La funzione ζ di Riemann

esame di analisi non lineare applicata

Marcello Seri

marcello.seri@studenti.unicam.it

Università degli Studi di Camerino

Definizione

La funzione ζ di Riemann è definita dalla serie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

che converge analiticamente in $\Re s > 1$

È possibile prolungare analiticamente la funzione a tutto il piano complesso con un polo semplice in $s = 1$.

Prolungamenti analitici della ζ

Prolungamenti analitici della ζ

È semplice estendere la funzione al semipiano $\Re s > 0$: siano $[x]$ e $\{x\}$ rispettivamente la parte intera e la parte frazionaria di x. Basta manipolare la definizione per $\Re s > 1$ come segue:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} s \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}} = s \int_1^{+\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} \mathrm{d}x =$$

$$= s \int_1^{+\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$$

Dunque

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x$$

cioè $\zeta(s)$ è una funzione meromorfa sul semipiano $\Re s > 0$ con un polo semplice in $s = 1$ di residuo 1.

Prolungamenti analitici della ζ

Per arrivare a trovare un'estensione su tutto il piano complesso è necessario introdurre la **Formula di Eulero-MacLaurin**.
Sia $f \in C^k$:

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \int_m^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{(-1)^{r-1}}{r!} \int_m^n \overline{B}_r(x) f^{(r)}(x)\mathrm{d}x + \\ + \sum_{l=1}^{r} \frac{B_l}{l!} \left[f^{(l-1)}(n) - f^{(l-1)}(m) \right]$$

in cui $B_k(x)$ sono i **Polinomi di Bernoulli** e $\overline{B}_k(x) = B_k(x - [x])$ sono i **Polinomi di Bernoulli 1-periodicizzati**. I polinomi di Bernoulli sono definiti come coefficienti di uno sviluppo in serie di potenze da

$$\frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n(t)}{n!} x^n$$

in particolare si prova che $B_n(0) = B_n$ (**numeri di Bernoulli**) e $B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} t^k$

Prolungamenti analitici della ζ

Consideriamo $f(x) = x^{-s}$ (che è C^∞), $m = 1$ e lasciamo n libera di variare, avremo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^s} = \int_1^n x^{-s} \mathrm{d}x - \frac{1}{r!}(s)(s+1)\cdots(s+r-1)\int_1^n \overline{B}_r(x) x^{-s-r} \mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{n^{-s}-1}{2} + \sum_{l=2}^{r} \frac{B_l}{l!} s(s+1)\cdots(s+l-2)(1-n^{-s-l+1})$$

Se ora facciamo il limite per $n \to +\infty$ avremo trovato un modo utile ma complicato per scrivere la $\zeta(s)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} k^{-s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - \frac{s(s-1)\cdots(s+r-1)}{r!} \int_1^{+\infty} \overline{B}_r(x) x^{-s-r} \mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{l=2}^{r} \frac{B_l}{l!} s(s+1)\cdots(s+l-2)(1-n^{-s-l+1}) \qquad \forall r \in \mathbb{N}$$

Prolungamenti analitici della ζ

Non solo abbiamo trovato un modo per calcolare i valori della $\zeta(s)$ ma abbiamo anche un suo prolungamento analitico su $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Infatti $\frac{s(s-1)\cdots(s+r-1)}{r!} \int_1^{+\infty} \overline{B}_r(x) x^{-s-r} \mathrm{d}x$ (che è la parte meno ovvia della formula) converge per $\Re s > 1 - r$, ma essendo $r \in \mathbb{N}$, il problema è dato soltanto dalla difficoltà del calcolo dei polinomi di Bernoulli adeguati.

Vedremo più avanti alcuni esempi di calcoli espliciti di valori della ζ a partire da questa formula.

Prolungamenti analitici della ζ

Un modo decisamente più semplice per estendere la ζ è sfruttare la funzione $\xi(s) = s(1-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$.

