Formulario di Matematica

v.5.201α

Daniele Angella
daniele.angella@gmail.com

07/05/2005

0.1 Prefazione

> Primo: La Biblioteca esiste ab aeterno. Di questa verità, il cui corollario immediato è l'eternità futura del mondo, nessuna mente ragionevole può dubitare. L'uomo, questo imperfetto bibliotecario, può essere opera del caso o di demiurghi malevoli; l'universo, con la sua elegante dotazione di scaffali, di tomi enigmatici, di infaticabili scale per il viaggiatore e di latrine per il bibliotecario seduto, non può essere che l'opera di un dio. [. . .]
> Secondo: Il numero dei simboli ortografici è di venticinque([1]). Questa constatazione permise, or sono tre secoli, di formulare una teoria generale della Biblioteca e di risolvere soddisfacentemente il problema che nessuna congettura aveva permesso di decifrare: la natura informe e caotica di quasi tutti i libri.

J.L. Borges, *La Biblioteca di Babele*

Questo documento è stato scritto con LaTeX 2_ε ed è disponibile sui siti

`http://daniangella.interfree.it`;

`http://www.matematicamente.it`;

`http://edu.os3.it`.

Ogni commento, suggerimento o correzzione è ben accetto.
Grazie a chi mi ha aiutato nella correzione e dato utili consigli (Daniele Marconi (`daniele.marconi@email.it`), Leonardo Ferro (`leonardoferro@gmail.com`), Luigi Amedeo Bianchi, ing. Francesco Pio Placentino) e soprattutto a chi mi ha insegnato (e fatto piacere) la matematica!
In copertina: Luigi Poletti (Pontremoli 1864-1967). Grazie a Marco Angella.

[1] Il manoscritto originale non contiene cifre né maiuscole. La punteggiatura è limitata alla virgola e al punto. Questi due segni, lo spazio, e le ventidue lettere d'alfabeto, sono i venticinque simboli sufficienti che enumera lo sconosciuto [N. d. E.].

Parte I

Formulario

Capitolo 1

Logica e Insiemistica

1.1 Logica

1.1.1 Definizioni

Definizione 1 (Proposizione, Enunciato) *Si dice* proposizione *(o* enunciato*) un'espressione del linguaggio naturale per cui sia possibile attribuire un valore di verità (vero=T=1=$\top$; falso=F=0=$\bot$). Una proposizone si dice* complessa *se é composta da proposizioni* semplici *collegate tra loro da* connettivi logici.

Definizione 2 (Predicato) *Si dice* predicato *una frase contenente variabili che diventi una proposizione qualora si specifichi il valore delle variabili stesse.*

1.1.2 Connettivi Logici

- **non** $\neg$ (oppure: $\neg p \equiv \bar{p}$); unario; complementare; $\neg p$ ha valore vero sse p ha valore falso;

- **e** $\wedge$; binario; intersezione; $p \wedge q$ ha valore vero sse p e q hanno entrambi valore vero;

- **o** $\vee$; binario; unione; $p \vee q$ ha valore vero se almeno uno tra p e q ha valore vero;

- **se ... allora, implica, condizione sufficiente affinchè q..., condizione necessaria affinchè p...** $\Longrightarrow$; binario; $p \Longrightarrow q$ ha valore vero se p ha valore falso o se sia p che q hanno valore vero;

- **se e solo se (sse, iff), coimplica, condizione necessaria e sufficiente (cnes)** $\Longleftrightarrow$; binario; $p \Longleftrightarrow q$ ha valore vero se p ha lo stesso valore di verità di q.

1.1.3 Tabelle di Verità

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabella 1.1: Tavole di Verità

1.1.4 Leggi logiche notevoli

☛ Tabella 1.2 a pag.7

1.2 Insiemistica

Definizione 3 (Insieme) $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x|\mathcal{P}(x)\}$.

Definizione 4 (Intersezione) $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$

Definizione 5 (Unione) $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$

Definizione 6 (Differenza) $A \setminus B = \{x|x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

Definizione 7 (Differenza simmetrica) $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$

Definizione 8 (Complementare) *Detto* $\mathcal{U}$ *l'insieme universo,* $A^c = cA = \bar{A} = \{x|x \in U \setminus A\} = \{x|\neg(x \in A)\}$

Definizione 9 (Insieme (potenza) delle parti) $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{E|E \subseteq A\}$
$\mathcal{P}(A) = 2^A$

Definizione 10 (Coppie ordinate) $(x, y) = \langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Definizione 11 (Prodotto cartesiano) $A \times B = \{(x, y)|x \in A \wedge y \in B\}$
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|x_i \in A_i \forall i = \{1, 2, \cdots, n\}\}$

Proposizione 1 (Leggi di de Morgan) $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

$A \Rightarrow A$	legge dell'identità
$A \Leftrightarrow \neg\neg A$	legge della doppia negazione
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	commutatività di $\wedge$
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	associatività di $\wedge$
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	commutatività di $\vee$
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	associatività di $\vee$
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	idempotenza di $\wedge$
$A \vee A \Leftrightarrow A$	idempotenza di $\vee$
$A \wedge B \Leftrightarrow A$	eliminazione di $\wedge$
$A \Leftrightarrow A \vee B$	introduzione di $\vee$
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	distributività
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	distributività
$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	legge di assorbimento
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	legge di assorbimento
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	legge di de Morgan
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	legge di de Morgan
$\neg A \vee A \Leftrightarrow \top$	legge del terzo escluso
$\neg(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow \top$	legge di non contraddizione
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \vee \neg A)$	definizione di implicazione
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	legge di contrapposizione (contronominale)
$A \wedge \neg A$	Lewis (ex falso quodlibet)
$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	affermazione del conseguente
$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	negazione dell'antecedente
$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$	legge di riduzione all'assurdo
$(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$	riduzione all'assurdo debole
$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$	consequentia mirabilis
$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$	legge di Peirce
$((A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)) \Rightarrow \top$	legge di Dummett
$A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$	modus ponens
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	scambio antecedenti
$((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (A \vee B \Rightarrow C)$	distinzione di casi
$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	distinzione di casi
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	distributività di $\Rightarrow$
$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	transitività di $\Rightarrow$
$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$	importazione/esportazione delle premesse

Tabella 1.2: Leggi Logiche Notevoli

Capitolo 2

Algebra Elementare

2.1 Definizione di $\mathbb{R}$

La struttura $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ è un anello. Si definisce una relazione d'ordine totale $\leq$. I primi 4 assiomi definiscono $[\mathbb{R}, +]$ come gruppo, $[\mathbb{R} \backslash \{0\}]$ come gruppo, inoltre vale l'assioma di continuità in una delle sue 4 forme.
R è quindi definito assiomaticamente da:

S1 la somma è associativa;

S2 la somma è commutativa;

S3 esiste l'elemento neutro della somma (zero, 0);

S4 ogni elemento (x) di $\mathbb{R}$ ha inverso (opposto, $-x$);

P1 il prodotto è associativo;

P2 il prodotto è commutativo;

P3 esiste l'elemento neutro del prodotto (uno, 1);

P4 ogni elemento (x) di $\mathbb{R} \setminus 0$ ha elemento inverso (reciproco, $\frac{1}{x} = 1/x = x^{-1}$);

SP il prodotto è distributivo rispetto alla somma;

OS $x \leq y \Rightarrow$x+z$\leq y + z \forall z \in \mathbb{R}$;

OP $x \leq y \Rightarrow$x$\dot{z} \leq y\dot{z} \forall z \in \mathbb{R}, z \geq 0$;

Dedekind siano A e B due insiemi separati, cioè tali che $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$; allora $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq b \leq c$.

Definizione 12 (Retta reale estesa) *Si definisce l'insieme* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *detto* estensione dell'insieme dei reali.

2.2 Scomposizioni Notevoli

2.2.1 Potenza di un polinomio

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Casi particolari: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
$(a \pm b \pm c)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \pm 2bc + c^2 \pm 2ca$.

2.2.2 Fattorizzazione

$$\mathcal{P}(x) = a_n \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

$\mathcal{P}(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)$
$\forall n \in \mathbb{N} : x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1} + x^{n.2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$
$\forall n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} : x^n + y^n = (x+y) \cdot (x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1})$

Casi particolari: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

2.2.3 Risoluzione di equazioni di secondo grado in una incognita

$\mathcal{P}(x) = ax^2 + bx + c$: $\quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;
$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a}$ con $\beta := \frac{b}{2}$

2.3 Radicali doppi

$\sqrt{\mathcal{A} \pm \sqrt{\mathcal{B}}} = \sqrt{\frac{\mathcal{A} + \sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathcal{A} - \sqrt{\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}}}{2}}$

2.4 Disequazioni irrazionali

– $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

– $\sqrt{f(x)} < g(x)$

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

2.5 Potenze

2.5.1 Definizione

Definizione 13 (Logaritmo) *$\forall y \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, si definisce la radice n-esima di y come:*
$\sqrt[n]{y} = y^{1/n} = sup\{x \in \mathbb{R} : x^n < y\} = inf\{x \in \mathbb{R} : x^n > y\}$

2.5.2 Proprietà

$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$a^m = e^{m \cdot \log a}$
$a^{\frac{1}{n}} =^n \sqrt{a}$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

2.6 Logaritmi

2.6.1 Definizione

Definizione 14 (Logaritmo) $a = \log_b c \Leftrightarrow b^a = c$

2.6.2 Proprietà

$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$
$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
$\log_a m^\alpha = \alpha \cdot \log_a m \text{ con } \alpha \in R$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

2.7 Modulo o Valore Assoluto

2.7.1 Definizione

Definizione 15 (Modulo, Valore Assoluto) *Si definisce* modulo p valore assoluto *la funzione:*
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty]$
$f(x) = |x| = \mathsf{mod}(x) = \mathsf{max}\{x, -x\} = \sqrt{x^2}$.

2.7.2 Proprietà (Spazi Metrici)

M1 $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$

M2 $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

M3, omogeneità $\forall \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, |\lambda \cdot a| = |\lambda| \cdot |a|$

M4, disuguaglianza triangolare $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a + b| \leq |a| + |b|$,
$||a| - |b|| \leq |a - b|$

La `M4` in generale assume la forma:

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

2.8 Altre funzioni

2.8.1 Fattoriale, Semifattoriale

Definizione 16 (Fattoriale) $\forall n \in \mathbb{N}, n! = fatt(n) = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.
É definito ricorsivamente da:
$\begin{cases} 0!=1 \\ n!=n \cdot (n-1)! \end{cases}$

Definizione 17 (Semifattoriale) $\forall k \in \mathbb{N}, (2k+1)!! = \prod_{i=0}^{k}(2i+1)$*;*
$(2k)!! = \begin{cases} 1 & se\ k=0 \\ \prod_{i=1}^{k} & se\ k>0 \end{cases}$
$Si definisce inoltre$ *(-1)!!=1.*

2.8.2 Segno

Definizione 18 (Segno) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathsf{signum}(x) = \mathsf{sign}(x) = \mathsf{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$

2.8.3 Parte intera, parte decimale

Definizione 19 (Parte Intera) $x \overset{def}{=} max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

Definizione 20 (Parte Decimale) $\{x\} \overset{def}{=} x - x$

2.8.4 Parte positiva, Parte negativa

Definizione 21 (Parte positiva, f^+) $f^+ = \mathit{max}\{f, 0\}$

Definizione 22 (Parte negativa, f^-) $f^- = \mathit{min}\{f, 0\}$

Osservazione 1 $|f| = f^+ - f^-$
$f = f^+ + f^-$
$\max\{f, g\} = (f - g)^+ + g$
$\min\{f, g\} = (f - g)^- + g$

Osservazione 2 $a, b \in \mathbb{R} : a < b$,
$b^+ - a^+ \leq b - a$;
$b^- - a^- \leq b - a$

2.8.5 Funzione di Dirichlet

Definizione 23 (Funzione di Dirichlet) $f(x) = \begin{cases} \mathit{1} & se\ x \in \mathbb{Q} \\ \mathit{0} & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

2.8.6 Funzioni iperboliche

Definizione 24 (Seno iperbolico) $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\sinh x = \mathit{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Definizione 25 (Coseno iperbolico) $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$
$\cosh x = \mathit{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Osservazione 3 $\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$.

Definizione 26 (Tangente iperbolica) $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\tanh x = \mathit{th}x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Definizione 27 (Cotangente iperbolica) $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$\coth x = \mathit{cth}x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

Definizione 28 (Arcoseno iperbolico, Settore Seno iperbolico) $\mathit{ash} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathit{sett\ sinh}y = \mathit{ash}y = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$

Definizione 29 (Arcocoseno iperbolico, Settore Coseno iperbolico)
$\mathsf{ach} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathsf{sett\ cosh}y = \mathsf{ach}y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$

Definizione 30 (Arcotangente iperbolica, Settore Tangente iperbolica)
$\mathsf{ath} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\mathsf{sett\ tanh}x = \mathsf{ath}y = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}$

2.8.7 Funzione Esponenziale, $e^x = \mathsf{exp}(x)$

Teorema 1 (Esistenza ed Unicità della funzione esponenziale) $\exists!$ *la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *che verifichi le proprietà:*

1. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$;

2. $f(1) = e$ *(dove* e *è il* numero di Nepero*);*

ed è la funzione esponenziale *definita* $\forall x \in \mathbb{R}$ *da* $f(x) = e^x = \mathsf{exp}(x)$.

Definizione 31 *Si definisce* $f(x) = a^x = e^{x \log a}$.

2.9 Serie

2.9.1 Serie Aritmetiche

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

2.9.2 Serie Geometriche

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ con q $\neq 1$

Se $q = 1$ si ha $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n \cdot a_1$

$S_{k,n} = \sum_{i=k}^{n} a_i = q^k \cdot \dfrac{1 - q^{n-k+1}}{1 - q}$ con q $\neq 1$

2.9.3 Disuguaglianze Notevoli

- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], |\sin x| \leq |x|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \geq -1, (1+a)^n \geq 1+a \cdot n$ (**disuguaglianza di Bernoulli**)
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$
- $\forall x > -1, \log(x+1) \leq x$
- $\forall a, b > 0, p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a \cdot b \leq \frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q$ (**disuguaglianza di Young**)

2.9.4 Sommatorie Classiche

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$
$$\sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = (1+1)^n = 2^n$$
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) = 0$$

Capitolo 3

Geometria

3.1 Goniometria

3.1.1 Relazione Fondamentale

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

3.1.2 Tangente e Cotangente: Definizioni

Definizione 32 (Tangente) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Definizione 33 (Cotangente 1) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \forall x \neq k\pi$

Definizione 34 (Cotangente 2) $\cot x = \frac{1}{\tan x} \forall x \neq k\frac{\pi}{2}$

3.1.3 Secante e Cosecante: Definizioni

Definizione 35 (Secante) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

Definizione 36 (Cosecante) $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
$\csc : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$

3.1.4 Formule di Addizione

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}$

3.1.5 Formule di Duplicazione e di Triplicazione

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

3.1.6 Formule di Bisezione

$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\tan(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3.1.7 Formule Parametriche

$$t \stackrel{def}{=} \tan\frac{\alpha}{2} \longrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

3.1.8 Formule di Prostaferesi

$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3.1.9 Formule di Werner

- $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
- $\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta))$
- $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$
- $\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))$

3.1.10 Formule di Conversione

☛ Tabella 3.1 a pag.19

$\swarrow$	Sin	Cos	Tan
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$
$\cot\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\tan\alpha}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}$
$\csc\alpha$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$

Tabella 3.1: Formule di Conversione

3.1.11 Archi Noti

☛ Tabella 3.2 a pag.19

Rad	Deg	Sin	Cos	Tan	Cot
0	0°	0	1	0	n.e.
$\frac{\pi}{12}$	15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{8}$	22°30′	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{2}+1$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3}{8}\pi$	67°30′	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{5}{12}\pi$	75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	n.e.	0

Tabella 3.2: Archi noti

3.1.12 Archi Associati

☛ Tabella 3.3 a pag.20

3.2 Trigonometria

3.2.1 Triangolo Qualsiasi

Area: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$

$S = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

Teorema 2 (Formula di Erone) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Rad	Sin	Cos	Tan	Cot
x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\pi - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\pi + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$2\pi - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$
$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$
$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$

Tabella 3.3: Archi associati

Teorema 3 (Formula di Brahmagupta o di Erone per quadrilateri ciclici) *Dato un quadrilatero ciclico (cioè inscrivibile in una circonferenza) di lati a, b, c, d e semiperimetro $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, l'area vale $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$; per $d = 0$, in particolare, si ottiene la formula di Erone per il triangolo.*

