevede argomenti che spaziano su temi diversi e quindi tendono a saggiare le capacità dello studente nei vari settori, anche se presenta ancora delle imperfezioni:

• alcuni quesiti richiedono dimostrazioni di teoremi (4 e 5) e questo ci sembra privilegiare la sola capacità mnemonica dello studente;

• qualche domanda di analisi ci è parsa un po' ripetitiva (9 e 10).

Entrambi i problemi sono problemi tradizionali che non presentano particolari difficoltà.

È tuttavia da osservare che, mentre il problema numero 1 può essere risolto con metodologie proprie del corso di studi dell'ultimo anno, il problema numero 2 si basa su conoscenze del primo biennio di geometria euclidea, del terzo anno di geometria analitica e, solo nell'ultimo quesito possono essere usati gli strumenti dell'analisi per il calcolo delle aree. Forse proprio per questo motivo il problema 1 è stato privilegiato, nella scelta, dagli studenti.

A questo punto entra in gioco la valutazione:

• bisogna considerare i due problemi con gli stessi parametri?

• I quesiti del questionario hanno lo stesso peso, nella valutazione?

A nostro avviso è giusto non tener conto della scelta fatta dal singolo studente ma della precisione nella risoluzione sia del problema che dei quesiti del questionario scelti, in quanto ogni studente deve avere la possibilità di cimentarsi in quegli argomenti che conosce meglio senza essere penalizzato.

Quest'anno è stato utile anche l'orientamento per la valutazione consigliato nelle linee guide del M.P.I. ([1]), che ha permesso una valutazione più omogenea tra le Commissioni operanti nelle varie scuole.

Per concludere è doveroso sottolineare che quest'anno, durante lo svolgimento della prova scritta di matematica, si è riscontrata una maggiore serenità rispetto agli anni precedenti. Tale serenità, dovuta a nostro avviso alla possibilità di scegliere tra una gamma più ampia di argomenti, si riscontra nei commenti fatti su molte testate di quotidiani del 22 giugno ed è confermata da testimonianze di alunni e docenti presenti sul sito http://matmedia.ing.unina.it alla voce Esame di Stato.

PAOLA D'AQUINO
Dipartimento di Matematica
Seconda Università degli Studi di Napoli

DOMENICA DI SORBO
Istituto Statale di Istruzione Secondaria Superiore
Caiazzo (Caserta)

[1] Scheda n. 6 di *L'Esame di Stato-LINEE GUIDA*, novembre 2000, pag. 85, M.P.I.