ESAMI DI STATO 2001
PROVA DI MATEMATICA
PER IL LICEO SCIENTIFICO
A INDIRIZZO SPERIMENTALE (PNI)

La prova richiede lo svolgimento di uno dei due problemi proposti e le risposte a cinque domande scelte all'interno del questionario. Durata massima della prova: 6 ore. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile e la consultazione del vocabolario d'Italiano.

Problema 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e sia C il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane monometriche (x, y):

a) si verifichi che il luogo dei punti P per cui $\overline{PA} / \overline{PB} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

c) posto X appartenente a γ in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$, si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$, con $f(x) = \left(\overline{XB}^2 \big/ \overline{XA}^2\right)$ e $x = \operatorname{tg} \alpha$.

Problema 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e di b tali che la curva Γ, grafico della funzione, passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;

b) si studi e si disegni Γ;

c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di $y = |x^2 + a \log(x + b)|$.

QUESTIONARIO

(1) Provare che una sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro circoscritto.

(2) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione: $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$.

(3) Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

(4) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$. Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

(5) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\log x}{x}\, dx.$$

(6) Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

(7) Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

(8) Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i 16 allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?

(9) Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

(10) Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o *di Lagrange*, se è vero che «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

SOLUZIONE

Problema 1

Scegliamo C come origine degli assi e la retta AB come asse delle ascisse, in modo che A abbia coordinate $(-a, 0)$ e B coordinate $(a, 0)$.

a) Sia P un punto nel piano, avente coordinate (x, y). Abbiamo:

$$\overline{PA}^2 = (x+a)^2 + y^2 \qquad \overline{PB}^2 = (x-a)^2 + y^2.$$

Segue che il punto P appartiene al luogo in questione se e solo se

$$(1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)y^2 + 2a(1 + k^2)x + (1 - k^2)a^2 = 0.$$

Il luogo cercato è dunque una circonferenza, a meno che non si abbia $k = 1$: in tal caso abbiamo una retta (l'asse del segmento AB). Infatti, per $k \pi 1$, l'equazione è riconducibile a una forma del tipo $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ed è immediato constatare che, nel caso attuale, si ha $\alpha^2 + \beta^2 > 4\gamma$.

b) Stabiliamo, dapprima, quali siano i punti X di γ situati in uno dei due semipiani aventi per origine la retta AC, ad esempio il semipiano dei punti di ordinata positiva. Indicheremo tale sottoinsieme di γ con il simbolo γ_+. A questo scopo, mostriamo il seguente fatto:

PROPOSIZIONE. *Sia r una retta del piano e sia PQ un segmento giacente su r. Sia T un punto esterno ad r, nel semipiano* s *rispetto ad r. Allora, l'insieme dei punti V appartenenti ad* s *tali che* ($P\hat{V}Q = P\hat{T}Q$) *forma un arco di circonferenza (più precisamente è dato dai punti in* s *della circonferenza passante per P, Q e T).*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che ciascun punto dell'arco dato dall'intersezione tra *s* e la circonferenza per P, Q e T veda il segmento PQ sotto lo stesso angolo è un teorema ben noto della Geometria Euclidea. Viceversa, sia V un punto di s tale che $P\hat{V}Q = P\hat{T}Q$. Facciamo vedere che V appartiene alla circonferenza passante per P, Q e T. Infatti, tutti i punti in s della circonferenza per P, Q e V vedono PQ sotto lo stesso angolo, che ha la medesima ampiezza di $P\hat{T}Q$. A questo punto è semplice osservare che, se i due archi PTQ e PVQ non coincidessero, sarebbe violato il teorema dell'angolo esterno.

Sulla base di questa proposizione, otteniamo che γ_+ è un arco di circonferenza di estremi A e C. Il corrispondente angolo al centro di questa circonferenza è un angolo retto. Pertanto, la circonferenza in questione è la circonferenza $\tilde{\gamma}$ circoscritta al quadrato di lato AC che si trova nel semipiano di ordinata positiva. Essa ha centro nel punto $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ e raggio di lunghezza $\frac{a}{\sqrt{2}}$, quindi ha equazione

$$x^2 + y^2 + ax - ay = 0.$$

Il luogo γ richiesto è dunque l'unione di γ_+ e del suo simmetrico rispetto alla retta AC, come indicato nella figura 1. Per quanto detto, un'equazione cartesiana di γ è

$$x^2 + y^2 + ax - a|y| = 0 \quad \text{con } y \pi 0.$$

Osserviamo che i punti A e C non appartengono a γ, perciò γ è un sottoinsieme sconnesso del piano.