Teorema 4 (delle Corde) *:* $\bar{AB} = 2r \sin\alpha$

Teorema 5 (dei Seni) *:* $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha} = 2R = \frac{abc}{4S}$

Proiezioni: $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$;
$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$;
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

Teorema 6 (di Carnot o del Coseno) *:*
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$;
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

3.2.2 Triangolo Rettangolo

Se a,b e c sono le misure rispettivamente dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo e α , β e γ sono le misure degli angoli opposti, sussistono le seguenti relazioni:

$b = a\sin\beta = a\cos\gamma$
$c = a\sin\gamma = a\cos\beta$
$b = c\tan\beta = c\cot\gamma$
$c = b\tan\gamma = b\cot\beta$

3.3 Geometria Analitica

3.3.1 Punto e Retta

r: $y = mx + n$ (forma implicita)

$y = ax + by + c$ (forma esplicita); $\quad m = -\frac{b}{a}$, $n = -\frac{c}{a}$

$P_1(x_1, y_1)P_2(x_2, y_2)P_3(x_3, y_3)$

$r_{P_1}\colon\ (y - y_1) = m(x - x_1)$
$s \parallel r_{P_1}$:$y_1 = m_{const}x_1 + n$
$r_{P_1P_2} : \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
$m_r = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
$r \parallel s \leftrightarrow m_r = m_s$
$r \perp s \leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$
$P_1\bar{P}_2 = dist(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
$dist(P_1, r) = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Punto medio di $P_1P_2 = (\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$
Baricentro del triangolo $P_1P_2P_3 = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$

3.3.2 Coniche 1: Circonferenza

$$\gamma : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$C(x_0, y_0) \qquad r^2 = x_0^2 + y_0^2 - c \geq 0$
$P(x', y') \in \gamma \leftrightarrow \bar{(PC)} = r$
$\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$\begin{cases} a = -2x_0 \\ b = -2y_0 \\ c = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{a}{2} \\ y_0 = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} \end{cases}$$

3.3.3 Coniche 2.1: Parabola con asse parallelo all'asse y

$$\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$$

$F(x_0, y_0); \qquad d : y = k$
$P(x', y') \in \mathcal{P} \leftrightarrow dist(P, F) = dist(P, d)$

$$\left\langle \begin{array}{lllll} y_0 > k & \rightarrow & a > 0 & \rightarrow & \smile \\ y_0 < k & \rightarrow & a < 0 & \rightarrow & \frown \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2y_0-2k} \\ b = \frac{x_0}{k-y_0} \\ c = \frac{x_0^2+y_0^2-k^2}{2y_0-2k} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = \frac{1-\Delta}{4a} \\ k = \frac{-1-\Delta}{4a} \end{cases}$$

$F(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a})$
$d : y = \frac{-1-\Delta}{4a})$
$F(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

$a : x = -\frac{b}{2a}$
$\Delta = b^2 - 4ac$

3.3.4 Coniche 2.2: Parabola con asse parallelo all'asse x

$$\mathcal{P} : x = ay^2 + by + c$$

$F(x_0, y_0); \qquad d : y = k$
$P(x', y') \in \mathcal{P} \leftrightarrow dist(P, F) = dist(P, d)$
$\left\langle \begin{array}{lllll} x_0 > k & \rightarrow & a > 0 & \rightarrow & \subset \\ x_0 < k & \rightarrow & a < 0 & \rightarrow & \supset \end{array} \right.$
$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2x_0 - 2k} \\ b = \frac{y_0}{k - x_0} \\ c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - k^2}{2x_0 - 2k} \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1-\Delta}{4a} \\ y_0 = -\frac{b}{2a} \\ k = \frac{-1-\Delta}{4a} \end{array} \right.$
$F(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$
$d : y = \frac{-1-\Delta}{4a})$
$F(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$
$a : y = -\frac{b}{2a}$
$\Delta = b^2 - 4ac$

3.3.5 Coniche 3: Ellisse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c^2 = \left\{ \begin{array}{llllllll} a^2 - b^2 & \text{se} & a > b & \rightarrow & e = \frac{c}{a} < 1 & \rightarrow & F_1(-c, 0), & f_2(c, 0) \\ b^2 - a^2 & \text{se} & b > a & \rightarrow & e = \frac{c}{b} < 1 & \rightarrow & F_1(0, -c), & f_2(0, c) \end{array} \right.$
$\mathcal{E} \cap x \equiv \qquad A(-a, 0) \quad B(a, 0)$
$\mathcal{E} \cap y \equiv \qquad C(0, -b) \quad D(0, b)$
$P(x', y') \in E \leftrightarrow \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$

3.3.6 Coniche 4.1.1: Iperbole riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse x

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c^2 = a^2 + b^2, \quad c \geq 0$
$\mathcal{I} \cap x \equiv \qquad V_1(-a, 0) \quad V_2(a, 0)$
$F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0); \qquad F_1, F_2 \in x$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = \frac{b}{a}x$
$a_2 : y = -\frac{b}{a}x$
$e = \frac{c}{a} > 1$

3.3.7 Coniche 4.1.2: Iperbole riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse y

$$\mathcal{I} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$c^2 = a^2 + b^2, \quad c \geq 0$
$\mathcal{I} \cap x \equiv \qquad V_1(0, -b) \quad V_2(0, b)$
$F_1(0, -c) \quad F_2(0, c); \qquad F_1, F_2 \in y$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = \frac{b}{a}x$
$a_2 : y = -\frac{b}{a}x$
$e = \frac{c}{b} > 1$

3.3.8 Coniche 4.2.1: Iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse x

$$\mathcal{I} : x^2 - y^2 = a^2$$

$c = a\sqrt{2} \qquad a = b$
$\mathcal{I} \cap x \equiv \qquad V_1(-a, 0) \quad V_2(a, 0)$
$F_1(-a\sqrt{2}, 0) \quad F_2(a\sqrt{2}, 0); \qquad F_1, F_2 \in x$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = x$
$a_2 : y = -x$
$e = \sqrt{2}$

3.3.9 Coniche 4.2.2: Iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse y

$$\mathcal{I} : x^2 - y^2 = -a^2$$

$c = a\sqrt{2} \qquad a = b$
$\mathcal{I} \cap y \equiv \qquad V_1(0, -a) \quad V_2(0, a)$
$F_1(0, -a\sqrt{2}) \quad F_2(0, a\sqrt{2}); \qquad F_1, F_2 \in y$
$P(x', y') \in \mathcal{I} \leftrightarrow |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : y = x$
$a_2 : y = -x$
$e = \sqrt{2}$

3.3.10 Coniche 4.3: Iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti

$$\mathcal{I} : xy = k$$

$$\begin{cases} k > 0 & \rightarrow & \mathcal{I} \cap b_{I,III} : y = x \equiv & V_1(\sqrt{k}, \sqrt{k}) \quad V_2(-\sqrt{k}, -\sqrt{k}) \\ k > 0 & \rightarrow & \mathcal{I} \cap b_{II,IV} : y = -x \equiv & V_1(\sqrt{|k|}, -\sqrt{|k|}) \quad V_2(-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}) \end{cases}$$

leftrightarrow $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$
$a_1 : x = 0$
$a_2 : y = 0$
$e = \sqrt{2}$

3.3.11 Coniche 4.4: Iperbole equilatera traslata o Funzione omografica

$$\mathcal{I} : y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$\exists \mathcal{I} \leftrightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$
$a_1 : x = -\frac{d}{c}$
$a_2 : y = \frac{a}{c}$
$e = \sqrt{2}$

3.3.12 Coniche 5: Conica generica

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a12xy + a_{13}x + a_{23}y + a33 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2}a_{13} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{21} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{array}{lll} |A| = 0 & \longrightarrow & \text{Conica Degenere} \\ |A| \neq 0 & \longrightarrow & \text{Conica Non Degenere} \end{array} \right.$$

	$\lvert\overline{A}\rvert > 0$	$\lvert\overline{A}\rvert = 0$	$\lvert\overline{A}\rvert < 0$
$\lvert A\rvert = 0$	retta immaginaria	rette reali o immaginarie parallele	retta reale
$\lvert A\rvert \neq 0$	ellisse	parabola	iperbole

Tabella 3.4: Conica Generica

3.4 Trasformazioni: Affinità[1]

$$\begin{aligned}\mathcal{T} :& \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ &(x,y) \to (x',y')\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{x=ax+by+p} \\ \text{y=cx+dy+q} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|A| \neq 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{-1} :& \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}\\ &(x',y') \to (x,y)\end{aligned}$$

$\frac{S'}{S} = |A|$

$$\begin{cases} \text{x=d}\frac{}{|A|x'+\frac{-b}{|A|}y'+\frac{-d}{|A|}p+\frac{b}{|A|}q} \\ \text{y=-c}\frac{}{|A|x'+\frac{a}{|A|}y'+\frac{c}{|A|}p+\frac{-a}{|A|}q} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{pmatrix}$$

Definizione 37 (Punto Unito) *Punti uniti sono i punti che coincidono con i trasformati.*

Definizione 38 (Retta Unita) *Rette unite sono le rette che coincidono con le trasformate.*

3.4.1 Prodotto di Affinità

Il prodotto di due affinità $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ è una affinità (indicata con $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$, dove si applica per prima $\mathcal{T}'$ e successivamente $\mathcal{T}$) la cui matrice è pari al prodotto delle matrici delle affinità di partenza.

3.4.2 Casi Particolari di Affinità

L'effetto geometrico di un'affinità coincide con la composizione di

- inclinazioni;
- simmetrie;
- dilatazioni/compressioni;
- traslazioni.

[1]prof.ssa Letizia Lorenzini

Isometria

Definizione 39 (Isometria) *L'*isometria *è un'affinità che conserva le distanze.*

Traslazione

$$\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1$$

Rotazione

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta - y\sin\theta & x=x'\cos\theta + y'\sin\theta \\ y'=x\sin\theta + y\cos\theta & y=-x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\begin{cases} x'=ax-by \\ y'=bx+ay \end{cases} \rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Rototraslazione

$$\rho : \begin{cases} x'=x\cos\theta - y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \tau : \begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}$$

$$\tau * \rho : \begin{cases} x'=x\cos\theta - y\sin\theta + p \\ y'=x\sin\theta + y\cos\theta + q \end{cases}$$

Simmetria Centrale

$$\begin{cases} \mathrm{x'=2x_0} - x \\ \mathrm{y'=2y_0} - y \end{cases}$$

con (x_0, y_0) *centro di simmetria.*

Simmetria Assiale

Simmetria Assiale con asse parallelo all'asse x

Asse: $y = y_0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x'=x} \\ \mathrm{y'=2y_0} - y \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Simmetria Assiale con asse parallelo all'asse y

Asse: $x = x_0 \rightarrow \begin{cases} x'=2x_0 - x \\ y'=y \end{cases}$ $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Simmetria Assiale con asse qualsiasi

Asse:

$$y = mx + q \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{(1-m^2)x+2my-2mq}{1+m^2} \\ y' = \frac{2mx+(m^2-1)x+2q}{1+m^2} \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{vmatrix} = -1$$

Omotetia

x'=ax+h
y'=ay+k $|A| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 > 0$

Similitudine

Isometria * Omotetia = Similitudine

Similitudine Diretta

x'=ax-by+p
y'=bx+ay+q $|A| = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$

Similitudine Inversa

x'=ax+by+p
y'=bx-ay+q $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 < 0$

Dilatazione e Compressione

$|k| > 1 \rightarrow$ dilatazione
$|k| < 1 \rightarrow$ compressione

Dilatazione/Compressione lungo l'asse x

x'=kx
y'=y

Dilatazione/Compressione lungo l'asse y

x'=x
y'=ky

Inclinazione

Inclinazione lungo l'asse x

x'=x+ky
y'=y

Inclinazione lungo l'asse y

x'=x
y'=y+kx

3.4.3 Proprietà Invarianti delle Affinità

- Un'affinità trasforma rette in rette;
- se due rette si intersecano in un punto P allora le rette trasformate si intersecano in $\mathcal{T}(P)$;
- un'affinità trasfrorma triangoli in triangoli;
- un'affinità trasforma rette parallele in rette parallele;
- i punti del segmento PQ vengono trasformati in punti del segmento $\mathcal{T}(P)\mathcal{T}(Q)$;
- il punto medio del segmento PQ viene trasformato nel punto medio del segmento $\mathcal{T}(P)\mathcal{T}(Q)$;
- un triangolo di area $\mathcal{S}$ viene trasformato in un triangolo di area $\mathcal{S} \cdot |det(A)|$;
- un'affinità trasforma coniche in coniche: ellissi in ellissi, parabole in parabole, iperboli in iperboli, circonferenze in ellissi;
- la retta tangente ad una conica si trasforma in un'altra retta tangente alla conica trasformata.

Capitolo 4

Analisi

4.1 Topologia: Intervalli

Definizione 40 (Maggiorante ‖Minorante‖) *$M\|m\|$ si dice* maggiorante ‖minorante‖ *dell'insieme A se $\forall a \in A, M\|m\|$; si definisce quindi l'insieme $\mathcal{M}_A = \{M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, M \geq a\}\|m_A = \{m \in \mathbb{R} : \forall a \in A, m \leq a\}\|$*

Definizione 41 (Estremo superiore (sup) ‖ Inferiore (inf)‖) *Si definisce* estremo superiore (sup))‖ inferiore (inf) ‖ *di A il più piccolo ‖grande‖ dei maggioranti ‖minoranti‖, ovvero valgono:*
$\begin{cases} \forall a \in A, supA \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : supA - \varepsilon \leq \bar{a} \leq supA \end{cases}$
e, analogamente:
$\begin{cases} \forall a \in A, infA \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{a} \in A : infA \leq \bar{a} \leq infA + \varepsilon \end{cases}$
Per definizione, se A è illimitato superiormente ‖inferioremente‖ *allora si pone $supA = +\infty\|infA = -\infty\|$*

Definizione 42 (Insieme limitato/illimitato) *L'insieme A si dice* limitato superiormente ‖inferiormente‖ *se esiste l'estremo superiore ‖inferiore‖; si dice* limitato *se è limitato sia superiormente che inferiormente; si dice* illimitato superiormente ‖inferiore‖ *se non è limitato superiormente ‖inferiore‖, ossia se $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a \geq x\|\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in A : a \leq x\|$; si dice* illimitato *se è illimitato sia superiormente che inferiormente.*

Osservazione 4 *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Allora A è limitato sse $\exists M \geq 0 : \forall x \in A|x| \leq M$.*

Definizione 43 (Massimo (max) ‖minimo (min)‖) *Si definisce* massimo (max) ‖minimo (min)‖ *l'estremo superiore ‖inferiore‖ qualora appartenga all'insieme A. Valgono quindi:*
$\begin{cases} \forall a \in A, maxA \geq a \\ maxA \in A \end{cases}$
e, analogamente:
$\begin{cases} \forall a \in A, minA \leq a \\ minA \in A \end{cases}$

Definizione 44 (Intervallo) *$A \subset \mathbb{R}$ si dice* intervallo *se, dati $x, y : x < y$, allora $\forall z : x < z < y, z \in A$.*

Teorema 7 (Intervalli) *Se A è un intervallo, è necessariamente di uno dei seguenti quattro tipi:*

aperto $(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, *con* $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$*;*

aperto a sx, chiuso a dx $(a,b] =]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, *con* $a \in \bar{\mathbb{R}}, b \in \mathbb{R}$*;*

chiuso a sx, aperto a dx $[a,b) = [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, *con* $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$*;*

chiuso, compatto $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$.

Notazione 1 (-A, $\lambda \cdot A, A + B$) *Dato A insieme, si definisce* $-A = \{-y \in \mathbb{R} : y \in A\}$.
Dato A insieme, $\lambda \in \mathbb{R}$, si definisce $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot x : x \in A\}$.
Dati A e B insiemi, si definisce $A + B = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

Osservazione 5 (Operazioni su inf e sup) $sup(A+B) = supA+supB, inf(A+B) = infA + infB$
$sup(-A) = -infA, inf(-A) = -supA$
$\lambda \geq 0 : sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot supA, inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot infA$
$\lambda \leq 0 : sup(\lambda \cdot A) = -\lambda \cdot infA, inf(\lambda \cdot A) = -\lambda \cdot supA$

Teorema 8 (Principio di Archimede) $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : na > b$

Teorema 9 (Principio del minimo intero) *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto; allora A ammette minimo (☛ Principio di Induzione).*

Teorema 10 (Densità di $\mathbb{Q}$) $\mathbb{Q}$ *è* denso *in* $\mathbb{R}$, *ovvero:*
$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, (a,b)_{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$, *dove con* $(a,b)_{\mathbb{Q}}$ *si indica l'insieme* $\{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$.

