

# Capitolo 4

## La Trasformata di Fourier

### 4.1. Serie di Fourier

Sia  $F(x)$  una funzione soddisfacente le seguenti condizioni:

1.  $F(x)$  è definita nell'intervallo  $c < x < c + 2l$ ;
2.  $F(x)$  e  $F'(x)$  sono generalmente continue per  $c < x < c + 2l$ ;
3.  $F(x + 2l) = F(x)$ , cioè  $F(x)$  è periodica di periodo  $2l$ .

Allora in ogni punto di continuità di  $F$  si ha

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.1)$$

mentre in ogni punto di discontinuità si ha

$$\frac{1}{2} (F(x+0) + F(x-0)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (4.2)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) dx, \quad (4.3)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

e  $F(x+0)$  e  $F(x-0)$  indicano rispettivamente i limiti destro e sinistro nella discontinuità.<sup>1</sup>

La serie (4.1), o (4.2), con i coefficienti definiti da (4.3), (4.4) e (4.5), si chiama *serie di Fourier di  $F(x)$* . In molti casi interessanti risulta  $c = 0$  oppure  $c = -l$ . Le condizioni 1, 2 e 3 prendono il nome di *condizioni di Dirichlet* e sono condizioni sufficienti (vedere teorema 4.1.2) per la convergenza della serie di Fourier.

Prima di dimostrare quanto appena affermato consideriamo ora due lemma preliminari.

**Lemma 4.1.1** *Se  $k \in \mathbb{N}^*$  allora*

$$\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0.$$

*Dimostrazione.* Per  $k \in \mathbb{N}^*$  abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= -\frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} \left( \cos \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \\ &= -\frac{l}{k\pi} \left[ \cos \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^l = 0 \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Il limite di  $f(x)$  da destra si indica spesso con

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x + \varepsilon) = f(x + 0), \quad \varepsilon > 0.$$

Analogamente il limite di  $f(x)$  da sinistra si indica con

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - \varepsilon) = f(x - 0), \quad \varepsilon > 0.$$

Il fatto che  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\varepsilon > 0$  si indica talvolta per brevità con  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Quindi ad esempio

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x + \varepsilon) = f(x + 0), \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(x - \varepsilon) = f(x - 0).$$

e

$$\begin{aligned}\int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l \frac{d}{dx} \left( \sin \frac{k\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{l}{k\pi} \left[ \sin \frac{k\pi x}{l} \right]_{-l}^l = 0. \quad \square\end{aligned}$$

**Lemma 4.1.2** *Risulta, per  $m, n \in \mathbb{N}^*$ :*

a)

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$$

b)

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

*Dimostrazione.* a) Richiamiamo le seguenti formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.6)$$

e

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (4.7)$$

Sommando e sottraendo (4.6) a (4.7) seguono rispettivamente

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Per  $m \neq n$  la a) può essere riscritta

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-l}^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx + \int_{-l}^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0$$

per il lemma 4.1.1. Analogamente, sempre per  $m \neq n$ :

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \left[ \int_{-l}^l \cos \frac{(m-n)\pi x}{l} dx - \int_{-l}^l \cos \frac{(m+n)\pi x}{l} dx \right] = 0.$$

Se  $m = n$  allora ricordiamo innanzitutto che

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

quindi

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \cos^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ 1 + \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

e analogamente

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ 1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right] dx = l$$

b) Dalle relazioni

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.8)$$

e

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (4.9)$$

segue

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Allora per  $m \neq n$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} \right] dx$$

e il risultato è una conseguenza del lemma 4.1.1. Se invece  $m = n$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{2m\pi x}{l} dx = 0. \quad \square$$

**Teorema 4.1.1** *Se la serie*

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

*converge uniformemente a  $F(x)$  nell'intervallo  $(-l, l)$  allora, per  $n = 1, 2, \dots$*

$\alpha)$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$\beta)$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$\gamma)$

$$A = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx.$$

*Dimostrazione.*  $\alpha)$  Per ipotesi

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (4.10)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\cos \frac{m\pi x}{l}$  e integrando tra  $-l$  ed  $l$  si ha:

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx = \int_{-l}^l \left[ A + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right] \cos \frac{m\pi x}{l} dx. \quad (4.11)$$

Tenuto conto che, per il lemma 4.1.2,

$$\int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$$

e

$$\int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

la relazione (4.11) diventa

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} F(x) dx &= A \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= a_m l \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$\beta$ ) Moltiplicando la relazione (4.11) per  $\sin \frac{m\pi x}{l}$ , integrando tra  $-l$  e  $l$  ed applicando le relazioni già viste abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} F(x) dx &= A \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= b_m l \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$\gamma$ ) Integriamo ora la relazione (4.10) tra  $-l$  ed  $l$ , e tenendo conto del lemma 4.1.1 otteniamo

$$\int_{-l}^l F(x) dx = 2Al \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) dx.$$

Ponendo  $m = 0$  nel risultato  $\alpha$ ) si ha:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx; \quad A = \frac{a_0}{2}. \quad \square$$

*Osservazione.* I risultati ora ottenuti valgono anche se i limiti di integrazione sono sostituiti da  $c$  e  $c + 2l$ . Osserviamo anche esplicitamente che l'ipotesi di convergenza uniforme è intervenuta nell'integrazione termine a termine della serie.

**Lemma 4.1.3** 1.

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^M \cos kt = \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t};$$

2.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt = \frac{1}{2}. \quad \square$$

**Lemma 4.1.4** Se  $F(x)$  è generalmente continua allora

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^\pi F(x) \sin\left(M + \frac{1}{2}\right)x dx = 0. \quad \square$$

**Lemma 4.1.5** Posto

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

si ha:

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi F(t+x) \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}t} dt. \quad \square$$

**Lemma 4.1.6**

$$S_M(x) - \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \left( \frac{F(t+x) - F(x-0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right) \sin \left( M + \frac{1}{2} \right) t dt + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \sin \frac{1}{2}t} \right) \sin \left( M + \frac{1}{2} \right) t dt. \quad \square
\end{aligned}$$

**Teorema 4.1.2** *Se  $F(x)$  ed  $F'(x)$  sono generalmente continue in  $(-\pi, \pi)$  si ha*

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} S_M(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

*uniformemente in  $(-\pi, \pi)$ .*

*Dimostrazione.* La funzione

$$\frac{F(t+x) + F(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

è generalmente continua nell'intervallo  $0 < t \leq x$  in quanto  $F(x)$  è generalmente continua. Inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t+x) + F(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t+x) + F(x+0)}{t} \frac{2t/2}{2 \sin t/2} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t+x) + F(x+0)}{t}.
\end{aligned}$$

Tale limite esiste in quanto per ipotesi  $F'(x)$  è generalmente continua cosicchè per ogni valore di  $x$  esiste la derivata destra di  $F(x)$ . Quindi

$$\frac{F(t+x) + F(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

è generalmente continua in  $0 \leq t \leq \pi$ . Analogamente

$$\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

è generalmente continua in  $-\pi \leq t \leq 0$ . Allora in virtù dei lemma 4.1.4 e 4.1.6 si ha:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x) - \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} = 0$$



ovvero

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}. \quad \square$$

## 4.2. Forma complessa della serie di Fourier

In forma complessa la serie di Fourier (4.1) e i suoi coefficienti possono essere scritti così:

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}}$$

dove, ponendo  $c = -l$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota n \frac{\pi x}{l}} dx.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} &= \sum_{n=-\infty}^0 c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\iota n \frac{\pi x}{l}} = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-\iota k \frac{\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\iota k \frac{\pi x}{l}} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c_{-k} e^{-\iota k \frac{\pi x}{l}} + c_k e^{\iota k \frac{\pi x}{l}} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (c_{-k} + c_k) \cos \frac{k\pi x}{l} + \iota (c_k - c_{-k}) \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}. \end{aligned}$$

Adesso

$$\begin{aligned}
 c_{-k} + c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) \left[ e^{-\iota k \frac{\pi x}{l}} + e^{\iota k \frac{\pi x}{l}} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx. \\
 c_k - c_{-k} &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) \left[ e^{\iota k \frac{\pi x}{l}} - e^{-\iota k \frac{\pi x}{l}} \right] dx = \\
 &= \iota \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.
 \end{aligned}$$

Ora è sufficiente porre  $b_k = \iota(c_{-k} - c_k)$  e  $a_k = c_{-k} + c_k$ , per  $k = 1, 2, 3, \dots$   
 $\square$

### 4.3. Trasformata discreta di Fourier

Abbiamo visto che, se  $F(x)$  soddisfa le condizioni di Dirichlet nell'intervallo  $] -l, l[$ , allora in ogni punto di continuità di  $F(x)$ :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\iota \frac{n\pi x}{l}} \quad (4.12)$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota \frac{n\pi x}{l}} dx.$$

Posto

$$f(n) = \frac{1}{2} \int_{-l}^l F(x) e^{-\iota \frac{n\pi x}{l}} dx \quad (4.13)$$

allora  $F(x)$  si scrive

$$F(x) = \frac{1}{l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{\iota \frac{n\pi x}{l}}. \quad (4.14)$$

La (4.13) prende il nome di *trasformata discreta di Fourier* e spesso viene indicata con  $f(n) = \mathcal{F}\{F\}$ , mentre  $F(x)$  si chiama *antitrasformata discreta di Fourier*.

Se  $x$  non è punto di continuità allora nella (4.12)  $F(x)$  va sostituito con  $(F(x+0) + F(x-0))/2$ .

#### 4.4. Trasformate finite di Fourier

Riconsideriamo ora lo sviluppo di Fourier di  $F(x)$ ,  $-l < x < l$ , nella formulazione (4.1) con i coefficienti dati in  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  ovvero

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \end{aligned}$$

e facciamo l'ulteriore ipotesi  $F(x)$  dispari. In questo caso  $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$  è una funzione dispari per ogni  $n \in \mathbb{N}$  mentre  $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$  è una funzione pari per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Conseguentemente

$$a_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mentre

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (4.15)$$

Pertanto

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

con  $b_n$  definiti da (4.15).

Definiamo ora

$$f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.16)$$

allora

$$b_n = \frac{2}{l} f_s(n)$$

e perciò si scrive

$$F(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_s(n) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.17)$$

La (4.16) prende il nome di *trasformata finita seno di Fourier* di  $F(x)$  per  $0 < x < l$  e viene spesso indicata con  $\mathcal{F}_s\{F\}$ , mentre la (4.17) si chiama *antitrasformata finita seno di Fourier* di  $f_s(n)$ .

Assumiamo ora che  $F(x)$  sia pari. In questo caso la funzione  $F(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$  è una funzione dispari in  $] -l, l[$  e la funzione  $F(x) \cos \frac{n\pi x}{l}$  è pari in  $] -l, l[$ , e pertanto  $b_n = 0$  per ogni  $n$ . Conseguentemente

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

con

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Posto

$$f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

risulta

$$a_n = \frac{2}{l} f_c(n)$$

e di conseguenza

$$F(x) = \frac{1}{l}f_c(0) + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.19)$$

La (4.18) prende il nome di *trasformata finita coseno di Fourier* di  $F(x)$  per  $0 < x < l$ , e viene indicata con  $\mathcal{F}_c\{F\}$ , mentre  $F(x)$  si dice *anti-trasformata finita coseno di Fourier* di  $f_c(n)$  ed è indicata normalmente con  $\mathcal{F}^{-1}\{f_c(n)\}$ .

**Esempio 4.4.1** *Determinare*

a) *la trasformata finita seno di Fourier*

b) *la trasformata finita coseno di Fourier*

della funzione  $F(x) = 2x$ ,  $0 < x < 4$ .

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\{F\} &= f_s(n) = \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \int_0^4 2x \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \\ &= \left[ 2x \left( \frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left( \frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 = \\ &= -\frac{32}{n\pi} \cos n\pi; \end{aligned}$$

b) se  $n > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_c\{F\} &= f_c(n) = \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
 &= \int_0^4 2x \cos \frac{n\pi x}{4} dx = \\
 &= \left[ 2x \left( \frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4} \right) - 2 \left( \frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16} \right) \right]_0^4 = \\
 &= 32 \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}.
 \end{aligned}$$

Se  $n = 0$

$$f_c(0) = \int_0^4 2x dx = 16.$$

**Esempio 4.4.2** *Determinare*

a) *la trasformata finita seno di Fourier di  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ;*

b) *la trasformata finita coseno di Fourier di  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,*

dove  $U(x, t)$  è una funzione definita per  $0 < x < l$  e  $t > 0$ .

a) *Per definizione la trasformata finita seno è*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\
 &= \left[ U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l - \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
 &= -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c(U).
 \end{aligned}$$

*Dunque*

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_c(U);$$

(4.20)

b) la trasformata finita coseno di Fourier è

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \left[ U(x, t) \cos \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l + \frac{n\pi}{l} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx\end{aligned}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{n\pi}{l} \mathcal{F}_s(U) - [U(0, t) - U(l, t) \cos n\pi]}. \quad (4.21)$$

**Esempio 4.4.3** Risolvere il problema precedente per  $\frac{\partial U}{\partial t}$ ;

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) &= \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^l U(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{F}_s(U).\end{aligned}$$

Analogamente

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt} \mathcal{F}_c(U).$$

Da questi esempi si può inoltre ricavare che

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_c(U)$$

e

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{F}_s(U).$$

**Esempio 4.4.4** *Risolvere il problema dell'esempio 4.4.2 per la funzione*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

a) Sostituendo  $\frac{\partial U}{\partial x}$  ad  $U$  nelle formule (4.20) e (4.21) dell'esempio 4.4.2 si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_s(U) + \frac{n\pi}{l}U(0, t) - \frac{n\pi}{l}U(l, t)\cos n\pi.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) &= \frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - [U_x(0, t) - U_x(l, t)\cos n\pi] = \\ &= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_c(U) - [U_x(0, t) - U_x(l, t)\cos n\pi].\end{aligned}$$

**Esempio 4.4.5** *Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere l'equazione*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U(0, t) = 0$$

$$U(4, t) = 0$$

$$U(x, 0) = 2x$$

con  $0 < x < 4$  e  $t > 0$ .