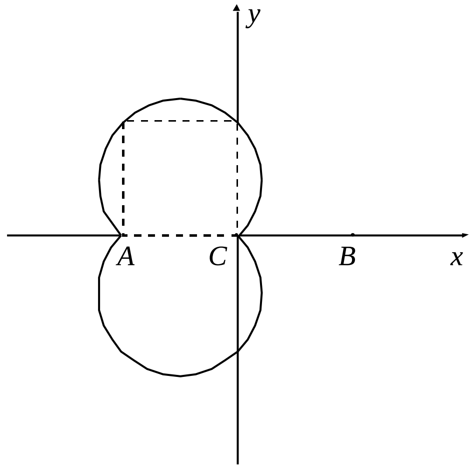


Figura 1

c) Preso $X \in \gamma_+$, il valore di $tg\left(X\hat{A}C\right)$ è il coefficiente angolare della retta AX. Lo indicheremo con la lettera m, per evitare confusioni. Le rette passanti per il punto A (tranne quella ortogonale ad AC) sono tutte le rette r_m di equazione

$$y = mx + ma$$

al variare di m tra i numeri reali. Notiamo inoltre che la tangente alla circonferenza $\tilde{\gamma}$ nel punto A è la retta r_{-1}. Ciò implica che la retta r_m incontra l'arco γ_+ se e solo se $m < -1$ oppure $m > 0$. Il punto X, intersezione tra la retta r_m e la circonferenza $\tilde{\gamma}$, ha coordinate

$$X = \left(\frac{m(1-m)}{1+m^2}\,a,\ \ \frac{m(1+m)}{1+m^2}\,a \right),$$

da cui segue:

$$f(m) = \overline{XB}^2 \Big/ \overline{XA}^2 = \frac{5m^4 - 2m^3 + 6m^2 - 2m + 1}{(1+m^2)(1+m^2)}$$

La funzione da considerare è perciò la seguente:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2}$$

nel dominio $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. La funzione f è continua e derivabile in tutto il suo dominio e, per come è stata definita, assume solo valori positivi. Vediamone alcune proprietà:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 5.$$

Questi valori limite hanno una chiara interpretazione geometrica. In particolare, il terzo di essi evidenzia il comportamento della funzione allorché la retta AX tende a divenire perpendicolare ad AC (è immediato constatare che, quando $X = (-a, a)$, si ha $\overline{XB}^2 \big/ \overline{XA}^2 = 5$. Inoltre, abbiamo:

$$f'(x) = \frac{12x - 4}{(1 + x)^3},$$

da cui ricaviamo che la funzione f è crescente nei due intervalli $(-\infty, -1)$ e $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$ ed è decrescente in $\left(0, \frac{1}{3}\right]$. Il valore $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$ è il minimo assoluto e l'immmagine di f è l'insieme $\left[\frac{1}{2}, 5\right) \cup (5, +\infty)$. Il punto (1, 1) è un punto di flesso. Una rappresentazione grafica della funzione f è riportata nella figura 2.

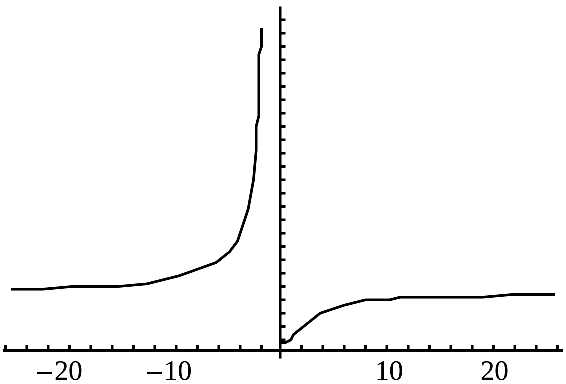


Figura 2

Problema 2

a) Indichiamo con la lettera f la funzione assegnata, ovvero $f(x) = x^2 + a \log(x + b)$, con a, $b \neq 0$. Il fatto che $f(0) = 0$ implica $b = 1$. Perciò la f è definita nel dominio $(-1, +\infty)$ ed è continua e derivabile in tutto il dominio. Dal fatto che $f(x)$ assuma valore minimo per $x = 1$ segue che $f'(1) = 0$, ovvero $a = -4$. Che si tratti, in effetti, di un minimo assoluto verrà chiarito nella parte b.