Definizione 45 (Intorno, Palla) *Sia $x_0 \in A$; fissato $\delta > 0$ si dice intorno di x_0 l'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, la cui ampiezza vale $2 \cdot \delta$.*

Definizione 46 (Punto interno) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$; x_0 si dice* punto interno di A *se* $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$, *ovvero se* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset$.

Notazione 2 (Å, int$A$) *Si pone* $= intA \subset A$ *l'insieme dei punti interni di A.*

Definizione 47 (Punto di frontiera) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$; x_0 si dice* punto di frontiera di A *se* $\forall \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \neq \emptyset \wedge (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A^c \neq \emptyset$.

Definizione 48 (Punto di accumulazione) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$; x_0 si dice* punto di accumulazione di A *se* $\forall \delta > 0, (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, *ovvero se* $\forall r > 0, \exists y \in A : y \neq x : y \in (x - r, x + r)$.

Notazione 3 (σA, frontiera di A) *Si pone σA l'insieme dei punti di frontiera di A, e si dice* frontiera di A.

Definizione 49 (Punto isolato) *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}$*;* x_0 *si dice* punto isolato *di* A *se* x_0 *non è punto di accumulazione per* A*, ossia se* $\exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$*.*

Notazione 4 ($\bar{A}$, chiusura di A) *Si pone* $\bar{A} = A \cup \sigma A$ *l'insieme dei punti interni o di frontiera di* A*, e si dice* chiusura di A*.*

Definizione 50 (Insieme aperto) *L'insieme* A *si dice* aperto *se* $A =$ *, ovvero se ogni elemento di* A *è interno, ovvero se* $\forall x_0 \in A$*,* A *è intorno di* x_0*, cioè* $\forall x_0 \in A, \exists r > 0 : (x - r, x + r) \subset A$*.*

Definizione 51 (Insieme chiuso) *L'insieme* A *si dice* chiuso *se* A^c *è aperto, ovvero se* $A = \bar{A}$*.*

Teorema 11 $\forall A \subseteq \mathbb{R}$*, l'insieme* $\bar{A}$ *è chiuso.*

Osservazione 6 *Gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono* $\mathbb{R}$ *e* $\emptyset$*.*

Teorema 12 *L'unione di insiemi aperti è aperto.*

4.2 Relazioni e Funzioni

4.2.1 Relazioni

Definizione 52 (Relazione) *Dati* A, B *insiemi, si definisce* $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ *e si dice che* $\mathcal{R}$ *è una* relazione *da* A *(*dominio*) a* B *(*codominio *o* immagine di A*).*
Se $\langle x, y \rangle \in \mathcal{R}$ *si dice che* x *è* in relazione *con* y *e si scrive* $x\mathcal{R}y$*.*
Una relazione $\mathcal{R}$ *può essere:*

R1, riflessiva $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$*;*

R2, simmetrica $\forall x \in A, \forall y \in B, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$*;*

R2*, antisimmetrica $\forall x \in A, \forall y \in B, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$*;*

R3, riflessiva $\forall x \in A, \forall y \in (A \cup B), \forall z \in B, (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$*;*

Una relazione $\mathcal{R}$ *soddisfacente le* `R1`*,* `R2` *e* `R3` *si dice d'*equivalenza*.*
Una relazione $\mathcal{R}$ *soddisfacente le* `R1`*,* `R2*` *e* `R3` *si dice d'*ordine*. Se inoltre vale la:*

R4, ordine totale $\forall x \in A, \forall y \in B, (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x) \Rightarrow \top$

allora la relazione si dice di ordine totale*. Se non è verificata la* `R1` *si parla di relazione di* ordine stretto*.*

Osservazione 7 (Relazione d'ordine totale $\leq$) *Si può definire su* $\mathbb{R}$ *la relazione d'ordine totale* $\leq$ *definendo un insieme* P *(dei numeri positivi o nulli) verificante le proprietà:*

1. $(x \in P) \vee (-x \in P) \Rightarrow \top$*;*

2. $(x, y \in P) \Rightarrow (x + y, x \cdot y \in P)$*;*

e definendo quindi $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in P$*.*
Da questa relazione si ricavano le altre relazioni d'ordine $\leq$ *(*$x \leq y \Leftrightarrow y \geq x$*),* $>$ *(strettamente maggiore,* $x > y \Leftrightarrow (x \geq y) \wedge (x \neq y)$*) e* $<$ *(strettamente nimore,* $x < y \Leftrightarrow (y \geq x) \wedge (x \neq y)$*).*

4.2.2 Funzioni

Definizione 53 (Funzione 1) *Data* f *relazione da* A *a* B*,* f *si dice* funzione *o* applicazione *da* A *in* B *sse* $\forall a \in A, \exists! b \in B : afb$ *e si scrive:*
$f : A \to B$*;*
$f : a \in A \to b \in B$*, f(a)=b.*
Se afb *si dice che* b *è immagine di* a *secondo* f *e si scrive* $b = f(a)$*, o che* a *è controimmagine di* b *secondo* f *e si scrive* $a = f^{-1}(b)$*.*

Definizione 54 (Funzione 2) *Una funzione è una terna di oggetti: l'insieme* A *detto* dominio*, l'insieme* B *detto* codominio *e una legge* f *che associ ad ogni elemento di* A *uno ed un solo elemento di* B*.*

Definizione 55 (Iniettività) *Una funzione* f *si dice* iniettiva *sse* $\forall b \in B, \exists!! a \in A : f(a) = b$*, ovvero se* $\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$*, ovvero se* $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$*.*

Definizione 56 (Suriettività, Surgettività) *Una funzione* f *si dice* suriettiva *o* surgettiva *sse* $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$*.*

Definizione 57 (Biiniettività, Bigettività, Biunivocità) *Una funzione* f *si dice* biiettiva *o* bigettiva *o* biunivoca *sse* f *è sia iniettiva che suriettivà, ovvero sse* $\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$*. Si parla anche di funzione* invertibile*, in quanto si può definire* f^{-1} *tale che* $f \circ f^{-1} = Id_B, f^{-1} \circ f = Id_A$*, dove con* Id_A *e* Id_B *si intendono le funzioni identiche definite rispettivemente su* A *e* B*, ovvero* $Id_A : A \to A, x \to x$ *e* $Id_B : B \to B, x \to x$ *.*

Definizione 58 (Monotonia) *Una funzione* $f : A \to B$ *si dice* monotòna *se verifica una delle seguenti (e allora in particolare è come descritto):*

monotòna crescente in senso stretto $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$*;*

monotòna crescente in senso debole o largo $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$*;*

monotòna decrescente in senso stretto $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$*;*

monotòna decrescente in senso debole o largo $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$*.*

Teorema 13 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo; allora f è iniettiva (e invertibile) sse è monòtona in senso stretto.*

Notazione 5 ($f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\lambda \cdot f$, $f \circ g$) *Date f e g due funzioni definite su dominio $A \subseteq \mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$, si definiscono:*

- $(f + g)(x) : A \to \mathbb{R}, x \to f(x) + g(x)$;
- $(f \cdot g)(x) : A \to \mathbb{R}, x \to f(x) \cdot g(x)$;
- $(\frac{f}{g})(x) : \{x \in A : g(x) \neq 0\} \Rightarrow \mathbb{R}, x \to \frac{f(x)}{g(x)}$;
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda)(x) : A \to \mathbb{R}, x \to \lambda \cdot f(x)$.

Date $f : A \to B$, $g : B \to C$, si definisce:

- $(g \circ f)(x) : A \to C, x \to g(f(x))$,

e si dice che la funzione $g \circ f$ è la composizione *delle funzioni g e f.*

Definizione 59 (Funzione Lipschitziana) $f : I \to \mathbb{R} : \exists L > 0 : \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$, *$f$ è detta* Lipschitziana. *Il minimo L che verifica la definizione è detta* costante di Lpschitz *e f si dice* L-Lipschitziana.

Definizione 60 (Funzione Hölderiana) $f : I \to \mathbb{R} : \exists L \geq 0 : \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|^\alpha$, *$f$ è detta* Hölderiana *di esponente $\alpha > 0$. Si scrive: $f \in C^{0,\alpha}(I)$.*

4.3 Limiti e Forme Indeterminate

4.3.1 Definizione

Definizione 61 (Limite 1)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \overbrace{\exists \delta_\varepsilon > 0 \ t.c. \ \forall x, |x - x_0| < \delta_\varepsilon}^{\exists \mathcal{I}_\varepsilon(x_0)} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Definizione 62 (Limite 2)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \overset{def}{=} \forall M > 0, \overbrace{\exists \delta_M > 0 \ t.c. \ \forall x, |x - x_0| < \delta_M}^{\exists \mathcal{I}_M(x_0)} \Rightarrow |f(x) > M$$

Definizione 63 (Limite 3)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \overset{def}{=} \forall \varepsilon > 0, \overbrace{\exists N_\varepsilon > 0 \ t.c. \ \forall x, |x| > N_\varepsilon}^{\exists \mathcal{I}_\varepsilon(\infty)} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Definizione 64 (Limite 4)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \stackrel{def}{=} \forall M > 0, \overbrace{\exists N_M > 0 \ t.c. \ \forall x, |x| > N_M}^{\exists \mathcal{I}_M(\infty)} \Rightarrow |f(x)| > M$$

Notazione 6 (Limite destro, Limite sinistro) *e quanto sopra vale solo per l'intervallo* $(x_0, x_0 + \delta)\|(x_0 - \delta, x_0)\|$, *allora si parla di* limite destro ‖sinistro‖.

Teorema 14 *Cnes affinchè esiste il limite di una funzione in un punto, è che esistano in quel punto limite destro e sinistro e coincidano, ovvero:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

4.3.2 Forme Indeterminate

$\frac{0}{0}$
$\frac{\infty}{\infty}$
$0 \cdot \infty$
$+\infty - \infty$
0^0
∞^0
1^∞

4.3.3 Limiti Notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$lim_{x\to\infty} \frac{\mathcal{P}(n)}{\mathcal{Q}(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad p > q \wedge \frac{a}{b} > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad p > q \wedge \frac{a}{b} < 0 \\ \frac{a}{b} & \text{se} \quad p = q \\ 0 & \text{se} \quad p < q \end{cases}$$

dove $\mathcal{P}(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0$ e $\mathcal{Q}(n) = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0$

4.3.4 Altri Limiti ricavabili dai Limiti Fondamentali

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^x\frac{1}{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\alpha x)}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha, \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\alpha^x}{x^\beta} = +\infty \text{ se } \alpha > 1 \text{ con } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0 \text{ se } \alpha > 0 \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{n}{x})^x = e^n \text{ con } n \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \text{ se } \alpha > 0 \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{n^p} = +\infty, \forall p \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \forall a \in \mathbb{R}_0^+$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\cdot\pi\cdot n}} = 1 \textbf{ Formula di Stirling}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!! \cdot \sqrt{2\cdot\pi\cdot n}} = 1 \textbf{ Formula di Wallis}$$

4.3.5 Operazioni su $\pm\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
$\infty \cdot \infty = \infty$

Sia $\ell \in R$.
$\ell + \infty = +\infty$
$\ell - \infty = -\infty$
$\ell \cdot \infty = \infty$ con $\ell \neq 0$
$\frac{\ell}{\infty} = 0$
$\frac{\infty}{\ell} = 0$ con $\ell \neq 0$
$+\infty^\ell = +\infty$ se $\ell > 0$
$+\infty^\ell = 0$ se $\ell < 0$
$\ell^{+\infty} = 0$ se $0 < \ell < 1$

$\ell^{+\infty} = +\infty$ se $\ell > 1$
$\ell^{-\infty} = +\infty$ se $0 < \ell < 1$
$\ell^{-\infty} = 0$ se $\ell > 1$

4.3.6 Teoremi sui Limiti

Siano: $f : A = (a, b) \subset \mathbb{R} \to R, x_0$ punto di accumulazione per $A, \ell = \lim_{x\to x_0} f(x); \ell' = \lim_{x\to x_0} f(x); \ell_1 = \lim_{x\to x_0} g(x); \ell_2 = \lim_{x\to x_0} h(x)$ tali che $\ell, \ell', \ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$.

Teorema 15 (dell'Unicità del Limite) *$\ell = \ell'$, ovvero $\exists\ell \longrightarrow \exists!\ell$.*

Teorema 16 (della Permanenza del Segno) *Sia $A = (a, b), x_0 \in [a, b]$. Se $\exists\ell \neq 0$ allora esiste $\mathcal{I}(x_0)$*
in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di ℓ (escluso al più x_0).

Teorema 17 *$(\exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}, f(x) = g(x)) \Rightarrow (\exists\ell \Leftrightarrow \exists\ell_1 \wedge \ell = \ell_1)$.*

Teorema 18 (del Confronto o dei Carabinieri) *$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \wedge \ell = \ell_2 \longrightarrow \ell_1 = \ell = \ell_2$.*

Teorema 19 (del Confronto) *$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, f(x) \leq g(x) \wedge \ell = +\infty \| \ell_1 = -\infty\| \longrightarrow \ell_1 = +\infty\|\ell = -\infty\|$.*

Teorema 20 (Limite della Composizione di Funzioni) *Sia definita $g \circ f$.Se $\exists \lim_{y\to\ell} g(y) = \ell_1$ e vale una delle seguenti:*

1. *$\exists\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}, f(x) \neq \ell$;*

2. *$g(\ell) = \ell_1$ (continuità di g);*
   allora $\exists \lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = \ell_1$.

4.3.7 Teoremi di de l'Hôpital

Teorema 21 (di de l'Hôpital 1) *Sia $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in [a, b]$. Siano valide le ipotesi:*

1. *f, g derivabili in (a, b);*

2. *$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0$;*

3. *$f(x_0) = g(x_0) = 0$;*

4. *$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.*

Allora:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Eventualmente, si considera l'unico limite calcolabile.

Teorema 22 (di de l'Hôpital 2) *Sia* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}, a, b \in \bar{\mathbb{R}}$. *Siano valide le ipotesi:*

1. f, g *derivabili in* (a, b)*;*

2. $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$*;*

3. $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty; \exists \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$*;*

4. $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

Allora:

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Lo stesso risultato vale per $x \to b^-$.

4.3.8 Proprietà sui Limiti

Siano $\ell = \lim x \to x_0 f(x); \ell_1 = \lim x \to x_0 g(x); \ell_2 = \lim x \to x_0 h(x)$ tali che $\ell, \ell_1, \ell_2 \in R$.
Siano: $\alpha, \lambda, \mu, \in R; a \in R_0^+ \setminus \{1\}; b \in R_0^+; n \in \mathbb{N}$
Sia: $x_0 =\in R$ oppure $x_0 = \pm\infty$. Allora:

- $\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = \ell + \ell_1$
- $\lim_{x\to x_0}[\lambda f(x) + \mu \cdot g(x)] = \lambda \cdot \ell + \mu \cdot \ell_1$
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \ell^n$ con $\ell > 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \ell \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell_1} \Leftrightarrow \ell_1 \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$
- $\lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a \ell$
- $\lim_{x\to x_0} b^f(x) = b^\ell$
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \ell^{\ell_1}$ con $\ell > 0$

4.3.9 Limiti di Funzioni Monotòne

Teorema 23 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}, a,b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b$, una funzione monotòna crescente $\|$ decrescente$\|$, $s_0 \in (a,b)$; allora:*

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = sup\{f(y) : y < x_0\} \| = inf\{f(y) : y < x_0\} \| = supf((a, x_0)) \| = supf((a, x_0)) \|$$

e:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = inf\{f(y) : y > x_0\} \| = sup\{f(y) : y > x_0\} \| = inff((x_0, b)) \| = inff((x_0, b)) \|$$

Se $x_0 \in \sigma(a,b)$, allora il teorema è vero per l'unico limite che si può calcolare.