Utilizzando la formula di inversione per la funzione

$$\vartheta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}$$

secondo la quale $\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\vartheta(\frac{1}{t})$, si ricava con una discreta quantità di passaggi che:

$$\xi(s) = -1 + s(1-s)\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}(\vartheta(x)-1)(x^{-\frac{s+1}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1})\mathrm{d}x$$

funzione analitica di s invariante per la trasformazione $s \mapsto 1-s$. In altre parole $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Prolungamenti analitici della ζ

Poichè $\Gamma(s)$ è analitica in $\Re s > 0$ mentre, come abbiamo visto, $\zeta(s)$ è meromorfa in tale semipiano con un solo polo semplice in $s = 1$ con residuo 1, la $\xi(s)$ non ha in $\Re s > 0$ alcuna singolarità ($\xi(1) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2}) = 1$). Dall'equazione funzionale segue subito che lo stesso vale per $\Re s < 1$.

Possiamo osservare che avendo la funzione $\Gamma(\frac{s}{2})$ poli semplici in $s = -2, -4, -6, \cdots$ ed essendo $\xi(s)$ regolare in questi punti, i poli si cancellano con gli zeri di $\zeta(s)$, dunque

$$\zeta(-2k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Tali punti vengono chiamati *zeri banali* della funzione ζ di Riemann.

Prolungamenti analitici della ζ

Se ripensiamo a quanto visto fino ad ora, non abbiamo ancora trovato nulla capace di spiegarci a fondo ed in maniera evidente il comportamento della ζ in $[0, 1]$.

Effettivamente, dall'equazione funzionale si può dedurre soltanto che *ogni altro zero di $\zeta(s)$ si trova nella* ***striscia critica*** $0 < \Re s < 1$ e *se $\zeta(\rho) = 0$ con $\rho = \beta + i\gamma$* e $0 \le \beta \le 1$ *allora $\zeta(1 - \rho) = 0$, cioè tali zeri sono simmetrici rispetto ad $\frac{1}{2}$*

Valori della ζ

Valori della ζ

Utilizziamo lo sviluppo analitico trovato in precedenza (p.6), fissando i parametri come meglio crediamo, per calcolare alcuni valori della ζ.

Valori della ζ

Utilizziamo lo sviluppo analitico trovato in precedenza (p.6), fissando i parametri come meglio crediamo, per calcolare alcuni valori della ζ.

- Sia $r = 2$. Poiché $\overline{B}_2(x) = (t - [t])^2 - (t - [t]) - \frac{1}{2}$ e $B_2 = \frac{1}{6}$, si ha

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - \frac{s(s-1)}{2} \int_1^{+\infty} \overline{B}_2(x) x^{-s-2} \mathrm{d}x + s\frac{B_2}{2}$$

dunque, ponendo $s = 0$, $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Valori della ζ

- Sia $s = -m$ e sia $r = m + 2$ (in modo che $s + r - 2 = 0$). La formula diviene

$$\zeta(-m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1} - \sum_{l=2}^{m+1} \frac{B_l}{l!} m(m-1)\cdots(m-l+2)$$

.
Se osserviamo che, siccome $B_l \neq 0$ solo se l è pari e $\frac{m(m-1)\cdots(m-l+2)}{l!} \cdot \frac{m+1}{m+1} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{l}$, ricaviamo:

$$\zeta(-m) = -\frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^{m+1} \binom{m+1}{l} B_l = -\frac{B_{m+1}}{m+1}$$

Effettivamente $\zeta(-2k) = -\frac{B_{2k+1}}{2k+1} = 0 \qquad \forall k \geq 1$!