Prendendo la trasformata finita seno di ambo i membri dell'equazione assegnata (con  $l = 4$ ), abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$



Posto  $u(t, n) = \mathcal{F}_s(U)$  e tenendo conto dell'esempio 4.4.3

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}u(t, n).$$

Applicando ora l'esempio 4.4.4 abbiamo

$$\mathcal{F}_s\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -\frac{n\pi}{4}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

Per l'esempio 4.4.2

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) &= \frac{n\pi}{4}\mathcal{F}_s(U(x, t)) + U(0, t) - U(4, t)\cos n\pi = \\ &= \frac{n\pi}{4}u(t, n).\end{aligned}$$

In definitiva si deve risolvere l'equazione

$$\frac{du}{dt} = -\frac{n^2\pi^2}{16}u(t, n)$$

ottenendo

$$u(t, n) = u(0, n)e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

dove

$$u(0, n) = \mathcal{F}_s(2x) = \frac{-32\cos n\pi}{n\pi}.$$

Quindi

$$u(t, n) = \frac{-32\cos n\pi}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t/16}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}U(x, t) &= \frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-32\cos n\pi}{n\pi}e^{-n^2\pi^2 t/16}\sin\frac{n\pi x}{4} = \\ &= \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos n\pi}{n}\right)e^{-n^2\pi^2 t/16}\sin\frac{n\pi x}{4}.\end{aligned}$$

**Esercizio 4.4.1** Sviluppare la funzione  $F(x) = x$ , per  $0 < x < 2$ :

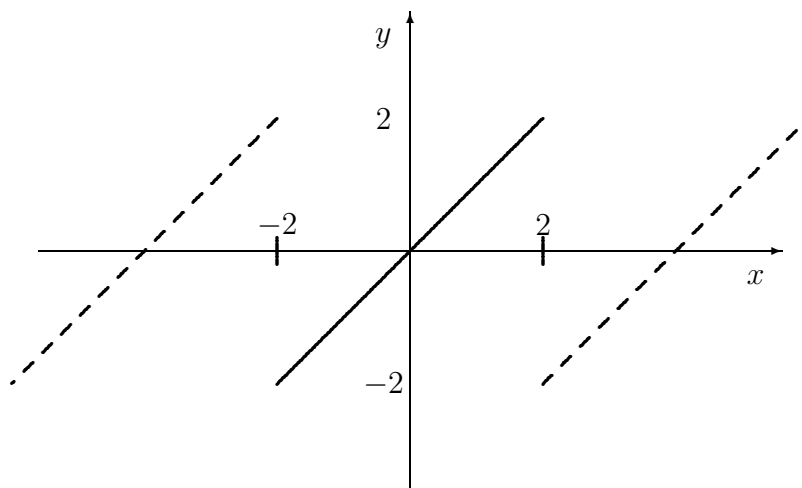


Figura 4.1:

a) *in serie di Fourier di soli seni;*

b) *in serie di Fourier di soli coseni.*

a) *Per sviluppare  $F(x)$  in serie di soli seni è necessario che  $F(x)$  sia periodica e dispari. Estendiamo quindi la definizione di  $F(x)$  a quella di funzione dispari di periodo 4 (e quindi  $l = 2$ , vedere figura 4.1).*

*Possiamo ora scrivere per  $F(x)$  lo sviluppo*

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$$

*dove*

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 x \frac{d}{dx} \left( \cos \frac{n\pi x}{2} \right) dx = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] = \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left( 2 \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \left[ \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2 \right) = -\frac{4 \cos n\pi}{n\pi}
 \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{4 \cos n\pi}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi x}{2} = \\
 &= -4 \left[ -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{2} - \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right] = \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

b) Per sviluppare  $F(x)$  in serie di soli coseni è necessario che  $F(x)$  sia periodica e pari. Estendiamo quindi la sua definizione a quella di funzione pari di periodo 4 (e quindi  $l = 2$ , vedere figura 4.2).

Allora

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2}$$

dove

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^2 x dx = \int_0^2 x dx = 2$$

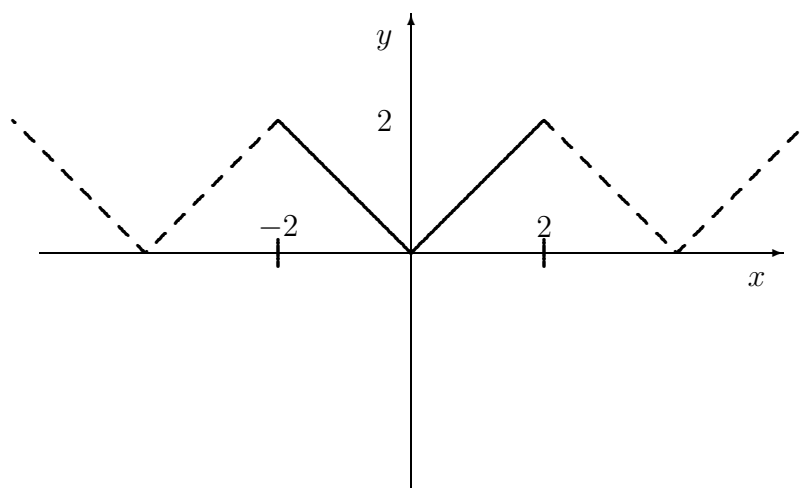


Figura 4.2:

$e$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 F(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left[ x \left( \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_{x=0}^{x=2} - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \\
 &= \left[ - \left( \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 = \\
 &= \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1).
 \end{aligned}$$

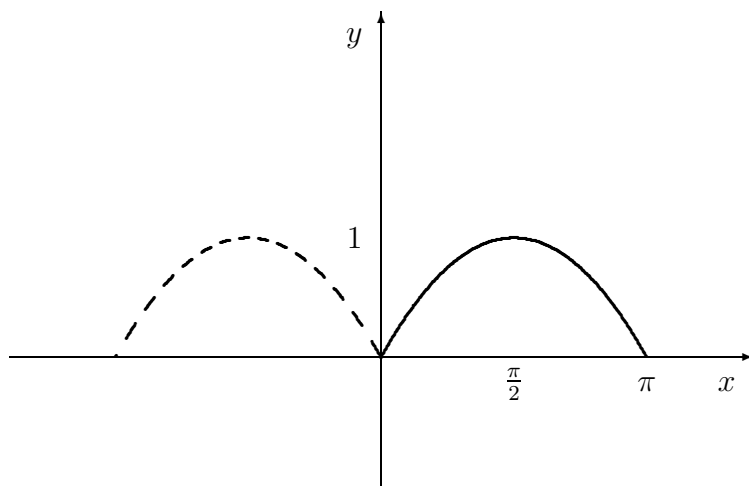


Figura 4.3:

*In definitiva*

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} = \\
 &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}.
 \end{aligned}$$

**Esercizio 4.4.2** *Sviluppare la funzione  $F(x) = \sin x$ ,  $0 < x < \pi$ , in serie coseno di Fourier.*

*Poichè per ottenere uno sviluppo in serie di soli coseni  $F(x)$  deve essere periodica pari effettuiamo un'estensione pari di  $F(x)$  di periodo  $2\pi$  (vedere figura 4.3).*

*Risulta allora*

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

*con  $l = \pi$ . Quindi*

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

e

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right] = \\
&= -\frac{2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Se  $n=1$  allora

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{\sin 2x}{2} \right|_0^\pi = 0.$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \cos nx = \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right].
\end{aligned}$$

**Esercizio 4.4.3** Determinare la serie di Fourier per la funzione

$$F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$$

di periodo 6.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) dx = \\
&= \frac{1}{3} \left[ \int_{-3}^0 F(x) dx + \int_0^3 F(x) dx \right] = \frac{2}{3} \int_0^3 x dx = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 2x \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \\
&= \frac{2}{3} \int_0^3 x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left( \sin \frac{n\pi x}{3} \right) dx = \\
&= \frac{2}{n\pi} \left[ x \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\
&= \frac{6}{(n\pi)^2} \left[ \cos \frac{n\pi x}{3} \right]_0^3 = \frac{6}{(n\pi)^2} [\cos n\pi - 1]. \\
b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 F(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[ \int_0^3 2x \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\
&= -\frac{1}{3} \left[ \int_0^3 2x \frac{3}{n\pi} \frac{d}{dx} \left( \cos \frac{n\pi x}{3} \right) dx \right] = \\
&= \frac{-2}{n\pi} \left[ x \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \\
&= \frac{-2}{n\pi} \left[ 3 \cos n\pi - \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 \right] = \\
&= \frac{-6}{n\pi} \cos n\pi.
\end{aligned}$$

*Quindi in definitiva*

$$F(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{6}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{6}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{3} \right].$$

## 4.5. Integrale di Fourier

Sia  $F(x)$  una funzione soggetta alle seguenti condizioni:

1.  $F(x)$  soddisfa le condizioni di Dirichlet in ogni intervallo finito  $-l \leq x \leq l$ ;

2. l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)| dx$$

converge, ovvero  $F(x)$  è assolutamente integrabile nell'intervallo  $-\infty < x < +\infty$ ;

vale allora il seguente teorema.