4.3.10 Infinitesimi

Definizione 65 (Infinitesimo) *Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, siano f, g due funzioni definite in un intorno di x_0 escluso al più x_0 tali che $f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. Si dice che f è* infinitesima di ordine superiore a *g* per *$x \to x_0$ o che f è un* o piccolo *di g per $x \to x_0$ e si scrive $f = o(g, x_0)$ o semplicemente $f = o(g)$ se:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Notazione 7 (Funzioni Infinitesime) *Funzioni che hanno limite uguale a 0 per $x \to x_0$ si dicono* infinitesime *e si indicano con $o(1, x_0)$.*

Definizione 66 (Infinitesimi di ordine α) *Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$; se $\exists \alpha > 0 : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si dice che f è un* infinitesimo di ordine *α* per *$x \to x_0$ e che la sua* parte principale *è $(x - x_0)^\alpha$. Analogamente per limite sx e per limite dx.*

Osservazione 8 (Proprietà o piccoli) *Se $f_1 = o(g, x_0), f_2 = o(g, x_0)$, allora:*

1 *$f_1 + f_2 = o(g, x)$;*

2 *$\forall k \in \mathbb{R}, kf = o(kg, x_0) = o(g, x_0)$.*

Se $f_1 = o(g_1, x_0), f_2 = o(g_2, x_0)$, allora:

3 *$\frac{f_1+g_1}{f_2+g_2} = \frac{g_1}{g_2}$ in un intorno di x_0, cioè esiste un limite sse esiste l'altro, e sono uguali.*

4 *$\forall x, l > 0, x^k = o(x^l, x_0) = o(x^{l+k}, x_o)$;*

5 *$f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2, x_0)$;*

inoltre, se $f = o(g, x_0), g = 0o(h, x_0)$, allora:

6 $f = o(h, x_0)$;

Teorema 24 *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}, f$ *continua in* x_0 *e invertibile in un intorno di* x_0 *tale che* $f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + o(x - x_o, x_0), a \neq 0$. *Allora* $f^{-1}(y) = x_0 + \frac{1}{a} \cdot (y - y_0) + o(y - y_0, y_0)$ *dove* $y_0 = f(x_0)$.

Definizione 67 *Siano* f, g *definite in un intorno di* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}} : f, g \neq 0$ *in tale intorno ad eccezione al più di* x_0. *Si dice che* f *è* asintotica *a* g *per* $x \to x_0$ *se* $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e si indica con* $f \sim g$.

Osservazione 9 (Proprietà funzioni asintotiche) **1** $f \sim g \sim f$

2 $f \sim g \wedge g \sim h \Rightarrow f \sim h$

Osservazione 10 $f \sim g \Rightarrow (\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x))$.

4.4 Funzioni Continue

4.4.1 Definizione

Definizione 68 (Funzione Continua) $y = f(x)$ *si dice* continua *in* x_0 *se* $\lim x \to x_0 f(x) = f(x_0)$ *o,*
il che è lo stesso, se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *t.c.* $\forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Teorema 25 *Siano* f, g *continue in* x_0, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Allora* $f + g, f \cdot g, \lambda \cdot f$ *sono continue in* x_0.
Se è definita $g \circ f$, *anch'essa è continua in* x_0.
Se è definita f^{-1}, *anch'essa è continua in* x_0.

Teorema 26 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$, *allora se* $f(x_0) > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *in cui f(x)>0.*

Teorema 27 (di Weierstrass) *Ogni funzione continua in un intervallo chiuso* $[a, b]$ *con* $a, b \in R$ *è dotata di massimo e minimo assoluti nell'intervallo, ovvero:*

$$f([a, b]) = [\overset{inf}{x \in [a, b]}\ f(x), \overset{sup}{x \in [a, b]}\ f(x)]$$

e in particolare $\exists c_1, c_2 \in [a, b]$:

$$f(c_1) = \overset{inf}{x \in [a, b]}\ f(x), f(c_2) = \overset{sup}{x \in [a, b]}\ f(x)$$

Teorema 28 (dei Valori Intermedî) *Una funzione continua in un intervallo* I *assume nell'intervallo tutti i valori compresi tra il minimo* m *e il massimo* M, *ovvero, dati* $x, y : f(x) < f(y), \lambda \in \mathbb{R} : f(x) < \lambda < f(y)$, *allora* $\forall \lambda, \exists z \in I : f(z) = \lambda$.

Teorema 29 (dell'Esistenza degli Zeri o di Bolzano) *Se una funzione continua su un intervallo assume valori di segno opposto in due punti $x-1$ e x_2 dell'intervallo, allora esiste almeno un punto interno all'intervallo $]x_1, x_2[$ in cui $f(x) = 0$, ovvero, data $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$: $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.*

4.5 Derivate

4.5.1 Definizione

Definizione 69 (Rapporto Incrementale) *Sia I intervallo con x_0 punto interno di I; si dice* rapporto incrementale *in x_0 la funzione:*

$$R_{x_0}f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

definita in $I \setminus \{0\}$.

Definizione 70 (Derivata) *f è derivabile in x_0 se $\exists \lim x \to x_0 R_{x_0}f(x) \in \mathbb{R}$ e si denota con:*

$$f'(x) = D[f(x)] = \frac{df}{dx} = \dot{f}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x\to x_0} R_{x_0}f(x).$$

Analogamente si definiscono le derivate destra e sinistra. Se possono calcolarsi derivata destra e sinistra, allora esiste la derivata e coincide con derivata dx e sx.

Teorema 30 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0, ma non viceversa.*

Notazione 8 (Differenziabilità) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} 0f')x_0) + o(1, x_0)$
$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (x - x_0) \cdot o(1, x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0, x_0)$$

Definizione 71 (Differenziabilità) *Sia $f_I \to \mathbb{R}, x_0$ punto interno di I; f si dice* differenziabile *in x_0 se $\forall x \in I, \exists L > 0 : f(x) = f(x_=) + L \cdot (x - x_0) + o(x - x_0, x_0)$.*

Definizione 72 (Derivata Seconda, k-esima) $f''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} = \ddot{f}(x) = \frac{d}{dx}f'(x)$.
$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} = \frac{d}{dx}f^{(k-1)}$.

Notazione 9 (Classe C^k) *$f \in C^k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ sta ad indicare che f è derivabile k volte in I con derivate continue in I (in particolare, è continua $f^{(k)}$. In particolare, $C^0(I) = C(I)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni continue in I; $C^{+\infty}(I)$ denota l'insieme delle funzioni che ammettono derivate di ogni ordine in I e tali che $\forall k, \frac{d^k}{dx^k}f \in C(I)$.*

Osservazione 11 *I polinomî appartengono a* $C{+}\infty(\mathbb{R})$ *con la proprietà* $\frac{d^k}{dx^k}P = 0$ *se* $k > \mathsf{deg}P$.
$e^x \in \mathbb{C}{+}\infty(\mathbb{R})$.

Teorema 31 *La funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *è differenziabile in* x_0 *punto interno di* I *sse è derivabile in* x_0 *e in tal caso* $L = f'(x)$.

Teorema 32 *Siano* $f, g : I$
$rightarrowmathbbR, x_0$ *punto interno di* I*,* $f \equiv g$ *in un intorno di* x_0*; allora* f *è derivabile in* x_0 *sse lo è* g *e in tal caso* $f'(x_0) = g'(x_0)$.

4.5.2 Proprietà locali di una funzione

Osservazione 12 (Derivata prima e monotonia) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* x_0 *e debolmente crescente* $\|$*decrescente*$\|$ *in un intorno di* x_0. *Allora* $f'(x_0) \geq 0\| \leq 0\|$.

Definizione 73 (Punto di Massimo ‖Minimo‖ relativo debole (locale)) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $x_0 \in I$*;* x_0 *si dice* punto di massimo ‖minimo‖ relativo debole (locale) *di* f *se* $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \exists \delta > 0 : f(x) \leq f(x_0)\| \geq f(x_0)\|$.

Definizione 74 (Punto di Massimo ‖Minimo‖ relativo forte (stretto)) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $x_0 \in I$*;* x_0 *si dice* punto di massimo ‖minimo‖ relativo forte (stretto) *di* f *se* $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \exists \delta > 0 : f(x) < f(x_0)\| > f(x_0)\|$.

Definizione 75 (Punto di Massimo ‖Minimo‖ assoluto) x_0 *di dice* punto di massimo ‖minimo‖ assoluto *di* f *se* $\forall x \in I, f(x) \leq \| \geq \| f(x_0)$.

Definizione 76 (Punto stazionario) *Se* x_0 *è tale che* $f'(x_o)$ *allora* x_0 *è detto* punto stazionario *di* f.

Teorema 33 (Fermat) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* x_0*, sia* $x_0 \in I$ *estremo relativo, allora* $f'(x_0) = 0$.

Teorema 34 (Conseguenza 1 Teorema di Lagrange) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua in* I *e derivabile nei punti interni di* I*, con derivata prima positiva (strettamente positiva, negativa, strett. negativa) in tali punti. Allora* f *è crescente (decrescente, str. crescente, str. decrescente) in tale intervallo.*

Teorema 35 (Conseguenza 2 Teorema di Lagrange) *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua in* I *e derivabile nei punti interni di* I*, con derivata prima nulla in tali punti. Allora* f *è costante in tale intervallo.*

Criterio 1 (Massimi, minimi relativi) *Se* $\exists \delta > 0 : f'(x) \leq 0 (\geq)$ *in* $(x_0 - \delta, x_0)$ *e* $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$ *in* $(x_0, x_0 + \delta)$ *allora* x_0 *è un punto di minimo (massimo) relativo di* f*. Se le disuguaglianze valgono con i segni forti, allora* x_0 *è punto di minimo (massimo) relativo stretto.*

Teorema 36 *Sia* $f : I \to \mathbb{R} \in C^2, f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0(<), x_0$ *punto interno di* I*. Allora* x_0 *è punto di minimo (massimo) relativo forte di* f*, e viceversa condizione necessaria affinchè* x_0 *sia punto di minimo (massimo) relativo forte è che* $f''(x_0) \geq (\leq) 0$.

4.5.3 Convessità

Definizione 77 (Funzione Convessa) *$f : I \to \mathbb{R}$ si dice* convessa *se:*
$\forall x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1, \forall t \in [0,1], f(t \cdot x_0 + (1-t) \cdot x_1) \leq t \cdot f(x_0) + (1-t) \cdot f(x_1)$.

Definizione 78 (Funzione Concava) *f si dice* concava *se $-f$ è convessa.*

Teorema 37 *Sia f convessa in I; allora:*
$\forall x > x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'_+(x_0) \cdot (x - x_0)$;
$\forall x < x_0, f(x) \geq f(x_0) + f'_-(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Definizione 79 (Punto di flesso) *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x : 0$ punto interno di $I : f$ convessa (concava): in (a, x_0) e concava (convessa) in (x_0, b). x_0 si dice* punto di flesso *per f. x_0 si dice* flesso ascendente (discendente) *se f è localmente crescente (decrescente) in un intorno di x_0.*

Definizione 80 (Asintoto obliquo) *$f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ha* asintoto obliquo *a $+\infty$ se $\lim_{x \to +\infty} = \pm\infty$ e:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - a \cdot x = b \in \mathbb{R}$$

.
In questo caso l'asintoto obliquo è $y : a \cdot x + b$.

Osservazione 13 *f, g convesse in $I \Rightarrow f + g$ convessa in I.*

4.5.4 Teoremi

Teorema 38 (di Rolle) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile su (a,b) e sia $f(a) = f(b)$; allora $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$.*

Teorema 39 (di Lagrange o del Valor Medio) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b); allora $\exists x_0 \in]a,b[$ t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.*

Teorema 40 (di Cauchy) *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$ e sia $g'(x) \neq 0 \forall x \in [a,b]$; allora $_0 \in]a,b[$ t.c. $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.*

4.5.5 Teoremi Funzioni Convesse

Teorema 41 (1) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ convessa; siano $x_0, x_1 \in I : x_0 < x_1$. Allora*
$\forall x \in [x_0, x_1], f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \cdot (x - x_0) \stackrel{def}{=} r_{x_0 x_1}(x)$;
$\forall x \notin [x_0, x_1], f(x) \geq r_{x_0 x_1}(x)$.

Teorema 42 (2) *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ convessa in I, r una retta; Se $\exists x_0 < x_1 < x_2 \in I : f(x_j) = r(x_j), j = 0, 1, 2$ allora $\forall x \in [x_0, x_2], f(x) = r(x)$.*

Teorema 43 (3) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$. Sia:*
$R_{x_0} f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,
$R_{x_0} f(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,
allora f è convessa in I sse $R_{x_0} f$ è crescente in $I \setminus \{x_0\}$. Eventualmente, si considera l'unico rapporto incrementale calcolabile.

Teorema 44 *Sia f convessa in I; allora è continua in tutti i punti interni di I in quanto $\exists \lim R_{x_0} f(x)$.*

Teorema 45 (Convessità-derivabilità) *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a, b); f è convessa (concava) in (a, b) sse f' è crescente (decrescente) in (a, b), è strettamente convessa (concava) se f' è str. crescente (decrescente).*

4.5.6 Derivate Fondamentali

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-1 - \cot^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{log_a e}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabella 4.1: Derivate Fondamentali

4.5.7 Regole di Derivazione

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabili in x_0, x_0 punto interno di I, $\lambda \in \mathbb{R}$; allora valgono i seguenti teoremi algebrici o regole di derivazione.
pag.45

Osservazione 14 (Conseguenza) *I polinomî sono derivabili in $\mathbb{R}$ e la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n - 1$.*

$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$
$y = k \cdot f(x)$	$y' = k \cdot f'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(cx) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(cx) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$y = f(g(h(x)))$	$y' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$y' = [f(x)]^{g(x)} \cdot [g'(x) \cdot \log f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}]$

Tabella 4.2: Regole di Derivazione

Teorema 46 (Derivabilità della funzione inversa) *Sia f strettamente monotòna definita in I e ivi continua, derivabile in x_0 punto interno di I tale che $f'(x_0) \neq 0$, allora f è invertibile e la sua inversa è derivabile in $f(x_0)$. Inoltre:*
$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$
$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

4.6 Integrali

4.6.1 Definizione

Definizione 81 (Integrale) $\int f(x)\, dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$
$F(x)$ si dice primitiva *di $f(x)$.*

Teorema 47 (di Torricelli-Barrow) $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

4.6.2 Integrale di Riemann

Definizione 82 (Partizione) *Si dice* partizione *di $[a, b]$ ogni insieme di punti $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Data δ partizione di $[a, b]$, si ha:*

$$[a, b] = \bigcup_{j=0}^{n-1} [t_j, t_{j+1}$$

]

Notazione 10 (Somme superiori e inferiori)

$$s(f, \delta) = \{\sum_{j=0}^{n-1} \overset{\textsf{inf}}{t \in [t_j, t_{j+1}} f(t) \cdot (t_{j+1} - t_j)\}$$

$$S(f, \delta) = \{\sum_{j=0}^{n-1} \overset{\textsf{sup}}{t \in [t_j, t_{j+1}} f(t) \cdot (t_{j+1} - t_j)\}$$

Definizione 83 (Funzione Riemann-integrabile) *f è* integrabile *se esiste unico l'elemento separatore tra $s(f)$ e $S(f)$ ovvero se $\textsf{sup}s(f) = \textsf{inf}S(f)$. Tale* *elemento separatore si dice* integrale *di f in $[a,b]$ e si scrive:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathit{sups}(f) = \mathit{inf}S(f)$$

ovvero $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata è integrabile in $[a,b]$ se $\forall\varepsilon>0, \exists\delta : S(f,\delta)-s(f,\delta)\le\varepsilon$.

Osservazione 15 (Conseguenza) *f monotòna è integrabile.*
f continua è integrabile.
Lo spazio $\mathcal{R}$ delle funzioni integrabili è vettoriale e l'applicazione $\mathcal{R}\to\mathbb{R}, f\to\int_1^b f(t)\,dt$ è lineare.

