

VETTORI

Grandezze Scalari e vettoriali §.1

Le grandezze fisiche (cioè che misurabile e per cui è definita una unità di misura) si dividono due categorie, grandezze scalari e grandezza vettoriali.

Si definisce scalare una grandezza che per essere identificata ha bisogno solo di un **numero** (modulo[numero positivo] o scalare) seguito da una unità di misura (*la valuta, la superficie, il volume, la massa, la densità, il lavoro, l'energia, ecc.*) .

Una grandezza vettoriale per essere identificata ha bisogno del **modulo** (nelle forze è chiamato intensità), della **direzione** e del **verso**; per le forze è necessario anche il **punto di applicazione**. *Sono grandezze vettoriali : le forze, le velocità, l'accelerazioni, i momenti, le quantità di moto, ecc.*

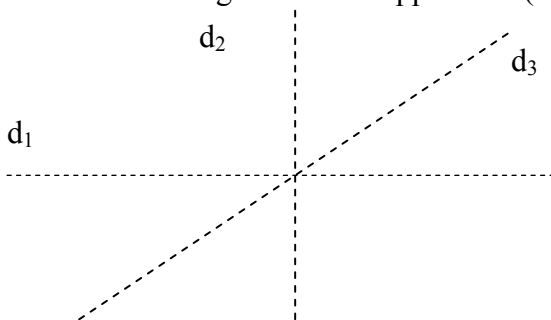
Scrivere una grandezza come vettore, bisogna scriverla \vec{F} . Una grandezza vettoriale deve essere rappresentata con un segmento (per darne le caratteristiche), di lunghezza proporzionale al modulo della grandezza attraverso una scala, dotato di freccia .



MODULO : si scrive $|F|$, cioè il modulo di F , matematicamente il modulo è una funzione (“operazione”) matematica che fa in modo che quanto è compreso tra le sbarre abbia come risultato un numero positivo.

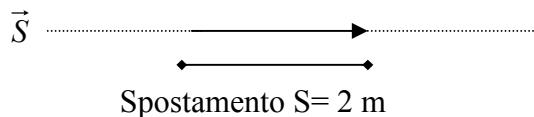
$$|2|=2 \quad \text{e} \quad |-2|=2$$

DIREZIONE: è la retta immaginaria a cui appartiene (di cui fa parte) il segmento che rappresenta il vettore

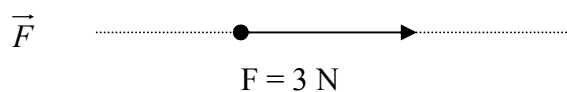


Per una massa basta dire $m = 10 \text{ kg}$ (il modulo è 10) , per una superficie o area basta dire $S = 30 \text{ m}^2$ (30 è il modulo)

VERSO: è rappresentato dalla freccia che è parte integrante del vettore, per ogni direzione si possono avere due versi.



Punto di Applicazione: Esiste per solo per le forze, ed è il punto dove agisce la forza, rappresentato da un punto insieme al vettore.



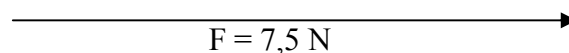
Rappresentazione in scala di un vettore §.2

La rappresentazione in scala è molto importante; la utilizziamo molto nella nostra vita quotidiana, es. quando dobbiamo fare un disegno tecnico di qualcosa, riportando le sue dimensioni fisiche, su un foglio che ha dimensioni comunque limitate; oppure quando si usa lo zoom sul computer, es. l'immagine, viene tutta ingrandita/rimpicciolita del fattore scelto, cioè il fattore di scala.

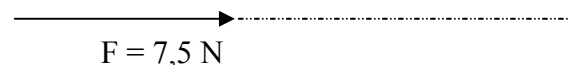
Poiché un vettore è un segmento orientato (dotato di freccia), deve essere rappresentato (disegnato) in modo appropriato. La lunghezza del vettore è proporzionale al modulo attraverso una scala fissata che deve essere unica, cioè si disegnassero due, tre, quattro vettori, bisognerebbe usare la stessa scala di rappresentazione. Il vettore $F = 3\text{N}$ poteva essere rappresentato lungo come a pagina precedente, oppure più lungo o più corto a secondo della scala usata.