**Teorema 4.5.1** (*Teorema integrale di Fourier*).

$$F(x) = \int_0^{+\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda \quad (4.22)$$

dove

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos \lambda x dx$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin \lambda x dx. \quad \square$$

*Osservazione 1.* Una formulazione equivalente a (4.22) è la seguente:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cos \lambda(x-u) du. \quad (4.23)$$

*Osservazione 2.* Le relazioni (4.22) e (4.23) sono valide se  $x$  è un punto di continuità di  $F$ . Se  $x$  è un punto di discontinuità allora il primo membro di (4.22) e (4.23) deve essere sostituito da

$$\frac{1}{2} [F(x+0) + F(x-0)].$$

## 4.6. Forma complessa degli integrali di Fourier

La formula del teorema integrale di Fourier (4.22) può essere scritta nella seguente forma complessa:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{\iota \lambda(x-u)} du d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\iota \lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-\iota \lambda u} du. \end{aligned} \quad (4.24)$$



Infatti tenuto conto che

$$\frac{\iota}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \sin \lambda(x-u) du = 0$$

basta sommare questa alla (4.23). Posto ora

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{-\iota\lambda u} du, \quad (4.25)$$

dalla seconda uguaglianza in (4.24) si trae

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\iota\lambda x} f(\lambda) d\lambda. \quad (4.26)$$

La funzione  $f(\lambda)$  definita in (4.25) prende il nome di *trasformata di Fourier* di  $F(x)$  e si scrive

$$f(\lambda) = \mathcal{F}\{F\}$$

mentre  $F(x)$  è detta *antitrasformata di Fourier* di  $f(\lambda)$  e viene indicata con

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}(f(\lambda)).$$

Assumiamo ora che  $F(x)$  sia dispari. Allora da (4.25) segue

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(u) \cos \lambda u - \iota F(u) \sin \lambda u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cos \lambda u du - \iota \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \sin \lambda u du. \end{aligned}$$

Tenuto conto che  $F(u) \cos \lambda u$  è dispari e  $F(u) \sin \lambda u$  è pari risulta

$$f(\lambda) = -2\iota \int_0^{+\infty} F(u) \sin \lambda u du.$$

Posto

$$f_s(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(u) \sin \lambda u du$$

segue

$$f(\lambda) = -2\iota f_s(\lambda)$$

quindi (notato che  $f_s(\lambda)$  è una funzione dispari),

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\iota\lambda x} (-2\iota) f_s(\lambda) d\lambda = \\
 &= \frac{-\iota}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda x f_s(\lambda) d\lambda + \iota \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \lambda x f_s(\lambda) d\lambda \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \lambda x f_s(\lambda) d\lambda = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.
 \end{aligned}$$

Definiamo allora

$$f_s(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(u) \sin \lambda u du$$

*trasformata (infinita) seno di Fourier* di  $F(x)$  per  $0 < x < +\infty$ , mentre definiamo

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda$$

*antitrasformata seno di Fourier* di  $f_s(\lambda)$ .

Assumiamo ora che  $F(x)$  sia pari. Allora da (4.25) segue

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \cos \lambda u du - \iota \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \sin \lambda u du.$$

Poichè  $F(u) \cos \lambda u$  è pari (in  $u$ ) e  $F(u) \sin \lambda u$  è dispari (in  $u$ ) segue

$$f(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} F(u) \cos \lambda u du$$

posto

$$f_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(u) \cos \lambda u du$$

risulta

$$f(\lambda) = 2f_c(\lambda).$$

Quindi notato che  $f_c(\lambda)$  è una funzione pari, possiamo scrivere la (4.26) in questo modo

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} 2f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda + i \int_{-\infty}^{+\infty} 2f_c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned}$$

Definiamo allora

$$f_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} F(u) \cos \lambda u du$$

*trasformata (infinita) coseno di Fourier* di  $F(x)$  per  $0 < x < +\infty$  e la denotiamo con

$$f_c(\lambda) = \mathcal{F}\{F\}$$

mentre definiamo

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda$$

*antitrasformata coseno di Fourier* di  $f_c(\lambda)$  e la denotiamo con  $\mathcal{F}^{-1}(f_c(\lambda))$ .

**Esempio 4.6.1** *Risolvere l'equazione:*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

con le condizioni iniziali  $U(0, t) = 0$ , e

$$U(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

Prendendo la *trasformata seno di Fourier* di ambo i membri dell'equazione assegnata abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial t} \sin \lambda x dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \lambda x dx.$$

Posto

$$u = u(\lambda, t) = \int_0^{+\infty} U(x, t) \sin \lambda x dx$$

la precedente diventa (integrando per parti il secondo membro):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \sin \lambda x - \lambda U \cos \lambda x \right]_0^{+\infty} - \lambda^2 \int_0^{+\infty} U \sin \lambda x dx = \\ &= \lambda U(0, t) - \lambda^2 u.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Si è fatta l'ipotesi che sia  $U$  che la derivata parziale di  $U$  rispetto a  $x$  tendono a 0 quando  $x$  tende a  $+\infty$ . Ora

$$\begin{aligned}u(\lambda, 0) &= \int_0^{+\infty} U(x, 0) \sin \lambda x dx = \\ &= \int_0^1 \sin \lambda x dx = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

Risolvendo (4.27) con la condizione  $U(0, t) = 0$  si ha

$$u(\lambda, t) = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t}.$$

Prendendo quindi l'antitrasformata seno di Fourier si trova la soluzione

$$U(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x d\lambda.$$

## 4.7. Teorema di Convoluzione

**Definizione 4.7.1** Si definisce convoluzione di  $F(x)$  e  $G(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , e si denota con  $F * G$ , l'integrale

$$F * G = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) G(x - u) du = H(x).$$

Vale il seguente teorema.

**Teorema 4.7.1** Se  $H(x)$  è la convoluzione di  $F(x)$  e  $G(x)$ , allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) e^{-\iota \lambda x} dx = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-\iota \lambda x} dx \right] \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) e^{-\iota \lambda x} dx \right]$$

ovvero

$$\mathcal{F}(F * G) = \mathcal{F}(F) \mathcal{F}(G).$$

*Dimostrazione.* Siano

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda u} F(u) du$$

e

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda v} G(v) dv$$

le trasformate di  $F$  e  $G$  rispettivamente. Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F)\mathcal{F}(G) &= f(\lambda)g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda u} F(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda v} G(v) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda(u+v)} F(u)G(v) du dv. \end{aligned}$$

Posto

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) = u + v \\ u &= u(u, v) = u \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda(u+v)} F(u)G(v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda x} F(u)G(x-u) du dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(x-u) du \right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda x} H(x) dx = \\ &= \mathcal{F}(H(x)) = \mathcal{F}(F * G). \quad \square \end{aligned}$$

In altre parole la trasformata di Fourier della convoluzione di  $F$  e  $G$  è il prodotto delle trasformate di Fourier di  $F$  e  $G$ .