Notazione 11 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
$\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Definizione 84 (Funzione integrale) *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabile in $[a,b]$, $c\in[a,b]$ fissato; la funzione $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definita da:*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

si dice funzione integrale *di f.*

4.6.3 Teoremi

Teorema 48 (della Media) $\overset{inf}{[a,b]}\, f \le \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \le \overset{sup}{[a,b]}\, f$

$$\exists c\in[a,b] \text{ t.c. } f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Teorema 49 (fondamentale del Calcolo Integrale) *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-integrabile in $[a,b]$; allora:*

1. *$\forall c\in[a,b], F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ è lipschitziana e $|F(x)-F(y)| \le \overset{sup}{t\in[a,b]} |f(t)|\cdot|y-x|$;*

2. *se f è continua in $x_0\in(a,b)$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0)=f(x_0)$;*

3. *se f è continua in a (b), allora F è derivabile a dx (sx) in a (b) e $F'_+(a) = f(a)(F'_-(b)=f(b))$;*

4. *$\forall\alpha,\beta\in[a,b]:\alpha\le\beta, \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta)-F(\alpha)$*

4.6.4 Integrali Notevoli Fondamentali

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$$

$$\int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\tan x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = a^x \cdot log_a e + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

4.6.5 Regole di Integrazione

1a $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$

1b $\int [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\cdots+\int f_n(x)\,dx$

2, monotonia $\forall x \in [a,b], f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

2bis $\forall x \in [a,b], g(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$

3, spezzamento $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4.6.6 Altri Integrali Notevoli

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + c$$
$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\log(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+x^2} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{a^2+x^2}| + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \log|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + c$$
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\cdot\log|\frac{x-a}{x+a}| + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+px+q}}\,dx = \log|x+\frac{p}{2}+\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}| + c$$
$$\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx = \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + \frac{\sin(-\beta)x}{2(\alpha-\beta)} + c$$
$$\int e^x\cdot\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x) + c$$
$$\int e^x\cdot\cos x\,dx = -\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x) + c$$

4.6.7 Integrali per Serie

$\mathcal{I}_n = \int \sin^{2n} x\,dx = \frac{1}{2n}[-\sin^{2n-1} x\cos x + (2n-1)\mathcal{I}_{n-1}]$ con $\mathcal{I}_0 = x + c; \mathcal{I}_1 = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + c$

$\mathcal{I}_n = \int \log^n x\,dx = x\log^n x - n\cdot\mathcal{I}_{n-1}$ con $\mathcal{I}_0 = x + c; \mathcal{I}_1 = x\log x - x + c$

$\mathcal{I}_n = \int x^n\cdot e^x\,dx = x^n\cdot e^x - n\cdot\mathcal{I}_{n-1}$ con $\mathcal{I}_0 = e^x + c; \mathcal{I}_1 = xe^x - x + c$

$\mathcal{I}_{n+1} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{2n\cdot(1+x^{2n})} + \frac{2n-1}{2n}\mathcal{I}_{n-1}$ con $\mathcal{I}_0 = \arctan x + c; \mathcal{I}_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + frac12\arctan x + c$

4.6.8 Integrazione di Funzioni Goniometriche

$\int \sin^{2k+1} x\, dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^k\, d\cos x$
$\int \sin^{2k} x\, dx = \frac{1}{2}\int (\frac{1-\cos 2x}{2})^k\, d2x$

4.6.9 Integrazione di Funzioni Razionali

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{R_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{\alpha_1 \cdot x + \beta_1}{(x^2 + a_1 \cdot x + b_1)} + \cdots +$$

$$+ \frac{\alpha_{l_1} \cdot x + \beta_{l_1}}{(x^2 + a_{l_1} \cdot x + b_{l_1})} + \frac{\gamma_1 \cdot x + \delta_1}{(x^2 + a_1 \cdot x + b_1)} + \cdots + \frac{\gamma_{l_2} \cdot x + \delta_{l_2}}{(x^2 + a_{l_2} \cdot x + b_{l_2})} + \cdots$$

$\mathcal{I} = \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\, dx = \int Q(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{P_2(x)}\, dx$ dove vale $P_1(x) = P_2(x) \cdot Q(x) + R(x)$ ed è $\varrho R(x) < \varrho P_2(x)$
Considerato il caso in cui $\varrho P_2(x) = 2$ e quindi $\varrho R(x) = 0 \vee 1$, essendo $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c costanti assegnate, dette α_1, α_2 le radici di $P_2(x) = 0$, definito $\Delta = b^2 - 4ac$, considerati A e B costanti in R, si hanno i seguenti tre casi, a seconda del segno di Δ:

1. $\Delta P_2(x) > 0 \longrightarrow \mathcal{I} = \frac{1}{a}\int \frac{A}{x-\alpha_1}\, dx + \frac{1}{a}\int \frac{B}{x-\alpha_2}\, dx = \frac{A}{a}\log|x-\alpha_1| + \frac{B}{a}\log|x-\alpha_2| + c$

2. $\Delta P_2(x) = 0 \longrightarrow \mathcal{I} = \frac{1}{a}\int \frac{A}{x-\alpha}\, dx + \frac{1}{a}\int \frac{B}{(x-\alpha)^2}\, dx = \frac{1}{a}A\log|x-\alpha| - \frac{A\alpha+B}{a(x-\alpha)} + c$

3. $\Delta P_2(x) < 0 \longrightarrow \mathcal{I} = \int \frac{gx+h}{ax^2+bx+c}\, dx = gs\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{x^2+bx+c} + ht\int \frac{dx}{(kx+j)^2+1} = gs\log|ax^2+bx+c| + ht\arctan(kx+j) + c$

4.6.10 Tecniche di Integrazione

Integrazione per Sostituzione: $x = g(t) \longrightarrow \int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$
Integrazione per Parti: $\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - (x)g'(x)\, dx$

4.6.11 Integrazione Numerica [1]

Metodo 1 (dei rettangoli) *Si approssima l'area sottesa alla curva alla somma di n rettangoli la cui base tende a 0 tendendo l'errore e a 0 e la cui altezza è pari al valore della funzione all'estremo sinistro o destro della base.*
$\int_a^b f(x)\, dx \simeq \frac{b-a}{n} \cdot [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$

[1] Marcello Pedone, *Integrazione Numerica e Valutazione dell'errore*, `http://www.matematicamente.it`

$e \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M \ \ con \ |f'(x)| \leq M$

Metodo 2 (dei trapezî) *Si approssima l'area sottesa alla curva alla somma di n trapezi la cui altezza tende a 0 tendendo l'errore e a 0 e le cui basi sono i valori della funzione all'estremo destro e sinistro della base.*
$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2n} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot [f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]]$
$e \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M \ \ con \ |f''(x)| \leq M$

Metodo 3 (di Cavalieri-Simpson) $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{3n} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 4 \cdot [f(x_1) + f(x_3) + \cdots] + 2 \cdot [f(x_2) + f(x_4) + \cdots]]$
$e \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M \ \ con \ |f^{iv}(x)| \leq M$

4.6.12 Lunghezze di Archi di Curva, Volumi e Superfici di Solidi di Rotazione

$\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow \ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

$\mathcal{V} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

Teorema 50 (di Guldino) *Il volume di un solido generato da una superficie piana $\mathcal{S}$ che compie una rotazione completa intorno ad una retta del suo piano che non l'attraversa è dato dal prodotto dell'area di $\mathcal{S}$ per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di $\mathcal{S}$.*

Teorema 51 (Regola di Archimede) *L'area di un segmento parabolico è i $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo in cui è inscritto.*

$S_{laterale} = 2 \cdot \pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

4.7 Polinomio di Taylor

Teorema 52 $n \in \mathbb{N}, \delta P = \delta Q = n : f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n, x_0) = Q(x) o((x-x_0)^n, x_0) \Rightarrow P \equiv Q$

Teorema 53 (Polinomio e Formula di Taylor, Polinomio di Mac Laurin) $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$, *$f$ derivabile $n-1$ volte in (a,b) e n volte in x_0. Allora la seguente è una approssimazione di f:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n, x_0)$$

e si dice polinomio di Taylor *di grado n centrato in x_0 il seguente:*

$$P_{n,x_0} f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Per $x_0 = 0$ si ha il polinomio di Mac Laurin.

4.7.1 Formula di Taylor con resto di Lagrange

Teorema 54 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a, b), f$ derivabile $n+1$ volte in x_0; allora $\exists c = c(x) \in (\mathit{min}\{x_0, x\}, \mathit{max}\{x_0, x\})$:*

$$f(x) = P_{n,x_0} f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

4.7.2 Formula di Taylor con resto di integrale

$f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I, f \in C^n(I)$:

$$f(x) - P_n^{x_0} f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)(t)\cdot(x-t)^n\, dt}$$

4.7.3 Sviluppi di Taylor

$$f(x) = P_{n,0} f + o(x^n, 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o(x^n, 0)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n, 0)$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n, 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}, 0)$$

$$\tan x = P_{6,0} \tan + o(x^6, 0) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + o(x^6, 0)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}, 0)$$

$$\tanh x = P_{6,0} \tanh + o(x^6, 0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot x^5}{15} + o(x^6, 0)$$

$$\mathsf{arcsinh} x = x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$\mathsf{arctanh} x = \frac{1}{2} \cdot \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}, 0)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha!}{(\alpha - n)! \cdot n!} \cdot x^n + o(x^n, 0)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n, 0)$$

4.8 Studio di Funzione

1. Dominio;

2. Intersezione con gli assi;

3. Segno;

4. Limite (asintoti):

(a) Asintoto Verticale: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$;

(b) Asintoto Orizzontale: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$: $\varrho den = \varrho num$;

(c) Asintoto Obliquo: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$: $\varrho den = \varrho num - 1$:
$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$
$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$
$A.Ob. : y = mx + n$

5. Derivata Prima: Crescenza$^+$/decrescenza$^-$; Punti di Massimo e Minimo Relativi^0;

6. Derivata Seconda: Concavità verso l'alto$^+$/basso$^-$; Punti di Flesso^0.

4.9 Approssimazione di Radici Reali

Metodo 1 (di Bisezione o Dicotomico) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $f(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ (☛ Teorema 29 a pag.41). Considerato il nuovo punto $f(\frac{a+b}{2})$, la radice si troverà tra $]a, \frac{a+b}{2}[[\Leftrightarrow f(a) \cdot \frac{a+b}{2} < 0$, oppure tra $]\frac{a+b}{2}, b[[\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \cdot f(b) < 0$. Iterando il procedimento, si ottengono intervalli di soluzione con un'approssimazione sempre minore.*

Metodo 2 (della Secante) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $f(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ (☛ Teorema 29 a pag.41). Per determinare questo valore, si consideri la retta passante per i due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; questa retta intersecherà l'asse $x : y = 0$ in un punto c a cui corrisponderà $f(c)$. La radice si troverà tra $]a, c[[\Leftrightarrow f(a) \cdot f(c) < 0$, oppure tra $]c, b[[\Leftrightarrow f(c) \cdot f(b) < 0$. Iterando il procedimento, si ottengono intervalli di soluzione con un'approssimazione sempre minore.*

Metodo 3 (della Tangenteo di Newton) *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ t.c. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora $f(x)$ si annulla in almeno un punto $x_0 \in]a, b[$ (☛ Teorema 29 a pag.41). Per determinare questo valore, si consideri la retta tangente alla curva in $(a, f(a))$ o $(b, f(b))$ e t.c. intersechi l'asse $x : y = 0$ in un punto $c \in]a, b[$ a cui corrisponderà $f(c)$. La radice si troverà tra $]a, c[[\Leftrightarrow f(a) \cdot f(c) < 0$, oppure tra $]c, b[[\Leftrightarrow f(c) \cdot f(b) < 0$. Iterando il procedimento, si ottengono intervalli di soluzione con un'approssimazione sempre minore.*

Capitolo 5

Campo complesso

5.1 Rappresentazione

Definizione 85 ($\mathbb{C}$) *La struttura* $[\mathbb{R}^2; +, \cdot]$ *dove si definisce:*

$$+ : \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$\cdot : \langle x_1, y_1 \rangle \cdot \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 \rangle$$

è un campo ed è detto campo dei numeri complessi*, ed indicato con* $\mathbb{C}$*.*

5.1.1 Rappresentazione Algebrica

Se con $\langle 1, 0 \rangle$ (*unità reale*) e $\langle 0, 1 \rangle$ (*unità immaginaria*, indicata anche con i) indichiamo i vettori della base canonica, allora abbiamo $\langle x, y \rangle = x \cdot \langle 1, 0 \rangle + y \cdot \langle 0, 1 \rangle$, e la moltiplicazione si definisce in modo che $\langle 0, 1 \rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle = \langle -1, 0 \rangle$. L'elemento $\langle a, 0 \rangle$ si indica semplicemente con a e l'elemento $\langle 0, b \rangle$ si indica con bi o anche semplicemente b. Spesso $z = \langle a, b \rangle \in \mathbb{C}$ si indica anche come $x + iy$, e $x = \Re(z)$ si dice *parte reale*, $y = \Im(z)$ si dice *parte immaginaria*.
Si rappresentano su un piano detto *piano di Gauss*, dove l'asse delle ascisse è l'asse reale ed è un sottocorpo commutativo di C, l'asse delle ordinate è l'asse immaginario (ed è uno spazio vettoriale unidimensionale con base i su campo $\mathbb{R}$ (??)). Si chiama *coniugio* l'isomorfismo (la biiezione) che associa al complesso $z = a + ib$ il complesso $\bar{z} = a - ib$ (come biiezione, il coniugio conserva la somma e il prodotto). Se $x \in \mathbb{R}$, allora $\bar{x} = x$.

É preferibile per le operazioni di *somma*.

Il modulo del rapporto è il rapporto tra i moduli;
il modulo del prodotto è il prodotto dei i moduli;
il modulo del coniugato è il modulo stesso.

5.1.2 Rappresentazione Polare/Trigonometrica

In riferimento al piano di Gauss, possiamo identificare $z = a + ib$ indicandone l'angolo formato dalla semiretta per l'origine e per z rispetto al semiasse positivo delle ascisse (detto *argomento* di z, $\theta = \arg(z)$) e con la distanza dall'origine (*norma*, $\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+ib)\cdot(a-ib)}$). Si ha:

$$\begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = (z\cdot\bar{z})^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{se} \quad z \in Iq \\ \arctan\frac{b}{a}+\pi & \text{se} \quad z \in II/IIIq \\ \arctan\frac{b}{a}+2\pi & \text{se} \quad z \in IVq \end{cases} \end{cases}$$

Osservazione 16 *$x+iy$:*

$$\theta_0 = \arctan\frac{x}{y} + \begin{cases} +0 & x>0 & y>0 \\ +2\pi & x>0 & y<0 \\ +\pi & x<0 & y>0 \\ +\pi & x<0 & y<0 \end{cases}$$

In particolare, notiamo che $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$. Possiamo quindi scrivere $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, notando che $\cos\theta + i\sin\theta$ è un punto della circonferenza unitaria $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (che costituisce un sottogruppo moltiplicativo). Se abbiamo $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_1 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ allora $z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$: si ha $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

5.1.3 Rappresentazione esponenziale

Definizione 86 *Per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo $e^{it} \stackrel{def}{=} \cos t + i\sin t$.*

Osserviamo che $|e^{it}| = 1$.
Allora $z = \rho e^{i\theta}$.
É preferibile per le operazioni di *prodotto*.

5.2 Radici n-esime

$$z^n = a \Leftrightarrow \rho^n e^{nit} = (\rho e^{it})^n = a = |a|e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = |a| \\ nt = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow z = |a|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2}{n}k\pi)}$$

Abbiamo n soluzioni, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

5.3 Polinomi a valori complessi

$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{j=0}^n a_jx^j$, $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$; $\mathcal{P}(x)$ ha n soluzioni per il teorema fondamentale dell'algebra. Sia $z \in \mathbb{C}$ una soluzione; allora $\overline{z}$ è una soluzione, perché:

$$0 = \mathcal{P}_n(z) \Rightarrow 0 = \overline{0} = \overline{\mathcal{P}_n(z)} = \overline{\sum_{j=0}^n a_jz^j} = \sum_{j=0}^n \overline{a_j}\overline{z^j} = \sum_{j=0}^n a_j\overline{z}^j.$$

Quindi le radici complesse sono in numero pari.

Capitolo 6

Successioni e Serie

Definizione 87 *Sia $X \neq \emptyset$ un insieme non vuoto; la funzione $a : \mathbb{N} \to X$ è detta* successione con valori in X *(spesso $X = \mathbb{R}$). Eventualmente, al posto si $\mathbb{N}$ si considera $M \subseteq \mathbb{N}$, per esempio $M = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$. Si indica con $a_n \forall n \in \mathbb{N}$ o con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (o semplicemente $\{a_n\}$) o con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o semplicemente (a_n)).*

Una successione può essere definita in modo esplicito (in funzione di n) o per ricorrenza (dato $a_0 = \alpha$ e $a_n = f(a_{n-1})$; eventualmente, si definisce per ricorrenza con $f : \mathbb{N} \times X \to X$, dando $a_0 = \alpha$ e $a_n = f(n, a_n)$).

Definizione 88 (Successione geometrica) *La successione ($X = \mathbb{R}$, $q, \alpha \in \mathbb{R}$ assegnati):*

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = q \cdot a_n \end{cases}$$

o anche:

$$a_n = \alpha + q^n \forall n \in \mathbb{N}$$

è detta successione geometrica di ragione (argomento) q.