- **Scala esplicitata** : Se la scala è nota bisogna attenersi ad essa es.

scala = $1 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ vuol dire che 1 cm di lunghezza rappresenta a il modulo di 1 N, se volessi rappresentare una forza di 7,5 N di modulo, devo disegnare un vettore lungo 7,5 cm;

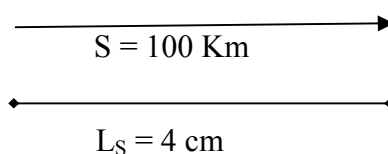


mentre se volessi usare una scala = $2,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ (cioè 2,5 N per ogni centimetro), il vettore di 7,5 N di modulo è lungo 3 cm.



Chiaramente se ci riferissimo allo spostamento la scala sarebbe $\frac{\text{m}}{\text{cm}}$ oppure $\frac{\text{km}}{\text{cm}}$, ma volendo essere più precisi potreste usare valore grandezza per millimetro di lunghezza di vettore, cioè le scale sopra diventerebbero 0,1 N per mm ($0,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$) e l'altra 0,25 N per millimetro.

- **Scala da stabilire**: se invece avessimo già un vettore disegnato e volessimo stabilire la scala, si deve dividere il modulo della grandezza fratto la lunghezza del vettore misurata con il righello (inclusa la freccia).



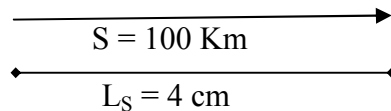
$$\text{Scala} = \frac{|S|}{L_S} = \frac{100\text{km}}{4\text{cm}} = 25 \frac{\text{km}}{\text{cm}} \quad \text{cioè 1 cm rappresenta (in questo caso) uno spostamento di 25 Km}$$

Riportiamo di seguito la formula della scala e le formule inverse

$$\text{Scala} = \frac{\text{Valore}}{\text{Lunghezza}} ; \quad \text{Valore} = \text{Scala} \times \text{Lunghezza} \quad (\text{molto utile}) ; \quad \text{Lunghezza} = \frac{\text{Valore}}{\text{scala}} ;$$

Avendo un vettore già disegnato e per cui è possibile stabilire la scala, per quanto detto in precedenza, potrebbe essere richiesto di disegnarne un altro, formante un certo angolo con esso , di un certo valore, **chiaramente usando la stessa scala**

Es. disegnarne un vettore spostamento di 70 km , che forma un angolo di 90° con quello dato di seguito sotto.



Prima di procedere , devo sapere quanto lungo lo devo disegnare?

Premesso che devo usare la stessa scala usata per rappresentare il vettore dato: trovo la scala e poi uso le formule come a pagina precedente, oppure impianto una proporzione, possibile per la premessa che le scale di rappresentazione di ciascun vettore devono essere uguali.

Poiché la scala l'avevamo trovata (vedi pag.3) , cioè $25 \frac{\text{km}}{\text{cm}}$, un vettore di 70 km deve essere

lungo :
$$\boxed{\text{Lunghezza}} = \frac{\text{Valore}}{\text{scala}} = \frac{70\text{km}}{25 \frac{\text{km}}{\text{cm}}} = 2,8 \text{ cm}$$

oppure
$$\boxed{\text{Valore } |V_1| : \text{Lunghezza } V_1 = \text{Valore } |V_2| : \text{Lunghezza } V_2}$$

(V_1 e V_2 sono le grandezza vettoriali , nell'esempio lo spostamento $S_1 = 100 \text{ km}$ e $S_2 = 70 \text{ Km}$. La lunghezza la ottieni misurando il vettore con il righello, $L_{V1} = 4 \text{ cm}$.