b) Si tratta dunque di esaminare la funzione

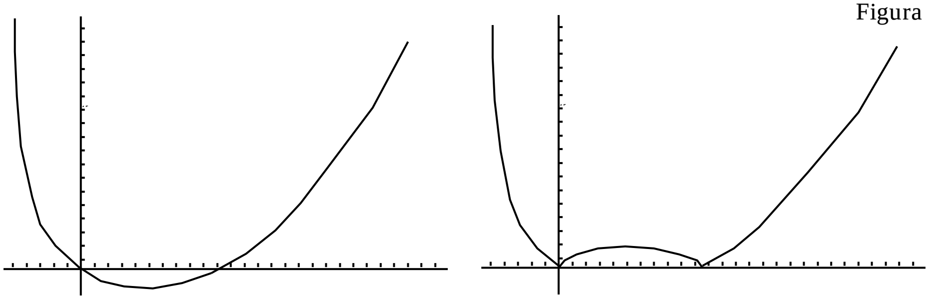
$$f(x) = x^2 - 4\log(x + 1)$$

continua e derivabile nel dominio $(-1, +\infty)$. Abbiamo i limiti

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Da qui, la derivabilità di f e l'esistenza di un solo zero per f' (il valore $x = -2$ non è accettabile) bastano a concludere che $f(x)$ ha minimo assoluto in corrispondenza di tale zero, ovvero per $x = 1$. Questo valore minimo è $f(1) = 1 - 4\log 2$ e l'immagine di f è l'insieme $[1 - 4\log 2, +\infty)$. Per tracciare il grafico Γ, è utile osservare che f'' è sempre positiva, cosicché Γ non ha punti di flesso, e che, inoltre, non ci sono rette asintotiche a Γ per $x \to +\infty$ (figura 3).

Figura 3



c) Dato che $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, il fatto che la funzione sia decrescente nell'intervallo $[0, 1]$ e crescente in $[1, +\infty)$ implica che essa ha un solo zero positivo, che indicheremo con la lettera ζ. Si avrà $\zeta > 1$. Ci sono vari modi per costruire successioni convergenti a ζ (ad esempio, il metodo di dicotomia o il metodo delle tangenti di Newton). Vogliamo qui applicare un metodo di «punto fisso», un po' diverso da quelli citati, ma particolarmente agevole da usare nella pratica, anche con una semplice calcolatrice tascabile. Poniamo $g(x) = 2\sqrt{\log(x+1)}$. Il numero ζ sarà la soluzione positiva dell'equazione $g(x) = x$, ovvero un punto fisso di g. Adesso, preso $x_0 \in (0, \zeta)$, abbiamo che $x_0 < g(x_0)$ (poiché per $x \in (0, \zeta)$ si ha $f(x) < 0$) ed inoltre $g(x_0) < g(\zeta) = \zeta$ (poiché la funzione g è crescente). Dunque, si trova $x_0 < g(x_0) < \zeta$. Definiamo $x_1 = g(x_0)$ e, in generale,

$$x_{n+1} = g(x_n). \qquad (*)$$

Perciò, applicando ripetutamente la funzione g a partire da un valore iniziale $x_0 \in (0, \zeta)$, si costruisce una successione crescente in $(0, \zeta)$, la quale converge ad un numero $x \in (0, \zeta]$ con la proprietà che $x = g(x)$, come si vede passando al limite per $n \to \infty$ nella relazione (*). Pertanto, il limite di questa successione è ζ. Scegliendo $x_0 = 1$, si trova:

$x_0 = 1$ $\quad\ldots$

$x_1 \approx 1.6651$ $\quad x_8 \approx 2.1390$

$x_2 \approx 1.9801$ $\quad x_9 \approx 2.1391$

d) Operando una simmetria assiale della curva Γ rispetto ad una retta parallela all'asse x, si ottiene una curva Γ′ di equazione $y = -x^2 + 4\log(x+1) + k$, con k costante reale. Per stabilire il valore di k nel caso attuale, basta richiedere che $(1, f(1)) \in \Gamma'$. Si trova quindi $k = 2f(1) = 2 - 8\log 2$.

e) Dato il grafico di Γ, si tratta di riflettere rispetto all'asse x i punti la cui coordinata y è negativa (si veda la figura 4).