#### 4.8. Relazione tra trasformata di Fourier e trasformata di Laplace

Per un fissato  $x \in \mathbb{R}$  consideriamo la funzione (nella variabile  $t$ )

$$F(x, t) = \begin{cases} e^{-xt}\Phi(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

dove  $\Phi(t)$  è una qualunque funzione generalmente continua per  $t \geq 0$  e di ordine esponenziale  $\gamma$ . Allora

$$\mathcal{F}(F(x, t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\lambda t} F(x, t) dt = f(x, \lambda)$$

e anche, utilizzando la lettera  $y$  anzichè  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota y t} F(x, t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-\iota y t} F(x, t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-\iota y t} F(x, t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\iota y t} e^{-xt} \Phi(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(x+\iota y)t} \Phi(t) dt = \quad (\text{posto } s = x + \iota y) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \Phi(t) dt = f(s), \end{aligned}$$

In definitiva, pur di considerare  $s$  complesso, segue

$$\mathcal{F}(F(x, t)) = L[\Phi(t)] \quad t > 0.$$

In particolare per  $x = 0$ , cioè  $s = 0 + \iota y$ :

$$\mathcal{F}(F(0, t)) = \mathcal{F}(\Phi) = L[\Phi(t)] \quad t > 0.$$

*Osservazione.* Se  $(F * G)(t) = 0$  per  $t < 0$  allora

$$\mathcal{F}(F * G) = L[F * G]. \quad (4.28)$$

Ora supposto che  $F(t)$  e  $G(t)$  sono funzioni nulle per  $t < 0$  questo implica che

$$(F * G)(t) = 0 \quad t < 0$$

e dunque la (4.28). Inoltre

$$\begin{aligned} F * G &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(t-u)du = \\ &= \int_{-\infty}^0 F(u)G(t-u)du + \int_0^{+\infty} F(u)G(t-u)du = \\ &= \int_0^{+\infty} F(u)G(t-u)du = \\ &= \int_0^t F(u)G(t-u)du + \int_t^{+\infty} F(u)G(t-u)du = \\ &= \int_0^t F(u)G(t-u)du \end{aligned}$$

infatti  $G(t-u) = 0$  per  $t-u < 0$  cioè per  $t < u$ , così

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F * G) &= L[F * G] = L \left[ \int_0^t F(u)G(t-u)du \right] = \\ &= L[F]L[G], \end{aligned}$$

e ritroviamo il teorema di convoluzione per la trasformata di Laplace.

#### 4.9. Antitrasformata di Laplace complessa

Sia

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u)du, \quad s \in \mathbb{C}$$

la trasformata di Laplace di  $F(t)$ . Vogliamo provare che

$$F(t) = L^{-1}[f(s)] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s)ds, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

dove  $\gamma$  è scelto in modo tale che la retta  $s = \gamma$  si trovi alla destra di tutte le singolarità (poli, punti di diramazione, singolarità essenziali) di  $f(s)$  e per il resto è arbitrario. Infatti per definizione

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} F(u) du.$$

Allora

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma-\iota T}^{\gamma+\iota T} e^{st} f(s) ds = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma-\iota T}^{\gamma+\iota T} \int_0^{+\infty} e^{st-su} F(u) du ds.$$

Posto  $s = \gamma + \iota y$ ,  $ds = \iota dy$ , quindi l'integrale a destra può essere scritto così:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-T}^T e^{\iota y t} dy \int_0^{+\infty} e^{-\iota y u} [e^{-\gamma u} F(u)] du. \quad (4.30)$$

Poniamo ora

$$\Phi(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t} F(t), & t > 0 \\ F(t), & t < 0. \end{cases}$$

Assunta  $F(t) = 0$  per  $t < 0$  dunque  $\Phi(t) = 0$  per  $t < 0$ . Quindi (4.30) diventa

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-T}^T e^{\iota y t} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota y u} \Phi(u) du$$

e per il teorema integrale di Fourier si ha

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{\gamma-\iota T}^{\gamma+\iota T} e^{st} f(s) ds &= \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} 2\pi \Phi(t) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} 2\pi e^{-\gamma t} F(t) = F(t), & t > 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

In definitiva

$$F(t) = \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma-\iota\infty}^{\gamma+\iota\infty} e^{st} f(s) ds, \quad t > 0.$$

*Osservazione.* Nella precedente dimostrazione si è assunto che la funzione  $e^{-\gamma u} F(u)$  sia assolutamente integrabile nell'intervallo  $(0, +\infty)$  cioè che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma u} |F(u)| du$$



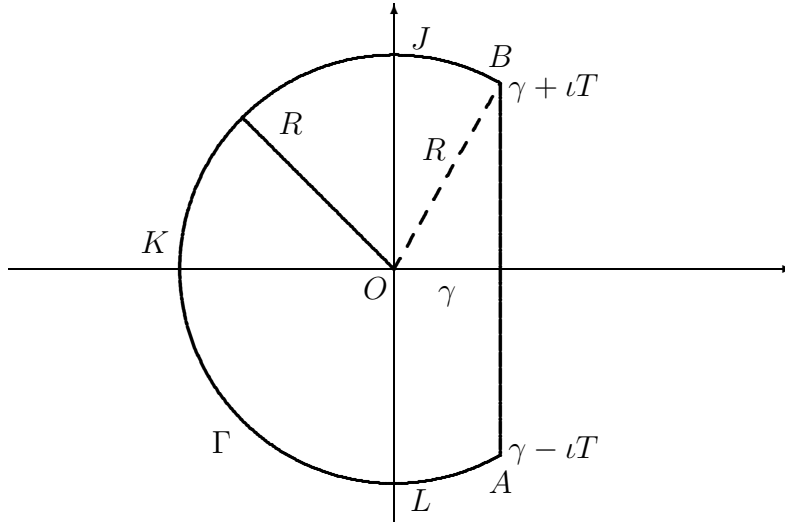


Figura 4.4:

converga, in modo tale da poter applicare il teorema integrale di Fourier. Affinchè ciò si verifichi è sufficiente che  $F(t)$  sia di ordine esponenziale  $\gamma$ , con  $\gamma$  numero reale tale che la retta del piano complesso  $s = \gamma$  si trovi alla destra di tutte le possibili singolarità di  $f(s)$ . A parte ciò  $\gamma$  è del tutto arbitrario.

L'integrale che compare in (4.29) viene calcolato partendo dall'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds$$

dove  $C$  è il contorno descritto in figura 4.4, detto anche *contorno di Bromwich*. Indicato con  $\Gamma$  l'arco di circonferenza  $BJKLA$  (circonferenza di centro l'origine  $O$  e raggio  $R$ ) si ha  $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ .

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} f(s) ds = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

### 4.10. Uso del teorema dei residui per il calcolo delle antitrasformate di Laplace

Assumiamo che  $f(s)$  presenti come singolarità solo poli situati alla sinistra della retta  $s = \gamma$  per un assegnato valore  $\gamma$ . Assumiamo inoltre che l'integrale di  $f(s)$  sulla curva  $\Gamma$  disegnata in 4.4 sia infinitesimo per  $R \rightarrow +\infty$ . Allora in virtù del teorema dei residui la (4.31) può scriversi

$$F(t) = \sum \text{residui di } e^{st}f(s) \text{ calcolati nei poli di } f(s). \quad (4.32)$$

Come abbiamo anticipato la validità della formula (4.32) è legata al fatto che

$$\int_{\Gamma} e^{st}f(s)ds \rightarrow 0$$

per  $R \rightarrow +\infty$ . Una condizione sufficiente affinché ciò accada è data dal seguente:

**Teorema 4.10.1** *Se esistono due costanti  $M > 0, k > 0$ , tali che*

$$\forall s (= Re^{i\theta}) \in \Gamma : |f(s)| \leq \frac{M}{R^k}$$

*allora*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} e^{st}f(s)ds = 0. \quad \square$$

Rimandiamo all'appendice (pagina 185) di questo capitolo alcune considerazioni sul teorema appena enunciato.

**Esempio 4.10.1** *Calcolare*

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right]$$

*usando la formula di inversione di Laplace.*

$$\begin{aligned} F(t) &= L^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)(s-2)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds. \end{aligned}$$

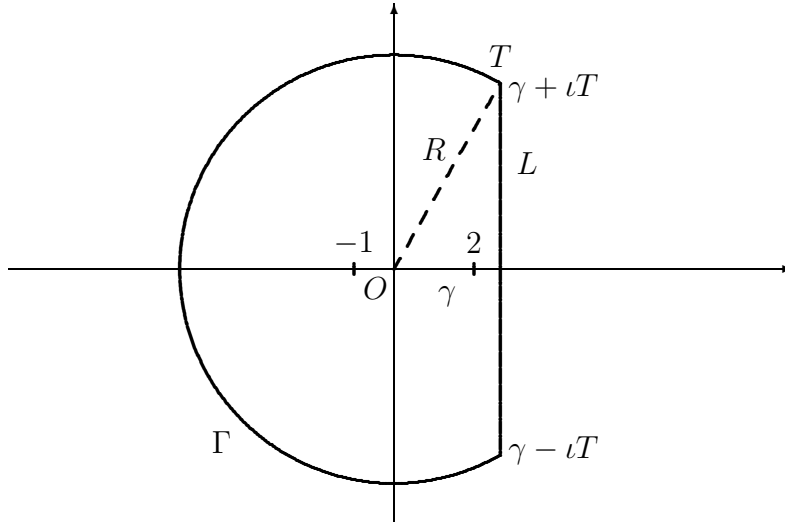


Figura 4.5:

Scelto il contorno di Bromwich come disegnato in figura 4.5 con  $\gamma > 2$  e posto  $C = \Gamma \cup L$  risulta

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds = \sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}, s_i \right] \quad (4.33)$$

dove  $s_1 = -1$  e  $s_2 = 2$ , e, anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds &= \int_{\Gamma} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds + \\ &+ \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Poichè ora

$$\left| \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right| = \frac{1}{|(s+1)(s-2)^2|} < \frac{M}{R^k}$$

per opportuni  $M$  e  $k$ , e per  $s \in C$ , e perciò

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds \longrightarrow 0 \quad \text{se } R \rightarrow +\infty$$

da (4.33) e (4.34) segue allora

$$\sum_{i=1}^2 \text{Res} \left[ \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}, s_i \right] = \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} ds = F(t),$$

indipendentemente da  $\gamma$ , purchè  $\gamma > 2$ . Calcoliamo ora i residui nei due poli:

$$\lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{1}{9} e^{-t}$$

e

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{d}{ds} \left[ (s-2)^2 \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \right] = \frac{1}{3} t e^{2t} - \frac{1}{9} e^{2t}.$$

In definitiva

$$F(t) = \frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{3} t e^{2t} - \frac{1}{9} e^{2t}.$$

#### 4.11. Modifica del contorno di Bromwich nel caso di punti di diramazione

Nell'ipotesi che  $f(s)$  presenti punti di diramazione le relazioni (4.31) e (4.32) continuano a valere purchè si modifichi opportunamente il contorno di Bromwich. Per esempio se  $f(s)$  presenta un unico punto di diramazione, per esempio  $s = 0$  allora si può usare il contorno in figura 4.6.

Qui  $BDE$  e  $LNA$  sono archi di cerchio centrato nell'origine e raggio  $R$  mentre  $HJK$  è un arco del cerchio di centro  $O$  e raggio  $\varepsilon$ .

##### Esempio 4.11.1 Determinare

$$L^{-1} \left[ \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right]$$

usando la formula dell'inversione complessa.

Per la formula dell'inversione complessa, l'antitrasformata di  $e^{-a\sqrt{s}}/s$  è data da:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds.$$

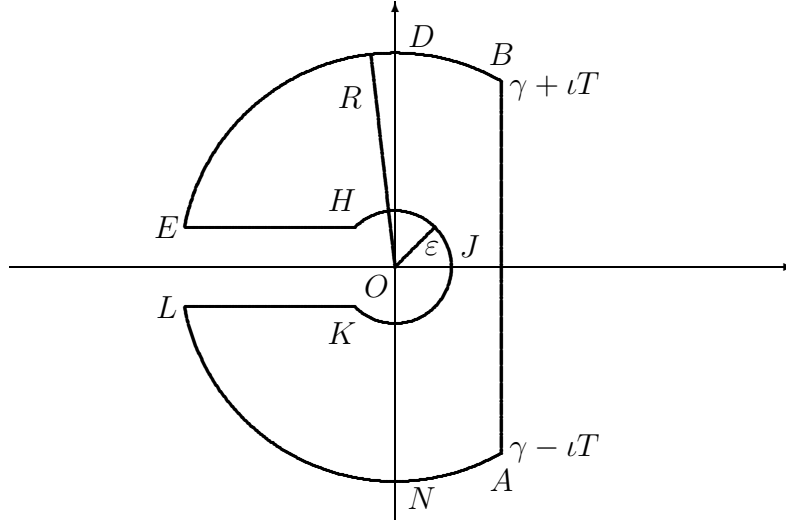


Figura 4.6:

Poichè  $s = 0$  è un punto di diramazione della funzione integranda consideriamo il cammino  $C$  disegnato nella figura 4.6.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds &= \frac{1}{2\pi\iota} \int_{AB} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \frac{1}{2\pi\iota} \int_{BDE} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi\iota} \int_{EH} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \frac{1}{2\pi\iota} \int_{HJK} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \\ &+ \frac{1}{2\pi\iota} \int_{KL} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \frac{1}{2\pi\iota} \int_{LNA} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds. \end{aligned}$$

Ora, poichè l'unica singolarità della funzione integranda,  $s = 0$ , è esterna a  $C$ , per il teorema di Cauchy l'integrale a sinistra è nullo. Inoltre non è difficile verificare che l'integranda soddisfa la condizione

$$\left| \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} \right| \leq \frac{M}{R^k}$$

su  $C$ , per qualche  $M, k > 0$ ,  $a > 0$ . Pertanto in virtù del teorema 4.10.1, quando  $R \rightarrow +\infty$  gli integrali lungo  $BDE$  e  $LNA$  tendono a

zero. Conseguentemente

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\iota} \int_{AB} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \\
 &= \frac{1}{2\pi\iota} \int_{\gamma-\iota\infty}^{\gamma+\iota\infty} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \\
 &= - \lim_{R \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\iota} \left\{ \int_{EH} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \int_{HJK} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \int_{KL} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \right\}.
 \end{aligned}$$