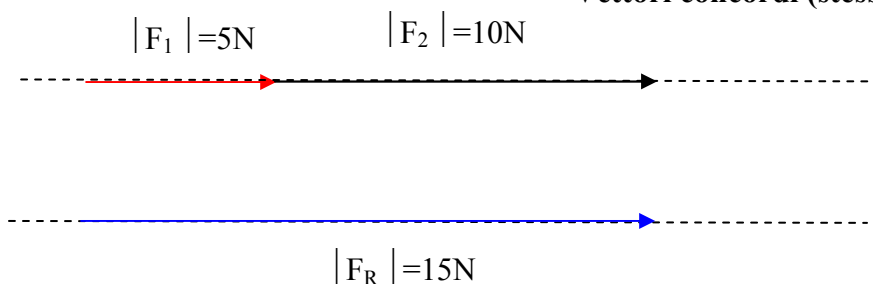
$$100 \text{ km} : 4 \text{ cm} = 70 \text{ km} : X \quad X = \frac{4\text{cm} \times 70\text{km}}{100\text{km}} = 2,8 \text{ cm}.$$

Operazioni con i vettori §.3

Vettori con la stessa direzione

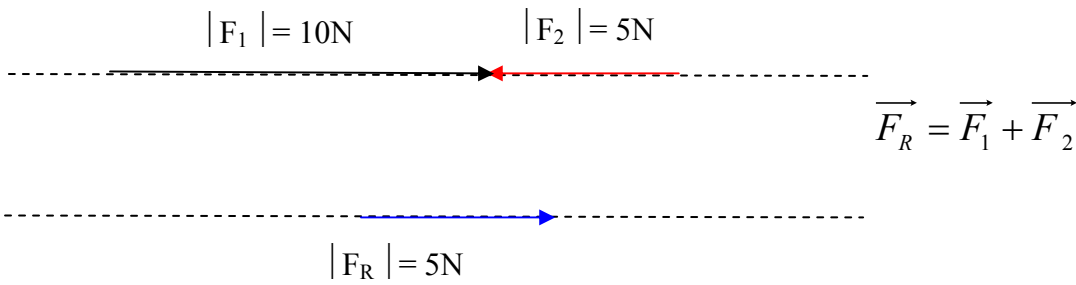
In questo caso la somma di due vettori che hanno la stessa direzione, deve essere intesa come somma algebrica del modulo (uno considerato positivo e l'altro di verso opposto negativo), mentre il verso è quello del vettore che ha modulo maggiore.

Vettori concordi (stesso verso)



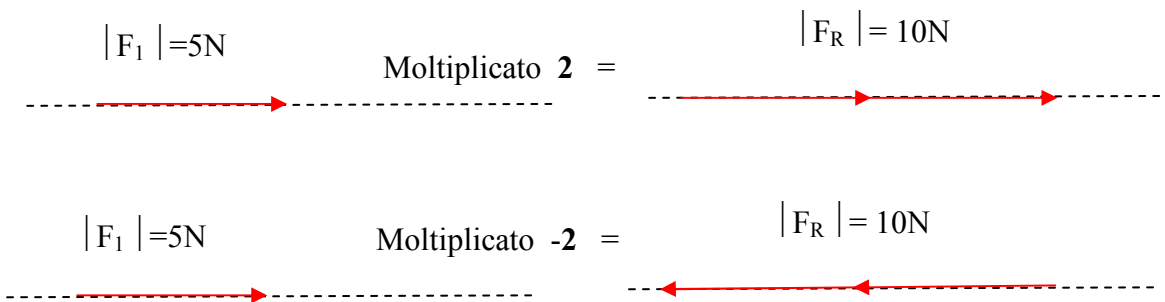
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Vettori discordi (verso opposto)



Prodotto di un vettore per uno scalare

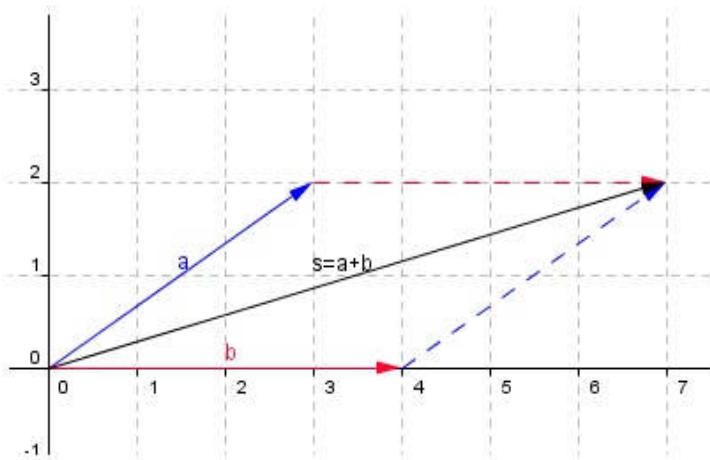
Moltiplicando un vettore per un numero (scalare), si ottiene un vettore di modulo pari al prodotto numerico del valore del modulo del vettore per il numero e con lo stesso verso, mentre se il numero fosse negativo in più si inverte il verso del vettore.