Definizione 89 (Successione aritmetica) *La successione ($X = \mathbb{R}$, $q, \alpha \in \mathbb{R}$ assegnati):*

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = q + a_n \end{cases}$$

o anche:

$$a_n = \alpha + q \cdot n \forall n \in \mathbb{N}$$

è detta successione aritmetica.

Osservazione 17 *Data $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione, si può costruire una successione a partire da essa definendo:*

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \\ x_{n+1} = a_{n+1} + x_n \end{cases}$$

di termine generale:

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Osservazione 18 *Data $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione, si può costruire una successione a partire da essa definendo:*

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \\ x_{n+1} = a_{n+1} \cdot x_n \end{cases}$$

di termine generale:

$$x_n = \prod_{i=0}^{n} a_i.$$

6.1 Limiti di successioni reali per $n \to +\infty$

Definizione 90 (Limite – 1) *Dati $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione e $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ oppure che a_n tende a ℓ per n tendente a $+\infty$ se:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

(cioè se per ogni ε positivo la successione è definitivamente vicina a ℓ).

Definizione 91 (Limite – 2) *Dati $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione, diciamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ oppure che a_n tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$ se:*

$$\forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \geq M$$

e si dice che a_n diverge *a $+\infty$ per $n \to +\infty$ o che* diverge positivamente.

Definizione 92 (Limite – 3) *Dati $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione, diciamo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ oppure che a_n tende a $-\infty$ per n tendente a $+\infty$ se:*

$$\forall M > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, a_n \leq -M$$

e si dice che a_n diverge *a $-\infty$ per $n \to +\infty$ o che* diverge negativamente.

Non tutte le successioni hanno limite:

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 \text{se n è dispari} \\ -1 \text{se n è pari} \end{cases}$$

non ha limite per $n \to +\infty$.

Osservazione 19 (Limite funzioni→Limite successioni) *Se $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è tale che $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$, allora $\phi\lfloor\mathbb{N} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ha limite ℓ, e quindi ha limite ℓ la successione a_n definita da $a_n = \phi(n)$.*

Teorema 55 (di Collegamento) *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione di f.*
Allora $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) 0\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ sse $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I, x_n \neq x_0 \forall n$ e tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Teoremi sui limiti di successioni

Per i limiti di successioni valgono gli stessi teoremi che per i limiti di funzioni reali a variabile reale.
Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione.

Teorema 56 (1. Unicità del limite) *Se a ha limite, questo è unico.*

Definizione 93 *$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è detta* limitata *se $\exists M > 0$ tale che*

$$|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

cioè sse $-M \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [-M, M] \Leftrightarrow a_n$ è limitata sia superiormente che inferiormente.
a si dice limitata superiormente *se $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, ossia se $\exists M \in \mathbb{R}$ tc $a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.*
a si dice limitata inferiormente *se $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > -\infty$, ossia se $\exists m \in \mathbb{R}$ tc $a_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 57 (2. Limitatezza) *Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ allora la successione a è limitata*

Teorema 58 (3. Permanenza del segno) *Se $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è tale che $a_n \geq 0$ (risp. $a_n \leq 0$) definitivamente (cioè $\exists \bar{n} : \forall n <\geq \bar{n}, a_n \geq 0$ (risp. $a_n \leq 0$)):*
se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ allora $l \geq 0$ (risp. $\ell \leq 0$);
viceversa, se $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ha limite ℓ,
se $\ell > 0$ (risp. $\ell < 0$) allora $a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$) definitivamente.

Teorema 59 (4. Confronto-1) *Date $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,*
se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $b_n \geq a_n$ definitivamente allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Teorema 60 (5. Confronto-2) *Date $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,*
se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $b_n \leq a_n$ definitivamente allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.

Teorema 61 (6. Confronto-3 (due Carabinieri)) *Date $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,*
se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} = \ell$ e $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Teorema 62 (7. Somma, Prodotto, Rapporto) *Date $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tali che $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = m$, $\ell, m \in \mathbb{R} \cup +\infty, +\infty = \bar{\mathbb{R}}$, allora:*

- *se $m + \ell$ è definito[1], allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = \ell + m$;*

- *se $m \cdot \ell$ è definito, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \ell \cdot m$;*

- *se $\frac{m}{\ell}$ è definito[2], allora $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$;*

- *se $l = 0$ e $a_n > 0$ (risp. $a_n < 0$) definitivamente allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$ (risp. $-\infty$).*

---

[1] cioè non sono uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$
[2] cioè $\ell \neq 0$

Teorema 63 (Bolzano, Weierstrass) *Ogni successione di numeri reali limitata ha almeno una (infinite) sottosuccessione convergente a un limite reale.*

Definizione 94 (Compatto) $K \subseteq \mathbb{R}$ *è detto* compatto *se ogni successione* $\to K$ *ha una sottosuccessione convergente a un elemento di* K*.*

compatto $\Rightarrow$ limitato

Teorema 64 (Weierstrass) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua ha massimo e minimo.*

6.2 Monotonia

Definizione 95 ((Strettamente) Crescente) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *è* crescente *(risp.* strettamente crescente*) se* $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ *(risp.* $a_{n_2} > a_{n_1}$*) se* $n_2 > n_1$*, ovvero se* $n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \geq a_{n_1}$ *(risp.* $a_{n_2} > a_{n_1}$*).*

Osservazione 20 ((Strettamente) Crescente) *a è crescente (risp. strettamente crescente) se* $\forall n \in \mathbb{N}$ *si ha* $a_{n+1} \geq a_n$ *(risp.* $a_{n+1} > a_n$*).*

Definizione 96 ((Strettamente) Decrescente) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *è* decrescente *(risp.* strettamente decrescente*) se* $a_{n_2} \leq a_{n_1}$ *(risp.* $a_{n_2} < a_{n_1}$*) se* $n_2 > n_1$*, ovvero se* $n_2 > n_1 \Rightarrow a_{n_2} \leq a_{n_1}$ *(risp.* $a_{n_2} < a_{n_1}$*).*

Osservazione 21 ((Strettamente) Crescente) *a è crescente (risp. strettamente crescente) se* $\forall n \in \mathbb{N}$ *si ha* $a_{n+1} \leq a_n$ *(risp.* $a_{n+1} < a_n$*).*

Definizione 97 ((Strettamente) Monotòna) *Una successione è detta* monotòna *(risp.* strttamente monotòna*) se è crescente o decrescente (risp. strettamente crescente o strettamente decrescente).*

Osservazione 22 (Limite monotòne) *Le successioni monotòne hanno limite.*
Se la successione è crescente, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*;*
se la successione è decrescente, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Corollario 1 (Lim def. mon.) *Se una successione è definitivamente monotòna, allora ha limite.*

6.3 Sottosuccessioni

Definizione 98 (Sottosuccessione) *Data* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *e una successione* strettamente crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *la successione costruita da:*

$$b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, b(n) = a_{k(n)}$$

viene chiamata sottosuccessione della successione *di partenza a o* successione estratta dalla successione *di partenza a.*

Se k è l'identità, la sottosuccessione è la successione a stessa.
Se $k(n) = 2n$, si parla di *sottosuccessione dei termini di posto pari.*
Se $k(n) = 2n + 1$, si parla di *sottosuccessione dei termini di posto dispari.*

Osservazione 23 (lim. sottosucc.) *Se a ha limite ℓ, tutte le successioni estratte da a hanno limite ℓ.*

6.4 Successioni Notevoli

Successione Geometrica

Sia $x \in \mathbb{R}$, poniamo $a_n = x^n$:

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & x \cdot a_n \end{cases}.$$

$x > 1$: $a_n \geq 1 \forall n$, a è strettamente crescente, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$x = 1$: $a_n = 1 \forall n$, a è una successione costante, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

$-1x < 1, x \neq 0$: $|a_n| = |x|^n = \frac{1}{|\frac{1}{x}|^n} \to 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$x = 0$: $a_n = 0 \forall n$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$x = -1$: $a_n = (-1)^n$, $b_n = a_{2n} = 1 \forall n$, $c_n = a_{2n+1} = -1 \forall n$, $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$x < -1$: $b_n = a_{2n} = x^{2n} = |x|^{2n} \to +\infty$, $c_n = a_{2n+1} = x^{2n+1} = -|x|^{2n} \to -\infty$, $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Serie Geometrica

Definizione 99 (Serie Geometrica) *Le successioni del tipo* $a_n = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{n} x^k$ *sono dette* serie geometriche.

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{a - x^{n+1}}{1 - x}$$

$x \geq 1$: $a_n > 0 \forall n$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$x \leq 1$: $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

Altre

Esempio 1 *Fissato* $x \in \mathbb{R}$, *la successione*

$$a_n = \frac{x^n}{n!}$$

ha limite:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Esempio 2 *Fissato $x \in \mathbb{R}, x > 0$, la successione*

$$a_n = \sqrt[n]{x}$$

ha limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

Esempio 3 *La successione*

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

ha limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

Esempio 4 *Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la successione*

$$a_n = \sqrt[n]{n^k}$$

ha limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

Esempio 5 *La successione*

$$a_n = \sqrt[n]{n!}$$

ha limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

Esempio 6 *La successione*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ha limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$$

con $2 < \ell < 3$; si definisce:

$$e \stackrel{def}{=} \ell.$$

Si dimostra inoltre che $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Algoritmo di Erone

Dato $x > 0$ e fissato $\alpha > 0$, la successione:

$$a_n = \begin{cases} a_1 & = & \alpha \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \end{cases}$$

ha limite:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{x}.$$

6.5 Tecniche

1. Se si ha una successione a definita per ricorrenza, si prova a porre $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$, e anche $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$ con $a_n \,^{\ell} per n \to +\infty$, quindi controllare i valori che può assumere ℓ, facendo particolare attenzione ai casi $\ell = 0$ o $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$ (alcuni casi si possono scartare se la successione assume solo valori positivi, ...); eventualmente, si possono considerare le due sottosuccessioni pari e dispari, e porre ℓ_p e ℓ_d rispettivamente i lori limiti, e ragionare con questi.

2. Si prova a scrivere la formula chiusa (intuendola partendo dal basso o dall'alto e dimostrandola per induzione) e a studiarla come funzione, eventualmente usando gli sviluppi asintotici (utile soprattutto se è $a_n = f(n)$, è però difficile trovare la formula chiusa se si ha $a_{n+1} = f(a_n)$).

3. Si guarda se a_n è monotòna (nel qual caso ha limite, reale o infinito), studiando il segno di $a_{n+1} - a_n$ e trovando così l'intervallo a cui appartiene il limite (si può dimostrare la decrescenza usando maggiorazioni dimostrabili per esempio per induzione);

4. sfruttando maggiorazioni e minorazioni (ma non se si devono trovare gli intervalli di un parametro);

5. usando i criteri di confronto, della radice e del rapporto.

6.6 Massimo/Minimo Limite

Osservazione 24 *Sia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ poniamo $A_n = \{x_k : k \geq n\}$ e*

$$\ell_n = \inf A_n; \ell_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

$$L_n = \sup A_n; L_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora si ha:

$$\ell_n \leq x_n \leq L_n \forall n \in \mathbb{N}$$

e le successioni ℓ_n e L_n sono successioni monotòne ($A_{n+1} \cup \{x_n\} = A_n$).

Osservazione 25 *Se una successione è illimitata superiormente, allora $L_n = +\infty$.*
Gli insiemi A_i sono inscatolati uno nell'altro: $A_{n+1} = A_n \cup \{x_n\}$, quindi $A_n \supseteq A_{n+1} \forall n$, da cui $\ell_n \leq \ell_{n+1} \wedge L_n \geq L_{n+1}, \forall n$:

1. *se (x_n) è limitata inferiormente, (ℓ_n) è monotòna crescente;*

2. *se (x_n) è illimitata inferiormente, $\ell_n = -\infty, \forall n$;*

3. *se (x_n) è limitata superiormente, (L_n) è monotòna decrescente;*

4. *se* (x_n) *è illimitata superiormente,* $L_n = +\infty, \forall n$;

5. *si costruiscono due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi per dimostrare che la successione non ha limite.*

Essendo monotòne, hanno limite.

Definizione 100 (Minimo limite) *Se la successione è limitata inferiormente (☛(1)), poniamo:*

$$\liminf_{x\to+\infty} x_n \stackrel{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \ell_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

e si dice minimo limite *(indicato anche con* $\underline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$*).*
Se la successione è illimitata inferiormente (☛(2)), poniamo:

$$\liminf_{x\to+\infty} x_n \stackrel{def}{=} -\infty.$$

Definizione 101 (Massimo limite) *Se la successione è limitata superiormente (☛(3)), poniamo:*

$$\limsup_{x\to+\infty} x_n \stackrel{def}{=} \lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

e si dice massimo limite *(indicato anche con* $\overline{\lim}_{n\to+\infty} x_n$*).*
Se la successione è illimitata superiormente (☛(4)), poniamo:

$$\liminf_{x\to+\infty} x_n \stackrel{def}{=} +\infty.$$

Osservazione 26 (Caratterizzazione) *Sia* $\limsup_{n\to+\infty} x_n = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$;
allora L *è il più grande fra tutti i limiti di sottosuccessioni di* (x_k) *aventi limite;*
allora ℓ *è il più piccolo fra tutti i limiti di sottosuccessioni di* (x_k) *aventi limite.*
Ovvero:

1. *se una successione ha limite,* $\ell \leq L$;

2. *esiste almeno una sottosuccessione con* L *come limite.*

Osservazione 27

$$\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x} \Leftrightarrow \limsup_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$$

Osservazione 28 $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq L_n - \ell_n \leq 2\varepsilon, \forall n \geq \overline{n}$, *da cui:*

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n - \liminf_{n\to+\infty} x_n \leq 2\varepsilon.$$

6.7 Successione di Cauchy

Definizione 102 (Successione di Cauchy) *$x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è detta successione di Cauchy se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} :, m \geq \bar{n}, |x_n - x \leq \varepsilon.$$

Osservazione 29 (Cauchy limitata) *Ogni successione di Cauchy è limitata.*

Osservazione 30 (limite reale→Cauchy) *Se $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora (x_n) è successione di Cauchy,*
e viceversa se (x_n) è di Cauchy, allora ha limite reale.
Quindi: le successioni di Cauchy sono tutte e sole le successioni con limite reale.

Proposizione 2 (Criterio di Cauchy per le successioni) *Una successione con valori reali converge a un limite reale per $n \to +\infty$ sse è di Cauchy.*

6.8 Serie

Definizione 103 (Serie) *Data $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ successione, poniamo:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

$s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *è detta* successione delle somme parziali di (a_k) *o* serie di termine generale a_k.

Definizione 104 (Convergente/Divergente) *Se $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n \in \mathbb{R}$ la serie è detta* convergente*;*
se $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n \in \{+\infty, -\infty\}$ la serie è detta divergente*;*
se $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n$ la serie è detta indeterminata*.*

Osservazione 31 (Serie geometrica) *Dati $a \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$, la successione geometrica $a_k = a \cdot q^k$ dà origine alla* serie geometrica di ragione q*:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & , se \quad q \neq 1 \\ a \cdot (n+1) & , se \quad q = 1 \end{cases}.$$

Se $|q| = 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, quindi la serie converge;
se $q \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & , se \quad a > 0 \\ -\infty & , se \quad a < 0 \end{cases}$, quindi la serie diverge;
se $q \leq 1$, $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n$, quindi la serie è indeterminata.

Definizione 105 (Somma della serie) *Se $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$ poniamo $\ell = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$; ℓ è detto* somma della serie.
Se $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ (risp. $-\infty$) poniamo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$ (risp. $-\infty$).

Osservazione 32 (Conv. serie $\to$ lim succ.) *Se (s_n) converge, allora* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$.
Infatti:

$$\begin{array}{ccccc} s_n & - & s_{n-1} & = & \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \ell & & \ell & & \end{array}.$$

Ovvero: la serie converge solo se la successione è infinitesima, ma non viceversa:

$$\textit{serie convergente} \overset{\Rightarrow}{\underset{\not\Leftarrow}{}} \textit{successione infinitesima.}$$

Osservazione 33 (Criterio di Cauchy)

(s_n) *converge* $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n}, |s_n - s_m| \leq \varepsilon((s_n)$ *è una successione di Cauchy*$)$.

Osservazione 34 (Criterio di Cauchy per le serie)

$$(s_n) \textit{ converge} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0, \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 n_0 : \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k \leq \varepsilon\right|.$$

Esempio 7 (Serie Armonica) *La* serie armonica*:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = 1 + frac12 + frac13 + \cdots + \frac{1}{n}$$

tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$.
Si osservi che $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Esempio 8 (Serie Armonica Generalizzata)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty & se \quad \alpha \leq 1 \\ < +\infty & se \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

(Per $\alpha = 1$ si ha la serie armonica.)