Lungo  $EH$ ,  $s = xe^{\iota\pi}$ ,  $\sqrt{s} = \sqrt{x}e^{\iota\pi/2} = \iota\sqrt{x}$  e per  $s$  variabile tra  $-R$  e  $-\varepsilon$ ,  $x$  varia tra  $R$  e  $\varepsilon$ . Pertanto abbiamo:

$$\int_{EH} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{-xt-a\iota\sqrt{x}}}{x} dx.$$

Analogamente, lungo  $KL$ ,  $s = xe^{-\pi\iota}$ ,  $\sqrt{s} = \sqrt{x}e^{-\pi\iota/2} = -\iota\sqrt{x}$ , e per  $s$  variabile tra  $-\varepsilon$  e  $-R$ ,  $x$  varia tra  $\varepsilon$  e  $R$ . Allora

$$\int_{KL} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-xt+a\iota\sqrt{x}}}{x} dx.$$

Lungo  $HJK$  è  $s = \varepsilon e^{\iota\theta}$  e si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{HJK} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds &= \int_{\pi}^{-\pi} \frac{e^{\varepsilon e^{\iota\theta}t - a\sqrt{\varepsilon}e^{\iota\theta/2}}}{\varepsilon e^{\iota\theta}} \iota \varepsilon e^{\iota\theta} d\theta = \\
 &= \iota \int_{\pi}^{-\pi} e^{\varepsilon e^{\iota\theta}t - a\sqrt{\varepsilon}e^{\iota\theta/2}} d\theta.
 \end{aligned}$$

La  $F(t)$  può scriversi

$$\begin{aligned}
 F(t) &= - \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\iota} \left\{ \int_R^{-\varepsilon} \frac{e^{-xt-\iota a\sqrt{x}}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-xt+\iota a\sqrt{x}}}{x} dx + \right. \\
 &\quad \left. + \iota \int_{\pi}^{-\pi} e^{\varepsilon e^{\iota\theta} - a\sqrt{\varepsilon} e^{\iota\theta/2}} d\theta \right\} = \\
 &= - \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\iota} \left\{ \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-xt}(e^{\iota a\sqrt{x}} - e^{-\iota a\sqrt{x}})}{x} dx + \right. \\
 &\quad \left. + \iota \int_{\pi}^{-\pi} e^{\varepsilon e^{\iota\theta} - a\sqrt{\varepsilon} e^{\iota\theta/2}} d\theta \right\} = \\
 &= - \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\iota} \left\{ 2\iota \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx + \right. \\
 &\quad \left. + \iota \int_{\pi}^{-\pi} e^{\varepsilon e^{\iota\theta} - a\sqrt{\varepsilon} e^{\iota\theta/2}} d\theta \right\}.
 \end{aligned}$$

Poichè si può prendere il limite sotto il segno di integrale, si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon e^{\iota\theta} - a\sqrt{\varepsilon} e^{\iota\theta/2}} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi.$$

In definitiva

$$F(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx.$$

## 4.12. Caso di un infinito numero di singolarità

Quando si vuol determinare l'antitrasformata di Laplace di funzioni con un numero infinito di singolarità è ancora possibile utilizzare i metodi descritti in precedenza. In questo caso la porzione di curva del contorno di Bromwich è scelta in modo tale da avere raggio  $R_m$  tale da racchiudere solo un numero finito di singolarità e che non passi per nessuna di queste singolarità. Allora l'antitrasformata richiesta è ottenuta prendendo il limite per  $m \rightarrow +\infty$ .

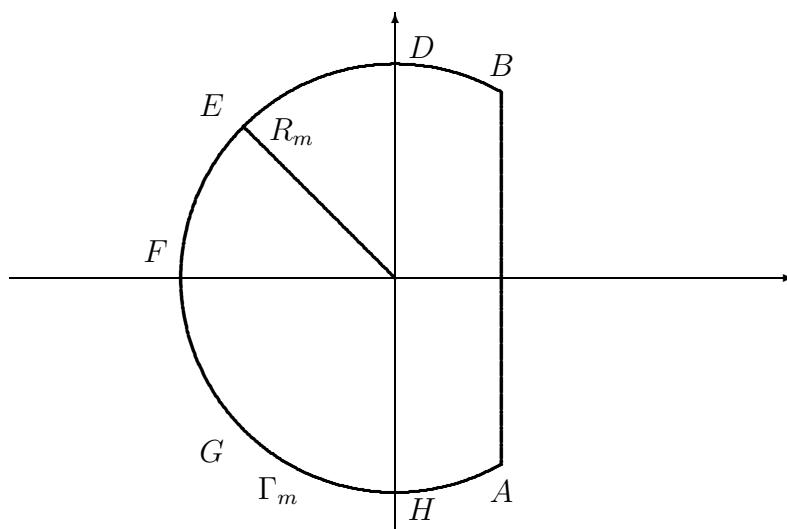


Figura 4.7:

**Esempio 4.12.1** *Determinare*

$$L^{-1} \left[ \frac{\cosh x \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right] \quad 0 < x < 1.$$

*Per determinare l'antitrasformata richiesta consideriamo il contorno di Bromwich disegnato in figura 4.7.*

*Il segmento AB è scelto in modo che si trovi alla destra di tutti i poli, che non è difficile riconoscere nei punti*

$$s = 0 \quad s_n = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

*Infatti*

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\cosh x \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} = \\ &= \frac{1 + (x\sqrt{s})^2/2! + (x\sqrt{s})^4/4! + \dots}{s[1 + (\sqrt{s})^2/2! + (\sqrt{s})^4/4! + \dots]} = \\ &= \frac{1 + sx^2/2! + s^2x^4/4! + \dots}{s[1 + s/2! + s^2/4! + \dots]} \end{aligned}$$



ed è evidente che in  $s = 0$  non c'è punto di diramazione ma un polo semplice. Gli ulteriori poli di  $f(s)$  sono gli zeri della funzione  $\cosh \sqrt{s}$ , ovvero i valori per cui

$$\cosh \sqrt{s} = \frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0$$

ovvero

$$e^{\sqrt{s}} = -e^{-\sqrt{s}} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2\sqrt{s}} = -1 = e^{\pi i + 2k\pi i} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

da cui

$$\sqrt{s_k} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i$$

oppure

$$s_k = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2.$$

Quindi  $f(s)$  presenta poli semplici in  $s = 0$  e nei punti

$$s_n = -\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si è scelto il contorno di Bromwich in modo che la parte curva BDE FGHA sia un arco della circonferenza  $\Gamma_m$  con centro l'origine e raggio  $R_m$ ,

$$R_m = m^2 \pi^2, \quad m \neq 0, m \in \mathbb{N}.$$

Questa scelta assicura che il contorno non passi per alcun polo della funzione  $f(s)$ . Determiniamo ora i residui della funzione:

$$\frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}.$$

Il residuo in  $s = 0$  è

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{\cosh \sqrt{s}} = 1.$$

Il residuo in uno degli altri poli  $s_n$  è

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_n} (s - s_n) \left[ \frac{e^{st} \cosh x \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right] &= \lim_{s \rightarrow s_n} \left[ \frac{s - s_n}{\cosh \sqrt{s}} \right] \lim_{s \rightarrow s_n} \left[ \frac{e^{st} \cosh x \sqrt{s}}{s} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_n} \left[ \frac{1}{\sinh \sqrt{s}/2\sqrt{s}} \right] \lim_{s \rightarrow s_n} \left[ \frac{e^{st} \cosh x \sqrt{s}}{s} \right] = \\ &= \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} e^{(n-1/2)^2 \pi^2 t} \cos(n-1/2)\pi x. \end{aligned}$$