Somma di vettori con direzioni diverse

Se avessimo due vettori con diverse direzioni, i metodi per tracciare il vettore somma (risultante) sono due di tipo grafico: **metodo del parallelogramma** e **metodo punta-coda**;

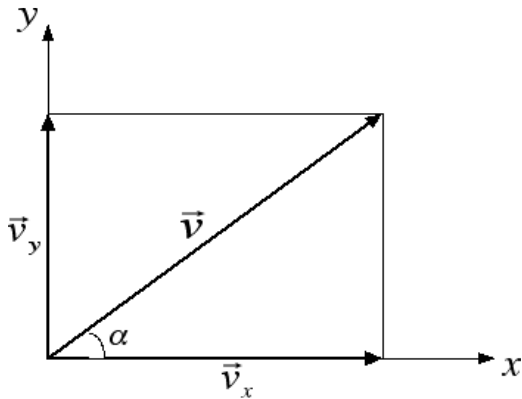
Metodo del Parallelogramma



La somma dei due vettori **a** e **b** si fa facendo in modo che i due vettori abbiano le code comuni (inizi) e se questi non le abbiano si traslano i vettori (si spostano senza variare l'inclinazione, facendo in modo di far coincidere gli inizi (code)). Si traccia la parallela ad **a** (linea tratteggiata blu) che passa per l'estremo di **b**, la parallela (linea tratteggiata rossa) a **b** che passa per l'estremo di **a**. Tracciata la risultante (linea nera), mediante la sua misura con il righello e la scala, possiamo ricavare il valore del suo modulo, dove la risultante è la diagonale (

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{S}$ che non è la somma aritmetica del valore di a e di b , ma ne rappresenta la somma vettoriale, cioè indica la direzione e il verso del vettore S , mentre il modulo si trova attraverso la scala (vedi rappresentazione in scala di un vettore)

Vettori formanti un angolo di 90°



Se i Vettori formassero tra loro un angolo di 90° (angolo tra V_x e V_y) allora potremmo tracciare la risultante con il metodo del parallelogramma visto prima e per trovarne il valore, **solo in questo caso**, potremmo usare il teorema di Pitagora.

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

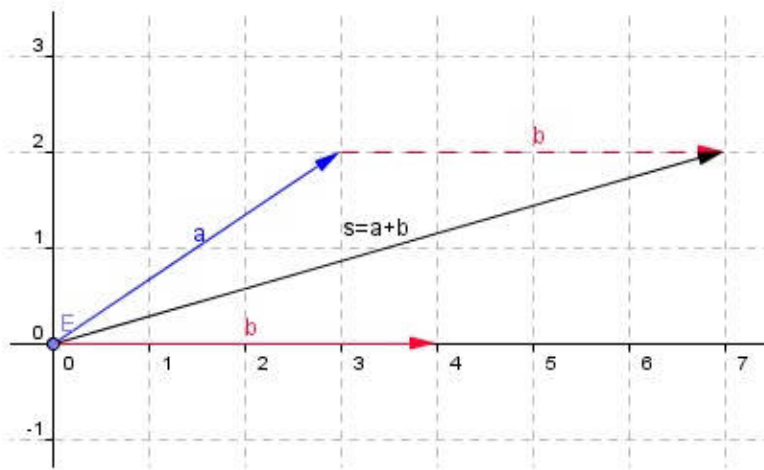
$$|V_x| = \sqrt{V^2 - V_y^2} ;$$

$$|V_y| = \sqrt{V^2 - V_x^2} .$$

Esempio se $V_x = 4 \text{ m/s}$ e $V_y = 3 \text{ m/s}$

$$|V| = \sqrt{4^2 \left(\frac{m}{s}\right)^2 + 3^2 \left(\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{16 \frac{m^2}{s^2} + 9 \frac{m^2}{s^2}} = \sqrt{25 \frac{m^2}{s^2}} = 5 \frac{m}{s} .$$