Esempio 9 (Serie Telescopica) *Dalla successione:*

$$a_k = b_{k+1} - b_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

si ricava la serie telescopica:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0:$$

$$\begin{cases} s_0 & = & a_0 \\ s_{n+1} & = & s_n + a_n \end{cases}.$$

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$ *allora* $\exists \lim_{n\to+\infty} s_n = \ell - b_0$;
se $\nexists \lim_{n\to+\infty} b_n$ *allora* $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n$.

Esempio 10 (Serie Esponenziale) *Dato $x \in \mathbb{R}$ poniamo:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

s_n converge assolutamente cioè $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$ converge.

Osservazione 35 (Serie a termini positivi) *Sia $a_n \geq 0$ definitivamente; allora:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

da cui:

$$s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0 \text{ definitivamente}$$

quindi la successione delle somme parziali (s_n) è definitivamente crescente quindi (s_n) ha limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

Corollario 2 (Confronto Asintotico) *Siano $a_n \geq 0$, $b_n > 0$;*
se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$ allora se $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ converge allora converge anche $s_n = \sum_{k=0*^n a_k}$.

Criterio 3 (Criterio della radice) *Sia $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$;*

1. *se $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$ allora la serie $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge;*

2. *se $\limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$ allora la serie $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ diverge.*

Ovvero, data una serie $\sum_{k=0}^{n}$ a termini positivi ($a_n \geq 0$) si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \in \begin{cases} [0,1) & la\ serie\ converge \\ \{1\} & ? \\ (1,+\infty) & laseriediverge \end{cases}.$$

Eventualmente, si può rendere più forte quanto detto mettendo $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ al posto di $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$.

Osservazione 36

- *Se $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,1)$ (o $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,1)$) allora $a_n \to_{n\to+\infty} 0$.*

- *Se $a_n \geq 0$ e $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in (1,+\infty]$ allora $a_n \to +\infty$.*

- *Se $\ell > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > \frac{l+1}{2} > 1$ definitivamente $\Rightarrow a_n > \frac{l+1}{2}^n$.*

Teorema 65 *Sia $\{a_n\} > 0$ e supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; allora $\sqrt[n]{a_n} \to_{n\to+\infty} L$.*

Criterio 4 (Criterio del rapporto) *Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.*
Supponiamo:

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,1)$$

; allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Se invece:

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in (1, +\infty]$$

; allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge positivamente.}$$

Osservazione 37 *Dire che* $\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *significa dire che* $\exists q < 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tali che* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1 \forall n \geq n_0$ *cioè* a_n *è definitivamente decrescente.*
Analogamente: se $\liminf_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *allora definitivamente* $\exists r > 1 \exists n_1 \in \mathbb{N}$ *tali che* $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \forall n \geq n_1$ *cioè* a_n *è definitivamente crescente.*

6.9 Riordinamento

Definizione 106 (Riordinamento) *Sia* $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *biunivoca;*
data la successione $\{a_n\}$ *diciamo che la successione* $\{a_{k(n)}\}$ *è un riordinamento di* $\{a_n\}$*.*

Teorema 66 (di Riordinamento) *Se* $a_n \geq 0$ *allora le serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k(n)}$ *hanno lo stesso carattere, cioè* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converse sse* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{k(n)}$ *converge, e in tal caso le somme coincidono.*

6.10 Convergenza Assoluta

Definizione 107 (Convergenza Assoluta) *Sia* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$*;*
si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente *se converge la serie dei moduli* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$*.*

Teorema 67 *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente allora converge anche ordinariamento (cioè converge* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*).*

Corollario 3 *Se* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$ *allora* $|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$*.*

6.11 Serie e Integrali

Criterio 5 (del Confronto tra Serie e Integrali) *Sia* $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *decrescente con valori* ≥ 0*, integrabile in ogni intervallo* $[1, a]$ *con* $a > 1$*; allora* $\exists \lim_{a\to+\infty} \int_1^a g(x)\,dx \in [0, +\infty]$*.* *Infatti è* $F(a) = \int_1^a g(x)\,dx$ *decrescente.*
Il limite è detto:

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Proposizione 3 *1.* (s_n) *è convergente* $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$*;*

2. (s_n) *è divergente* $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.

Esempio 11 *Dato* $\alpha > 0$*, la serie* $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$*:*

- *per* $\alpha = 1$ *diverge (☛ serie armonica);*
- *per* $\alpha \in (0,1)$ *diverge per confronto con la serie armonica, perché* $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$*;*
- *per* $\alpha = 2$ *converge per confronto con la serie telescopica;*
- *per* $\alpha < 2$ *diverge perché* $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2} \forall k \in \mathbb{N}$*;*
- *per* $\alpha \in (1,2)$ *converge per confronto con l'integrale di* $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$*:*

$$\int_1^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1} \cdot x^{-\alpha+1}\right]_1^a = \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \to_{a\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Osservazione 38 (Parti positiva e negativa) (s_n) *converge assolutamente sse convergono sia* (s_n^+) *che* (s_n^-).
Se (s_n) *converge ma non converge assolutamente, allora entrambe le* (s_n^+) *e* (s_n^-) *divergono a* $+\infty$.

Proposizione 4 *Se* (s_n) *converge assolutamente, ogni suo riordinamento converge, e convergono allo stesso limite di* (s_n).

6.12 Serie a segni alterni

Definizione 108 (Serie a segni alterni) *Sia* $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$ *una successione;*
allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

si dice serie a segni alterni.

Criterio 6 (di Liebniz) *Se* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ *e* (a_k) *è decrescente allora* (s_n) *converge.*

Corollario 4 *Se* $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ *e* (a_k) *è definitivamente decrescente allora* (s_n) *converge.*

Esempio 12 (Serie armonica a segni alterni) *Data la successione* $a_k = \frac{1}{k}$*:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

si definisce serie armonica a segni alterni*, e converde.* *Non abbiamo convergenza assoluta.*
Per determinare di quanto converge, occorre ridurla a serie di Tatylor: $log(2)$.

6.13 Integrali Generalizzati o Impropri

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni $[a, b]$ con $b > a$, $f(x) \geq 0 \forall x \geq a$.
La funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente: se $x_2 > x_1$ allora $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0$. Quindi $\exists \lim_{x\to+\infty} F(x)$, che indichiamo con:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Definizione 109 (Integrale Improprio o Generalizzato, Sommabilità) *Se il limite è reale, diciamo che f è* integrabile in senso generalizzato *o* improprio *o che f è* sommabile sulla semiretta $[a, +\infty)$*:*

$$\varphi \geq 0 \forall x \text{ è somm. su } [a, +\infty \Leftrightarrow \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

In modo analogo per $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

Osservazione 39

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(t)\,dt.$$

Osservazione 40 (Confronto) *Siano $f, g : [a, +\infty) \to [0, +\infty)$ integrabili su ogni $[a, b]$ con $b > a$, e $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \geq a$;*
allora:

- *se g è sommabile lo è anche f;*
- *se f non è sommabile non lo è neanche g.*

Infatti si ha $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt = G(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} F(x) \leq \lim_{x\to+\infty} G(x)$.

6.13.1 Uso del teorema di confronto con le funzioni campione

Funzioni campione:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

$f(x) \geq 0 \geq a > 0$, f integrabile su ogni $[a, b]$, $\exists \alpha > 0$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot x^\alpha = \ell$.
Si confronta con $\varphi(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ per cui:

$$\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{\varphi(x)} \Rightarrow \exists x_0 \text{ tc } \forall x \geq x_0 \text{ si ha } \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leq \ell + 1.$$

Se $\alpha > 1$ e $\ell \in \mathbb{R}$ allora si usa il teorema di confronto con la funzione $g(x) = \varphi(x) \cdot (l+1)$ sulla semiretta $[x_0, +\infty)$ quindi f è sommabile su $[x_0, \infty)$ quindi lo è anche su $[a, +\infty)$ dato che $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$.
Se $\alpha < 1$ e $\ell > 0$ (anche $\ell = +\infty$) allora f non è sommabile dato che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \ell > 0$ allora $\exists c > 0$ tale che definitivamente $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \geq c$. Se

$\ell \in \mathbb{R}$ possiamo prendere $\frac{\ell}{2}$; se $\ell = +\infty$ possiamo prendere c qualuque, per esempio $c = 1$, e confrontiamo con la funzione $\psi(x) = c \cdot \varphi(x)$ sulla semiretta $[x_0, +\infty)$ con x_0 grande tc $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \geq c \forall x \geq x_0$, quindi $f(x) \geq c \cdot \varphi(x) \forall x \geq x_0$ quindi f non è sommabile su $[x_0, +\infty)$ quindi non è sommabile su $[a, +\infty)$.

6.13.2 Integrali Generalizzati

Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b)$, f integrabile su ogni $[a, x]$ con $x \in (a, b)$;
la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è crescente, quindi $\exists \lim_{x \to b^-} F(x) = \ell$; se $\ell < +\infty$ si dice che f è sommabile su (a, b) e si pone $\ell = \int_a^b f(t)\,dt$; ℓ è detto *integrale generalizzato* o *improprio* di f su $[a, b)$.
Sia $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \forall x \in (a, b]$, f integrabile su ogni $[x, b]$ con $x \in (a, b)$;
la funzione $G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ è decrescente, quindi $\exists \lim_{x \to a^+} G(x) = \ell$; se $\ell < +\infty$ si dice che f è sommabile su (a, b) e si pone $\ell = \int_a^b f(t)\,dt$; ℓ è detto *integrale generalizzato* o *improprio* di f su $(a, b]$.
Significato geometrico: area illimitata, finita (se sommabile) o infinita (se non sommabile).

Teorema 68 *Se* $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in (a, b)$ *allora:*

- *se g è sommabile lo è anche f;*

- *se f non è sommabile non lo è neanche g.*

Definizione 110 *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *$f$ integrabile su ogni* $[x_1, x_2] \subset (a, +\infty)$, $f(x) \geq 0 \forall x > a$;
f è detta sommabile su $(a, +\infty)$ *se le restrizioni* $f\lfloor_{[a,a+1)}$ *e* $f\lfloor_{[a+1,+\infty)}$ *sono sommabili su* $(a, a+1]$ *e* $[a+1, +\infty)$ *rispettivamente; si pone allora* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{a+1} f(t)\,dt + \int_{a+1}^{+\infty} f(t)\,dt$.

Osservazione 41 *f è sommabile su $(a, +\infty)$ sse per ogni $x_0 > a$, $f\lfloor_{(a,x_0]}$ e $f\lfloor_{[x_0,+\infty)}$ sono sommabili sse per qualche $x_0 > a$, $f\lfloor_{(a,x_0]}$ e $f\lfloor_{[x_0,+\infty)}$ sono sommabili.*

...

Definizione 111 (Funzione Gamma di Eulero) *La funzione:*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t \cdot t^{\alpha-1}\,dt, \forall \alpha > 0}$$

si dice funzione Gamma di Eulero.
Si ha: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(alpha)$, $\Gamma(1) = 1$.
Quindi, per induzione: $\Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N}$.

Osservazione 42 *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile su ogni $[a, b]$ con $b > a$; diciamo che f è sommabile su $[a, +\infty)$ se $|f|$ è sommabile su $[a, +\infty)$ cioè se* $\lim_{M \to +\infty \int_a^M |f(t)|\,dt \in \mathbb{R}}$.

Osservazione 43 *f è sommabile su $[a, +\infty)$ sse lo sono f^+ e f^-.*

Osservazione 44 *Se* $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ *sono sommabili su* $[a, +\infty)$ *lo è anche* $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ *dato che* $\int_a^M \varphi(x)\,dx = \int_a^M (\varphi_1(x) + \varphi_2(x))\,dx = \int_a^M \varphi_1(x)\,dx + \int_a^M \varphi_2(x)\,dx \to l_1 + l_2 \in \mathbb{R}$.

Osservazione 45 *Se* f_1 *e* f_2 *sono sommabili, lo è anche* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *essendo* $|f(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$, $|f_1$, $|f_2|$ *sommabili (come funzioni positive), quindi* $|f_1| + |f_2|$ *è sommabile, quindi per confronto* $|f|$ *è sommabile.*

Osservazione 46 *Se* f *è sommabile e* $c \in \mathbb{R}$*, allora anche* $g(x) = c \cdot f8x)$ *è sommabile, essendo* $|g(x)| = |c| \cdot |f(x)|$.

Capitolo 7

Combinatoria e Probabilità

7.1 Combinatoria

7.1.1 Fattoriale

Definizione 112 (Fattoriale) $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$

$$\begin{cases} 0\ ! = 1 \\ n\ ! = n \cdot (n-1)\,!\ \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

7.1.2 Coefficienti Binomiali

Definizione 113 (Coefficiente Binomiale) $\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!}$

$$\binom{\text{n}}{\text{k}} = \binom{\text{n}}{\text{n-k}}$$
$$\binom{\text{n}}{\text{k}} = \binom{\text{n-1}}{\text{k-1}} + \binom{\text{n-1}}{\text{k}}$$

7.1.3 Combinazioni

- Natura.

$\mathcal{P}_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

$\mathcal{C}'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$

7.1.4 Permutazioni

- Ordine.

$\mathcal{P}_n = n!$

$\mathcal{D'}_n^{k_1,k_2,\cdots,k_n} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_n!}$

7.1.5 Disposizioni

- Natura;
- ordine.

$\mathcal{D}_{n,k} = \mathcal{C}_{n,k} \cdot \mathcal{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
$\mathcal{D}'_{n,k} = n^k$

7.2 Probabilità

7.2.1 Definizioni

1. **Definizione Classica (Laplace)**: per casi *equiprobabili* è $p = \frac{f}{n}$;
2. **Definizione Frequentista (Legge dei Grandi Numeri o Legge Empirica del Caso**: $p = \lim_{n\to\infty} \dfrac{f}{n}$;
3. **Definizione Soggettivista**;
4. **Definizione Assiomatica**:
   (a) $p() = 0$
   (b) $p(\Omega) = 1$
   (c) $0 \leq f \leq n \to 0 \leq \frac{f}{n} \leq 1 \to 0 \leq p \leq 1$
   (d) $p(A^c) = p(\bar{A}) = 1 - p(A)0$

7.2.2 Probabilità Condizionata

$p(A \setminus B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

7.2.3 Somma

- Per eventi *incompatibili* (tali cioè che $A \cap B =$): $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- Per eventi *compatibili* (tali cioè che $A \cap B \neq$): $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$.

7.2.4 Prodotto

- Per eventi *stocasticamente indipendenti* (tali cioè che $p(A) = p(A \setminus B)$: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.
- Per eventi *stocasticamente dipendenti* (tali cioè che $p(A) \neq p(A \setminus B)$: $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B \setminus A)$.