Se  $C_m = \Gamma_m \cup AB$  è il contorno in figura 4.7, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{e^{st} \cosh x \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} ds = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(n-1/2)^2 \pi^2 t} \cos(n-1/2)\pi x.$$

Prendendo il limite per  $m \rightarrow +\infty$  ed osservando che l'integrale lungo  $\Gamma_m$  tende a zero si ha:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \frac{\cosh x \sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}} \right] &= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(n-1/2)^2 \pi^2 t} \cos(n-1/2)\pi x = \\ &= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t/4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 4.12.1** Determinare

$$L^{-1} \left[ \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa} \right] \quad 0 < x < a.$$

Iniziamo con il determinare i poli della funzione

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}. \\ f(s) &= \frac{sx + (sx)^3/3! + (sx)^5/5! + \dots}{s^2[1 + (sa)^2/2! + (sa)^4/4! + \dots]} = \\ &= \frac{x + s^2 x^3/3! + s^4 x^5/5! + \dots}{s[1 + (sa)^2/2! + (sa)^4/4! + \dots]}. \end{aligned}$$

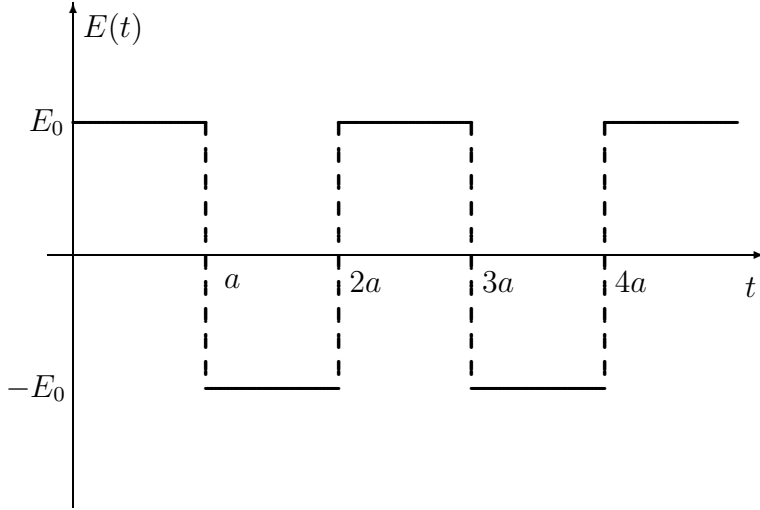


Figura 4.8:

È evidente che  $s = 0$  è un polo semplice (benchè inizialmente potesse sembrare un polo doppio). Come nel caso precedente gli ulteriori poli sono gli zeri della funzione  $\cosh sa$  ovvero gli zeri della funzione

$$\frac{e^{sa} + e^{-sa}}{2}$$

dunque

$$e^{sa} = -e^{-sa} \Leftrightarrow e^{2sa} = -1 = e^{\pi + 2k\pi i} \Rightarrow$$

$$s_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i a \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Questi poli (come nel caso precedente) sono tutti semplici, infatti basta verificare che  $f'(s_k) \neq 0, \forall k$ .

Il resto dell'esercizio procede come nel caso precedente.

**Esercizio 4.12.2** Al circuito elettrico in figura 4.9 è applicata una tensione periodica  $E(t)$  avente l'andamento di un'onda quadra (figura 4.8). Determinare la corrente in funzione del tempo assumendo nulla la corrente all'istante  $t = 0$ .

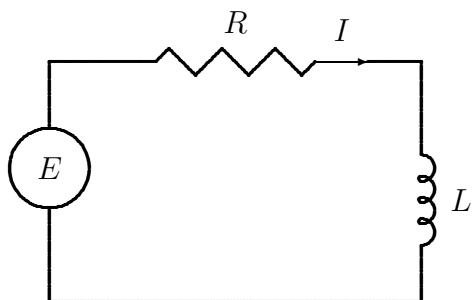


Figura 4.9:

*L'equazione differenziale della  $I(t)$  nel circuito è:*

$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) \\ I(0) = 0. \end{cases}$$

*Prendendo le trasformate di Laplace e dalle tabelle si ha:*

$$Ls \, i(s) + R \, i(s) = \frac{E_0}{s} \tanh \frac{as}{2}$$

*oppure*

$$i(s) = \frac{E_0}{s(Ls + R)} \tanh \frac{as}{2}$$

*dove  $i(s) = L[I(t)]$ . Quindi*

$$I(t) = \frac{E_0}{L} L^{-1} \left[ \frac{1}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2} \right]. \quad (4.35)$$

*La funzione*

$$f(s) = \frac{1}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2}$$

presenta un polo semplice in  $s = -R/L$  e poli semplici in

$$s = s_k = \frac{(2k+1)\pi\iota}{a}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dove  $\cosh(as/2) = 0$ . Il valore  $s = 0$  non è un polo poichè

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tanh(as/2)}{s} = \frac{a}{2}$$

è finito. Quindi  $s = 0$  è una singolarità eliminabile. Allora il residuo in  $s = -R/L$  è

$$\lim_{s \rightarrow -R/L} (s + R/L) \left[ \frac{e^{st}}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2} \right] = \frac{L}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L}.$$

Il residuo in  $s = s_k = (2k+1)\pi\iota/a$  è

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \left[ \frac{e^{st}}{s(s + R/L)} \tanh \frac{as}{2} \right] = \\ & \lim_{s \rightarrow s_k} \left[ \frac{s - s_k}{\cosh(as/2)} \right] \lim_{s \rightarrow s_k} \left[ \frac{e^{st} \sinh(as/2)}{s(s + R/L)} \right] = \\ & = \left[ \frac{1}{(a/2) \sinh(as_k/2)} \right] \left[ \frac{e^{s_k t} \sinh(as_k/2)}{s_k(s_k + R/L)} \right] = \\ & = \frac{e^{(2k+1)\pi\iota t/a}}{(2k+1)\pi\iota[(2k+1)\pi\iota/a + R/L]}. \end{aligned}$$

Allora la somma dei residui è

$$\begin{aligned} & \frac{L}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2e^{(2k+1)\pi\iota t/a}}{(2k+1)\pi\iota[(2k+1)\pi\iota/a + R/L]} = \\ & = \frac{L}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{aR \sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L \cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)[a^2 R^2 + (2n-1)^2 \pi^2 L^2]}. \end{aligned}$$

Quindi dalla (4.35) si ha il risultato cercato

$$I(t) = \frac{E_0}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \\ + \frac{2E_0}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{aR \sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L \cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)[a^2 R^2 + (2n-1)^2 \pi^2 L^2]}.$$

Questo può essere posto nella forma

$$I(t) = \frac{E_0}{R} e^{-Rt/L} \tanh \frac{aR}{2L} + \\ + \frac{2E_0}{\pi L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi t/a - \Phi_n]}{(2n-1)[a^2 R^2 + (2n-1)^2 \pi^2 L^2]^{1/2}}.$$

dove

$$\Phi_n = \arctan \frac{(2n-1)\pi L}{aR}.$$