Metodo Punta-Coda



In questo metodo si deve fare in modo che la punta di un vettore coincida con la coda dell'altro da sommare, facendo le opportune traslazioni. Nell'esempio a e b avevano le code coincidenti, è stato traslato b (tratteggiato rosso), facendo coincidere la punta del vettore a con la coda di b , la risultante è il vettore che unisce la coda di a con la punta di b (linea nera). La risultante stabilisce la direzione e il verso del vettore somma, ma non ne da il valore,

che deve essere stabilito in base alla sua lunghezza e alla scala di rappresentazione usata. (Il disegno sopra non è rappresentato in scala).

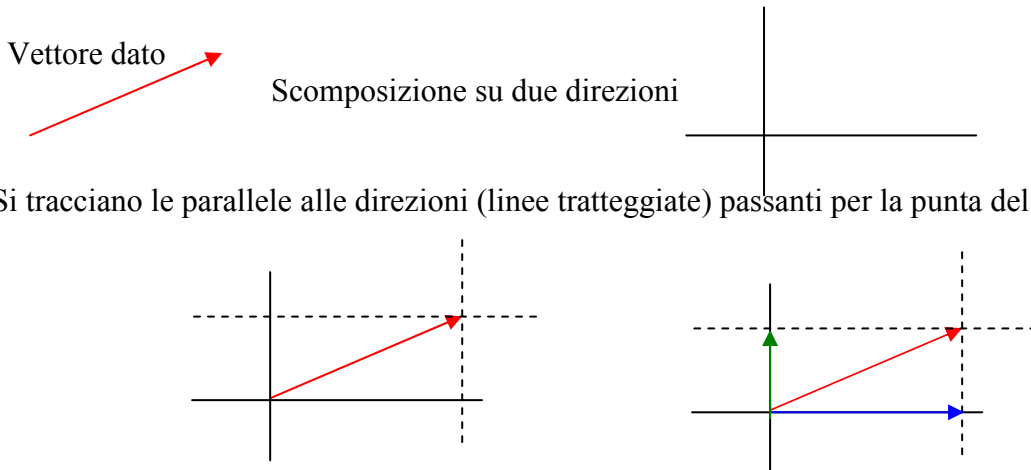
Es. se la scala usata fosse $7,41 \frac{N}{cm}$, misurando la lunghezza di S (es. $9,7 \text{ cm}$) allora si ha che il

modulo del vettore è $7,41 \frac{N}{cm} \times 9,7 \text{ cm} = 71,877 \text{ N} \approx 71,9 \text{ N}$

Composizione e scomposizione di un vettore §.4

Per quanto visto nei paragrafi precedenti (metodo del parallelogramma) due vettori formanti un angolo si sommano e da due ne otteniamo un terzo la risultante, che corrisponde alla somma vettoriale, cioè si opera una composizione.

Ora ci chiediamo se è possibile che dato un vettore, questo si può scomporre in due vettori lungo due direzioni stabilite. La logica di procedura è simile al metodo del parallelogramma al contrario.



Si tracciano le parallele alle direzioni (linee tratteggiate) passanti per la punta del vettore dato

I vettori ottenuti (verde e blu) dalla scomposizione del vettore (rosso), sono la proiezione (come l'ombra di qualcosa illuminata che si vede su un piano) del vettore sulle due direzioni.

Il modulo dei vettori ottenuti dalla proiezione bisogna ottenerlo misurandolo con un righello e attraverso la scala si ottiene il valore oppure ci sono degli strumenti messi a disposizione dalla matematica (trigonometria).