Valori della ζ

A partire dalla **formula di riflessione di Eulero** nella versione

$$\sin(\pi s) = \frac{\pi}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \pi s \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right)$$

si ricava con la derivata logaritmica lo **sviluppo in funzioni parziali della cotangente**

$$\pi \cot(\pi s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s-n} \right)$$

a questo punto, operando su tale formula, si ottiene:

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_{2k}$$

Per completezza c'è da aggiungere che questa stessa formula può essere ricavata in maniera altrettanto semplice ragionando sulle serie di Fourier e sulla formula di Eulero-MacLaurin.

Valori della ζ

In questo modo è decisamente più sempice calcolare i valori della zeta relativi agli interi positivi:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

Calcolare $\zeta(2k+1)$ è molto molto complicato!

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

È noto che

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists!$ una scomposizione in fattori primi
$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ con p_i primo $\forall i \leq k$.

Eulero aveva capito da lì l'importanza della ζ... si era accorto infatti che la scomponibilità dei numeri interi portava ad un curioso risultato:

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{125^s} + \cdots\right) \cdots =$$

$$= \prod_{p \text{ primo}} \sum_{k=0}^{+\infty} p^{-ks} = \prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right)$$

che converge per $\Re s > 1$.

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

Molti sanno anche che i numeri primi sono distribuiti in modo apparentemente aleatorio ma, globalmente, c'è una regolarità:

Teorema dei Numeri Primi

$$\pi(x) = \#\{p \leq x | p \quad \text{primo}\} \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)}$$

Questo teorema fu congetturato indipendentemente da Gauss (1792) e Legendre (1798) e dimostrato 1896, indipendentemente da Hadamard e La Vallée-Poussin, utilizzando la relazione trovata da Eulero tra $\zeta(s)$ e numeri primi.

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

Una forma semplice della relazione tra la distribuzione dei numeri primi $\pi(x)$ e gli zeri $\rho = \beta + i\gamma$ della ζ è da

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log(2\pi) - log\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

in cui $\Lambda(n)$ è la **funzione di Von Mangoldt** ed è definita

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln(p) & \text{se } n = p^k \text{ per qualche } k\ , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il teorema dei numeri primi può anche essere scritto come segue:

$$\Psi(x) \sim x$$

Poiché $|x^\rho| = x^\beta$ segue che perché il teorema sia valido si deve necessariamente avere $\beta < 1$, di conseguenza anche $\beta > 0$.

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

L'*ipotesi di Riemann*, tuttora indimostrata e per la quale sono stati messi in palio dal Clay Institute 1.000.000 di dollari, afferma che tutti gli zeri $\zeta(\beta + i\gamma) = 0$ in $0 < \Re s < 1$ hanno parte reale $\beta = \frac{1}{2}$.

Una formulazione equivalente a questa ipotesi è il fatto che nel teorema dei numeri primi vale la seguente stima:
$\forall \epsilon > 0$

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log(t)} + \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$$

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

Infine, non possiamo non citare un'ultima formulazione equivalente ad RH. Consideriamo la **Funzione di Möbius** $\mu(d)$ definita

$$\sum_{d|m} \mu(m) = \delta_i^m = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Una sua importante proprietà è la seguente legge di inversione

$$g(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} f(mx) \Longleftrightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mu(m) g(mx)$$

.

I numeri primi e l'ipotesi di Riemann

Si definisce **trasformata di Mellin** di una funzione f, una funzione f^* così definita:

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x$$

Poiché $f(mx) = \mathcal{M}^{-1}[m^{-s}f^*(s); x]$, sommando su m otteniamo $\sum_{m=1}^{+\infty} f(mx) = \mathcal{M}^{-1}[\zeta(s)f^*(s); x]$, da cui, applicando il principio di inversione si ricava
$g^*(s) = \zeta(s)f^*(s) \iff f^*(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu m}{m^s} g^*(s)$.
A questo punto è immediato che

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Cioè la funzione zeta e la funzione di Möbius sono strettamente legate, tant'è che *capire l'andamento asintotico di* $\sum_{m\leq N} \mu(m)$ *equivale a dimostrare l'ipotesi di Riemann*!