7.2.5 Formula di Bayes

$$p(H_i \setminus E) = \frac{p(H_i) \cdot p(E \setminus H_i)}{\sum_{1}^{n} p(H_i) \cdot p(E \setminus H_i)}$$

7.2.6 Distribuzione Binomiale di Bernoulli

$$p_{n,k} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

7.2.7 Speranza Matematica o Valor Medio

$\mathcal{M}(X) = \sum_{1}^{n} x_i p_i$

Capitolo 8

Cenni di Algebra Astratta

Definiamo *algebra* una struttura $[G; *_1, *_2, \cdots, *_k]$ dove G è un insieme (detto *insieme sostegno*, finito (nel qual caso della forma $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$) o infinito) e le $*_i$ (con i intero da 1 a $k \in \mathbb{N}$) sono *operazioni* r_i*-arie*, ovvero funzioni definite:

$$*_i : G^{r_i} \to G$$

con la convenzione che la successione r_i sia decrescente (andrebbe precisato che i simboli delle operazioni sono elementi di un definito alfabeto di algebra). r_i è detta *arietà* della funzione $*_i$, e $*_i$ è detta *operazione* r_i*-aria*; in tal caso, ancora, $*_i$ si scrive in funzione di r_i elementi di G: $*_i(g_1, g_2, \cdots, g_{r_i}) = g \in \mathbb{G}$. Solitamente, si considerano operazioni *binarie*, ovvero di arità 2 (in tal caso, si utilizzano le seguenti notazioni: prefissa ($*_i(g_1, g_2) = *_1 g_1 g_2$), infissa ($*_i(g_1, g_2) = g_1 *_i g_2$) o suffissa ($*_i(g_1, g_2) = g_1 g_2 *_i$)), o *ternarie* (di arietà 3), oppure ancora *unarie* (di arità 1: per esempio, l'identità, o l'inverso); a volte, si considerano anche operazioni *nullarie* o *zerarie* definite da $\{\emptyset\} \to G$, che equivalgono a fissare un elemento (una costante) in G (per esempio, lo zero, o l'unità). Si definisce gruppoide un'algebra avente struttura $[G; \cdot]$, dove $\cdot$ è un'operazione binaria (cioè: $\cdot : G^2 \to G$) in notazione additiva (eventualmente indicata da $*$); analogamente, si utilizza $[G; +]$ in notazione additiva; l'operazione si indica spesso anche con altri simboli. Un'algebra spesso, se ciò non porta ad ambiguità, è indicata semplicemente facendo riferimento al suo sostegno (specie se le operazioni vi sono definite naturalmente).
In una struttura algebrica di sostegno G, in riferimento ad una operazione $*$, si definiscono le proprietà (spesso attribuite al sostegno stesso o alla struttura):

associativa $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$

commutativa a sinistra $\forall a, b, c \in G, a * (b * c) = a * (c * b)$

commutativa a destra $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c) = (b * a) * c$

commutativa $\forall a, b \in G, a * b = b * a$

idempotente $\forall a \in G, a^2 \overset{def}{=} a * a = a$

mediale $\forall a, b, c, d \in G, (a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$

In riferimento a due operazioni $*$ e $+$, si definiscono le proprietà:

distributiva a sinistra di $*$ rispetto a $+$ $\forall a, b, c \in G, a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

distributiva a destra di $*$ rispetto a $+$ $\forall a, b, c \in G, (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

Un gruppoide associativo è detto *semigruppo*; una struttura commutativa è denotata con l'aggettivo *abeliano*.

Strutture con due operazioni sono definite analogamente bigruppoidi (con le varie proprietà); tra le due operazioni, in particolare, esisterà un collegamento, spesso rappresentato dalla proprietà distributiva. Chiamiamo *anello* un bigruppoide $[S; +, \cdot]$ dove $[S; +]$ è un gruppo, $[S; \cdot]$ un semigruppo e vale la distributiva di $+$ rispetto a $\cdot$. Chiamiamo *corpo* una struttura come sopra dove $[S; +]$ è un gruppo abeliano, $[S \setminus \{0\}; \cdot]$ un gruppo e vale la distributiva (con 0 si intende lo zero di S rispetto a $\cdot$); se $[S \setminus \{0\}; \cdot]$ è un gruppo abeliano, parliamo di *campo*.

Introduciamo quindi una struttura del tipo $[K, S; +, \cdot]$, dove sia $[S; +]$ un gruppoide e sia definita una operazione esterna (detta *moltiplicazione per scalare*) come: $\cdot : K \times S \to S, \langle k, s \rangle \mapsto ks$. Se $[S; +]$ è un gruppo abeliano, valgono le distributive (cioè $\forall k, k' \in K, \forall s \in S, (k + k') \cdot s = ks + ks'$ e $\forall k \in K, \forall s, s' \in S, k \cdot (s + s') = ks + ks'$), e vale la $\forall s \in S, 1 \cdot s = s$, allora si parla di *spazio vettoriale*.

Con $\mathbb{Z}_n$ denotiamo l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\sim$, dove la relazione di equivalenza $\sim$, fissato $m \in \mathbb{Z}$ è definita tra a e b se $a - b = km$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$.

8.1 Principio di Induzione

8.1.1 Induzione Completa

Proposizione 5 (Induzione Completa) *Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato in n, $n \in \Omega$, Ω insieme totalmente ordinato (?), e sia $m = \mathsf{min}(\Omega)$;*

base $\mathcal{P}(m)$

passo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$

allora:

$$\forall n \in \Omega, \mathcal{P}(n)$$

Proposizione 6 (Altre forme) *Sia M un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ contenente tutti gli elementi che soddisfano alla $\mathcal{P}$, dove $\mathcal{P}$ è un predicato definito su $\mathbb{N}$. Allora, se $0 \in M$ e la $n \in M$ implica la $n + 1 \in M$, allora $M = \mathbb{N}$.*

8.1.2 Induzione Trascendente

Proposizione 7 (Induzione trascendente) *Sia M un insieme ben ordinato (con una relazione di ordine totale e tale che ogni suo sottoinsieme abbia minimo); allora, se $\forall n < \bar{n}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(\bar{n})$ allora $\forall n \in M \mathcal{P}(n)$, dove $\mathcal{P}$ è un predicato a variabile in M.*

Capitolo 9

Alfabeto Greco

A	α	alfa/alpha	angoli piani
B	β	beta	angoli piani
Γ	γ	gamma	angoli piani
Δ	δ	delta	area; $\Delta = b^2 - 4ac$ (*discriminante*)
E	ϵ/ε	epsilon	
Z	ζ	zeta	
H	η	eta	
Θ	θ/ϑ	theta	angoli
I	ι	iota	
K	κ	kappa	
Λ	λ	lambda	scalare di un vettore
M	μ	mu/mi	[SI]: micro (10^{-6})
N	ν	ni/nu	ν: frequenza
Ξ	ξ	xi	
O		omicron	
Π	π/ϖ	pi/pi greco	Π: produttoria; $\pi \simeq 3,14159265358979323846264338327 9...$
P	ρ/ϱ	rho	
Σ	σ/ς	sigma	Σ: sommatoria; σ: deviazione standard
T	τ	tau	τ: sezione aurea $(1,618...)$
Υ	υ	upsilon	
Φ	ϕ/φ	phi	ϕ: sezione aurea $(1,618...)$; $\phi(n)$: funzione di Eulero; $\Phi(\vec{V})$: flusso
X	χ	chi	
Ψ	ψ	psi	
Ω	ω	omega	angoli solidi

Tabella 9.1: Alfabeto Greco

Capitolo 10

Alfabeto Cirillico[1]

carattere stampatello *corsivo*	traslitterazione	pronuncia
А а *А а*	A	*a*
Б б *Б б*	B	*b*
В в *В в*	V	*v*
Г г *Г г*	G	*g* di **g**atto
Д д *Д д*	D	*d*
Е е *Е е*	E	*ie* di **ie**ri quando accentata, altrimenti *i* breve
Ё ё *Ё ё*	Ë	*io* di **io**ta, sempre accentata
Ж ж *Ж ж*	Ž	*j* del francese **j**ardin
З з *З з*	Z	*s* sonora di ro**s**a
И и *И и*	I	*i*
Й й *Й й*	J	*i* breve, come in **i**ato
К к *К к*	K	*c* dura di **c**asa
Л л *Л л*	L	*l*
М м *М м*	M	*m*
Н н *Н н*	N	*n*
О о *О о*	O	o quando accentata, altrimenti a breve
П п *П п*	P	*p*
Р р *Р р*	R	*r*
С с *С с*	S	*s* sorda di **s**i
Т т *Т т*	T	*t*
У у *У у*	U	*u*
Ф ф *Ф ф*	F	*f*
Х х *Х х*	KH	*ch* del tedesco a**ch**tung
Ц ц *Ц ц*	C	*z* sorda di o**z**io
Ч ч *Ч ч*	Č	*c* dolce di **c**iao
Ш ш *Ш ш*	Š	*sc* di **sc**ivolo
Щ щ *Щ щ*	ŠČ	come il precedente, ma più lungo e palatalizzato
Ъ ъ *Ъ ъ*	"	"segno duro" - muto, fa da pausa all'interno di una parola
Ы ы *Ы ы*	Y	"i gutturale", un suono intermedio tra *i* e *u*
Ь ь *Ь ь*	'	"segno debole" : Нь = N'= *gn* in ca**gn**a Ль = L' = *gl* in a**gl**io
Э э *Э э*	E	e aperta di b**e**llo

[1]tratto da it.wikipedia.org

Parte II

Bibliografia

Bibliografia

[1] Richard Courant, Herbert Robbins, *Che cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, 2002, Seconda Edizione riveduta da Ian Stewart.

[2] Massimo Gobbino, *Schede Olimpiche*, Pitagora, 2003, Prima Edizione.

[3] Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo, *Primo Corso di Analisi Matematica*, Pitagora Editrice, 1997, Prima Edizione.

[4] Emilio Acerbi, *Matematica Preuniversitaria di Base*, Pitagora Editrice, 1997, Prima Edizione.

[5] Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, 2002, Terza Edizione.

Parte III

Indici

Elenco delle tabelle

1.1 Tavole di Verità 6
1.2 Leggi Logiche Notevoli 7

3.1 Formule di Conversione 19
3.2 Archi noti 19
3.3 Archi associati 20
3.4 Conica Generica 24

4.1 Derivate Fondamentali 44
4.2 Regole di Derivazione 45

9.1 Alfabeto Greco 79

Indice

0.1 Prefazione 2

I Formulario **3**

1 Logica e Insiemistica **5**
1.1 Logica 5
1.1.1 Definizioni 5
1.1.2 Connettivi Logici 5
1.1.3 Tabelle di Verità 6
1.1.4 Leggi logiche notevoli 6
1.2 Insiemistica 6

2 Algebra Elementare **9**
2.1 Definizione di $\mathbb{R}$ 9
2.2 Scomposizioni Notevoli 10
2.2.1 Potenza di un polinomio 10
2.2.2 Fattorizzazione 10
2.2.3 Risoluzione di equazioni di secondo grado in una incognita 10
2.3 Radicali doppi 10
2.4 Disequazioni irrazionali 11
2.5 Potenze 11
2.5.1 Definizione 11
2.5.2 Proprietà 11
2.6 Logaritmi 11
2.6.1 Definizione 11
2.6.2 Proprietà 11
2.7 Modulo o Valore Assoluto 12
2.7.1 Definizione 12
2.7.2 Proprietà (Spazi Metrici) 12
2.8 Altre funzioni 12
2.8.1 Fattoriale, Semifattoriale 12
2.8.2 Segno 12
2.8.3 Parte intera, parte decimale 13

2.8.4 Parte positiva, Parte negativa 13
2.8.5 Funzione di Dirichlet 13
2.8.6 Funzioni iperboliche 13
2.8.7 Funzione Esponenziale, $e^x = \mathtt{exp}(x)$ 14
2.9 Serie 14
2.9.1 Serie Aritmetiche 14
2.9.2 Serie Geometriche 14
2.9.3 Disuguaglianze Notevoli 15
2.9.4 Sommatorie Classiche 15

3 Geometria **17**
3.1 Goniometria 17
3.1.1 Relazione Fondamentale 17
3.1.2 Tangente e Cotangente: Definizioni 17
3.1.3 Secante e Cosecante: Definizioni 17
3.1.4 Formule di Addizione 17
3.1.5 Formule di Duplicazione e di Triplicazione 18
3.1.6 Formule di Bisezione 18
3.1.7 Formule Parametriche 18
3.1.8 Formule di Prostaferesi 18
3.1.9 Formule di Werner 18
3.1.10 Formule di Conversione 18
3.1.11 Archi Noti 19
3.1.12 Archi Associati 19
3.2 Trigonometria 19
3.2.1 Triangolo Qualsiasi 19
3.2.2 Triangolo Rettangolo 20
3.3 Geometria Analitica 20
3.3.1 Punto e Retta 20
3.3.2 Coniche 1: Circonferenza 21
3.3.3 Coniche 2.1: Parabola con asse parallelo all'asse y 21
3.3.4 Coniche 2.2: Parabola con asse parallelo all'asse x 22
3.3.5 Coniche 3: Ellisse 22
3.3.6 Coniche 4.1.1: Iperbole riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse x 22
3.3.7 Coniche 4.1.2: Iperbole riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse y 23
3.3.8 Coniche 4.2.1: Iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse x 23
3.3.9 Coniche 4.2.2: Iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria con fuochi sull'asse y 23
3.3.10 Coniche 4.3: Iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti . . . 23
3.3.11 Coniche 4.4: Iperbole equilatera traslata o Funzione omografica 24

3.3.12 Coniche 5: Conica generica 24
3.4 Trasformazioni: Affinità 25
3.4.1 Prodotto di Affinità 25
3.4.2 Casi Particolari di Affinità 25
3.4.3 Proprietà Invarianti delle Affinità 28

4 Analisi 29
4.1 Topologia: Intervalli 29
4.2 Relazioni e Funzioni 31
4.2.1 Relazioni 31
4.2.2 Funzioni 32
4.3 Limiti e Forme Indeterminate 33
4.3.1 Definizione 33
4.3.2 Forme Indeterminate 34
4.3.3 Limiti Notevoli 34
4.3.4 Altri Limiti ricavabili dai Limiti Fondamentali 34
4.3.5 Operazioni su $\pm\infty$ 36
4.3.6 Teoremi sui Limiti 37
4.3.7 Teoremi di de l'Hôpital 37
4.3.8 Proprietà sui Limiti 38
4.3.9 Limiti di Funzioni Monotòne 39
4.3.10 Infinitesimi 39
4.4 Funzioni Continue 40
4.4.1 Definizione 40
4.5 Derivate 41
4.5.1 Definizione 41
4.5.2 Proprietà locali di una funzione 42
4.5.3 Convessità 43
4.5.4 Teoremi 43
4.5.5 Teoremi Funzioni Convesse 43
4.5.6 Derivate Fondamentali 44
4.5.7 Regole di Derivazione 44
4.6 Integrali 45
4.6.1 Definizione 45
4.6.2 Integrale di Riemann 45
4.6.3 Teoremi 46
4.6.4 Integrali Notevoli Fondamentali 47
4.6.5 Regole di Integrazione 48
4.6.6 Altri Integrali Notevoli 48
4.6.7 Integrali per Serie 48
4.6.8 Integrazione di Funzioni Goniometriche 49
4.6.9 Integrazione di Funzioni Razionali 49
4.6.10 Tecniche di Integrazione 49

49
4.6.12 Lunghezze di Archi di Curva, Volumi e Superfici di Solidi di Rotazione . . . 50
4.7 Polinomio di Taylor . . . 50
4.7.1 Formula di Taylor con resto di Lagrange . . . 51
4.7.2 Formula di Taylor con resto di integrale . . . 51
4.7.3 Sviluppi di Taylor . . . 51
4.8 Studio di Funzione . . . 52
4.9 Approssimazione di Radici Reali . . . 53

5 Campo complesso **55**
5.1 Rappresentazione . . . 55
5.1.1 Rappresentazione Algebrica . . . 55
5.1.2 Rappresentazione Polare/Trigonometrica . . . 55
5.1.3 Rappresentazione esponenziale . . . 56
5.2 Radici n-esime . . . 56
5.3 Polinomi a valori complessi . . . 56

6 Successioni e Serie **57**
6.1 Limiti di successioni reali per $n \to +\infty$ . . . 58
6.2 Monotonia . . . 60
6.3 Sottosuccessioni . . . 60
6.4 Successioni Notevoli . . . 61
6.5 Tecniche . . . 63
6.6 Massimo/Minimo Limite . . . 63
6.7 Successione di Cauchy . . . 65
6.8 Serie . . . 65
6.9 Riordinamento . . . 68
6.10 Convergenza Assoluta . . . 68
6.11 Serie e Integrali . . . 68
6.12 Serie a segni alterni . . . 69
6.13 Integrali Generalizzati o Impropri . . . 70
6.13.1 Uso del teorema di confronto con le funzioni campione . . . 70
6.13.2 Integrali Generalizzati . . . 71

7 Combinatoria e Probabilità **73**
7.1 Combinatoria . . . 73
7.1.1 Fattoriale . . . 73
7.1.2 Coefficienti Binomiali . . . 73
7.1.3 Combinazioni . . . 73
7.1.4 Permutazioni . . . 73
7.1.5 Disposizioni . . . 74
7.2 Probabilità . . . 74
7.2.1 Definizioni . . . 74

7.2.2 Probabilità Condizionata 74
7.2.3 Somma 74
7.2.4 Prodotto 74
7.2.5 Formula di Bayes 75
7.2.6 Distribuzione Binomiale di Bernoulli 75
7.2.7 Speranza Matematica o Valor Medio 75

8 Cenni di Algebra Astratta 77
8.1 Principio di Induzione 78
8.1.1 Induzione Completa 78
8.1.2 Induzione Trascendente 78

9 Alfabeto Greco 79

10 Alfabeto Cirillico[3] 81

II Bibliografia 83

Bibliografia 85

III Indici 87

Elenco delle Tabelle 89

Indice 91

[3]tratto da it.wikipedia.org