Proiezioni mediante operatori (funzioni) trigonometrici

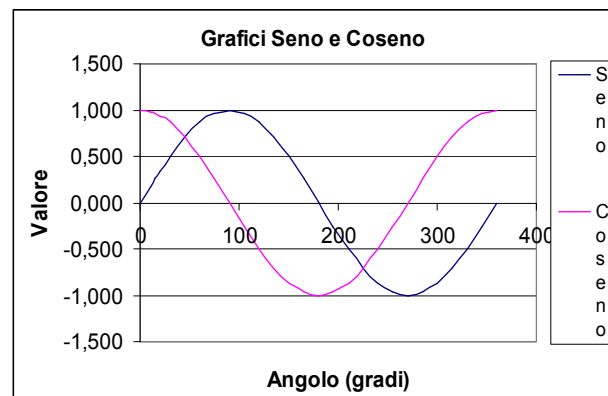
Esistono due operatori (funzioni) matematiche che mi permettono di ricavare il modulo (o Intensità) dei vettori ottenuti dalla scomposizione e quindi dalla proiezione del vettore dato su due direzioni.

Questi operatori sono: il "seno di alfa" ($\sin\alpha$) ed il "coseno di alfa" ($\cos\alpha$), dove " α " è l'angolo.

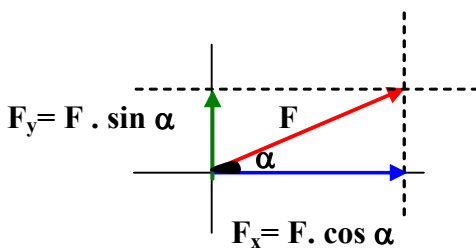
angolo α (gradi) [deg]	angolo α (radianti) [rad]	$\sin \alpha$ [n]	$\cos\alpha$ [n]
0	0,00	0,000	1,000
10	0,17	0,174	0,985
15	0,26	0,259	0,966
20	0,35	0,342	0,940
30	0,52	0,500	0,866
45	0,79	0,707	0,707
60	1,05	0,866	0,500
75	1,31	0,966	0,259
90	1,57	1,000	0,000
105	1,83	0,966	-0,259
120	2,09	0,866	-0,500
135	2,36	0,707	-0,707
150	2,62	0,500	-0,866
165	2,88	0,259	-0,966

Come emerge dai valori che possono assumere questi operatori (funzioni), il valore massimo è **1** ed il minimo è **-1**.

Come si evidenzia dal grafico (sinusoide), queste funzioni si ripetono per $\alpha > 360^\circ$ e tra di loro sono sfasate di 90° (una è max, l'altra è zero).



angolo α (gradi) [deg]	angolo α (radianti) [rad]	$\sin \alpha$ [n]	$\cos \alpha$ [n]
180	3,14	0,000	-1,000
195	3,40	-0,259	-0,966
210	3,67	-0,500	-0,866
225	3,93	-0,707	-0,707
240	4,19	-0,866	-0,500
255	4,45	-0,966	-0,259
270	4,71	-1,000	0,000
285	4,97	-0,966	0,259
300	5,24	-0,866	0,500
315	5,50	-0,707	0,707
330	5,76	-0,500	0,866
345	6,02	-0,259	0,966
360	6,28	0,000	1,000



Es. Per una forza $F = 300 \text{ N}$ applicata in modo da formare un angolo con l'orizzontale di $\alpha = 30^\circ$, le componenti sono:

$$F_x = 300 \text{ N} \cdot \cos(30^\circ) = 300 \text{ N} \cdot 0,866 = 259,81 \text{ N}$$

$$F_y = 300 \text{ N} \cdot \sin(30^\circ) = 300 \text{ N} \cdot 0,5 = 150 \text{ N}$$

Le funzioni sono disponibili sulle calcolatrici scientifiche, ma bisogna stare attenti a com'è impostato l'angolo, se in **RAD** (radianti) o **DEG** (gradi decimali), si consiglia il secondo modo di impostazione.

Link Consigliati

<http://www.itg-rondani.it/dida/fisica/fad0/modulo1/ud05%20vet/appr05/risultanti.htm> ;

<http://lucianopirri.altervista.org/Fisica/appunti/Fisica015.html> ;

http://www.openfisica.com/fisica_ipertesto/openfisica1/somma_vettori.php ;