QUESTIONARIO

1) Per le dimostrazioni classiche (principio di Cavalieri, scodella di Galileo) si può consultare un manuale di Geometria. Usando strumenti di analisi, si può ricorrere all'integrazione per il calcolo del volume di un solido di rotazione, ottenendo:

volume di una sfera di raggio r: $\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{4}{3}\pi r^3$

volume del cilindro circoscritto: $\pi \int_{-r}^{r} r^2 dx = 2\pi r^3$.

2) La funzione $f(x) = xe^x + xe^{-x} - 2$ è continua e derivabile in tutto R. Osserviamo che si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Questo, per il teorema dei valori intermedi, implica l'esistenza di almeno uno zero per la funzione f, dato che essa è definita su un intervallo ed assume sia valori positivi che valori negativi. Inoltre si ha:

$$f'(x) = e^x + xe^x + e^{-x} - xe^{-x} = e^x + e^{-x} + xe^{-x}(e^{2x} - 1),$$

positivo per ogni x reale. Infatti, i primi due addendi in questa somma, ovvero e^x e e^{-x} sono sempre positivi; il terzo addendo è positivo per x π 0 (e nullo per $x = 0$). Da qui segue che la funzione è monotona crescente nell'intero dominio, dunque ammette un solo zero.

3) Un polinomio $p(x)$ rappresenta una funzione continua e derivabile in tutto R. Siano a e b due radici di $p(x)$. Essendo $p(a) = p(b) = 0$, è lecito applicare il teorema di Rolle alla funzione $p(x)$ definita nell'intervallo $[a, b]$. In base a tale teorema, esiste un punto $x_o \in (a, b)$ tale che $p'(x_o) = 0$.

4) La funzione $f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$, derivabile nell'intervallo $[-1, 1]$, è costante in tutto il dominio, in quanto $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [-1, 1]$. La conclusione

è conseguenza del teorema di Lagrange. In particolare, per ogni $x \in [-1, 1]$, si ha $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$. Allo stesso risultato si poteva pervenire anche senza la derivazione, osservando che $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

5) Poiché la derivata della funzione $x \to \log x$ è $\frac{1}{x}$, con una semplice sostituzione si trova che l'integrale indefinito richiesto è $\frac{\log^2 x}{2} + c$.

6) Utilizziamo la formula di Cavalieri-Simpson (formula delle parabole), riferita ad una suddivisione dell'intervallo $[0, \pi]$ in 4 parti uguali. Risulta:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\, x\, dx \approx \frac{\pi - 0}{12}\left(\operatorname{sen}\, 0 + \operatorname{sen}\, \pi + 2\operatorname{sen}\, \frac{\pi}{2} + 4\left(\operatorname{sen}\, \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\, \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6}\pi \approx 2.0046.$$

Applicando il metodo dei trapezi (più elementare, ma un po' meno preciso) alla medesima suddivisione, si trova $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}\pi \approx 1.896$. Il valore esatto dell'integrale è

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\, x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

7) Posto $f(x) = x - e^{-x}$, la funzione f è continua nell'intervallo $[0, 1]$. Dato che $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 - e^{-1} > 0$, dal teorema dei valori intermedi segue che esiste almeno uno zero di f compreso fra 0 e 1. Inoltre, si ha $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ per ogni x reale: pertanto la funzione è monotona crescente e, in particolare, è iniettiva, quindi ha un solo zero. Per approssimare il valore di tale zero, usiamo il cosiddetto «metodo delle tangenti» di Newton-Raphson. A partire da un valore iniziale x_0 (che in questo caso potremmo scegliere arbitrariamente), definiamo una successione numerica attraverso la formula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

La successione converge allo zero di f in maniera monotona e fornisce approssimazioni via via più accurate di tale zero. Se scegliamo come valore iniziale $x_0 = 0.5$ (media aritmetica di 0 e 1), troviamo

$$x_1 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \approx 0.5663$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.5671.$$

Ci arrestiamo qui, visto che $f(0.5671) \approx -0.00007$.

8) Il numero di terne che possono essere l'esito del sorteggio fra i 16 allievi è $\binom{16}{3}$. Di queste terne, quelle formate da 3 maschi sono $\binom{12}{3}$. Pertanto, la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{12}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{11}{28} \approx 0.4.$$

9) Per una risposta, si può consultare un manuale di Geometria.

10) Descriviamo il viaggio dell'automobilista mediante la funzione $t \to f(t)$ che esprime la distanza percorsa dell'auto fino al momento t, misurando la distanza in kilometri ed il tempo in ore. Possiamo assumere che la funzione f sia continua (l'auto si muove senza «balzi improvvisi») nell'intervallo chiuso $[a, b]$ (dove a è l'ora di partenza, b l'ora di arrivo) e derivabile nell'intervallo aperto (a, b) (in ciascun istante, il moto dell'auto ha una «velocità istantanea»). Il teorema di Lagrange afferma che, sotto tali ipotesi, esiste $t_o \in (a, b)$ tale che

$$f'(t_o) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il secondo membro di quest'ultima espressione è proprio la velocità media dell'intero tragitto; il primo membro è la velocità istantanea al momento t_o, ovvero quella che si legge sul tachimetro in quell'istante. Osserviamo che l'ipotesi che il viaggio si svolga «senza soste», espressa nella traccia, è superflua.

ALCUNE OSSERVAZIONI

Riguardo ai due problemi, vorremmo segnalare il considerevole dislivello nella difficoltà. Infatti, la risoluzione del primo problema richiede l'adeguata applicazione di qualche teorema geometrico ed una certa perizia nell'affrontare alcuni passaggi, che possono dar luogo a calcoli complicati o difficilmente trattabili. Invece, il secondo problema appare standard e privo di insidie, tanto da far dubitare circa la sua efficacia nell'evidenziare differenze di preparazione o capacità.

Le dieci domande proposte nel questionario trattano in prevalenza argomenti di Analisi (ben sette quesiti); solo una è dedicata alla Probabilità e due ad argomenti di Geometria.

All'interno dei quesiti di tipo analitico, colpisce, da un lato, la marginalità del calcolo integrale (le domande 5 e 6 del questionario sono quasi banali) e, dall'altro lato, la significativa presenza di esercizi di approssimazione numerica (ben due dei dieci quesiti, oltre alla domanda presente nel secondo problema).

Insieme a questa prevalenza di quesiti analitici, osserviamo come, nelle tracce ministeriali, si tenda a concepire una funzione per lo più in termini di «curva» e non di «applicazione» o «corrispondenza», fino ad incorrere in scritture onestamente discutibili, come ad esempio la retta «$y = y(1)$» di cui si parla nel secondo problema (espressione che temiamo possa aver tratto in inganno diversi candidati).

Per quanto riguarda le domande di ambito geometrico, osserviamo che esse sono di tipo teorico-conoscitivo e non si propongono di accertare alcuna capacità risolutiva. In particolare, una risposta al quesito 1 di carattere geometrico classico sarebbe puramente teorica e dunque non del tutto opportuna in una prova scritta come quella esaminata (per le ragioni ricordate in Anichini & Ciarrapico, 2001, pag. 64), mentre una risoluzione analitica porta ad incrementare il già prevalente insieme dei quesiti dedicati all'Analisi. L'altro quesito di argomento geometrico, il 9, ci sembra formulato in termini un po' vaghi: una spiegazione del «significato di sistema assiomatico con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria» difficilmente può essere impostata da un candidato in un simile contesto, dal momento che si tratterebbe di una impegnativa dissertazione su un tema vasto e complesso (a meno di non rifugiarsi in qualche riduttivo schematismo).

Per quanto riguarda il livello di difficoltà delle domande proposte, esso appare in generale piuttosto moderato. Se consideriamo l'ampia possibilità di scelta sui quesiti del questionario e l'eccessiva semplicità del secondo problema, può sorgere il dubbio di una prova non chiaramente indicativa.

GIORGIO T. BAGNI
bagni@mat.uniroma1.it

PAOLO FRANCINI
francini@mat.uniroma1.it

BIBLIOGRAFIA

G. ANICHINI – L. CIARRAPICO, *Esami di Stato: la prova scritta di Matematica nel Liceo Scientifico*, Archimede, 2/2001, 61-70.