Equazioni differenziali ordinarie

Indice

1 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

Sia

$$y'(x) = A(x)y(x) + a(x) \tag{1.1}$$

con $y: \mathbb{R} \to \mathbf{C}^n$, $A(x)$ matrice $n \times n$ complessa e $a(x)$ vettore complesso, $x \in (\alpha, \beta)$ un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Sia

$$y'(x) = A(x)y(x) \tag{1.2}$$

il corrispondente sistema omogeneo. E' noto che se $A(x)$ e $a(x)$ sono continue il sistema ammette una e una sola soluzione passante per un punto assegnato (x_0, y_0).

Si definisce *matrice fondamentale* Y per il sistema (1.2) una matrice $n \times n$ le cui colonne sono n soluzioni linearmente indipendenti della (1.2)

$$Y(x) = (y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \tag{1.3}$$

Quindi $\det Y \neq 0$. Vale il seguente

Teorema Sia Y matrice fondamentale per il sistema (1.2). Allora

i) Y è soluzione di

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{1.4}$$

ii) Se Y_1 è un'altra matrice fondamentale, esiste una matrice costante $n \times n$ C, invertibile tale che $Y_1(x) = Y(x)C$

iii) La soluzione di (1.2) passante per (x_0, y_0) è

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y_0 \tag{1.5}$$

Dimostrazione. E' un semplice esercizio.

Inoltre vale il seguente risultato:

Teorema Sia Y matrice fondamentale per il sistema (1.2). Allora la soluzione di (1.1) passante per (x_0, y_0) è data da

$$y(x) = Y(x)[Y^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(u)a(u)du] \tag{1.6}$$

Dimostrazione Proviamo a cercare una soluzione dell'equazione non omogenea col *metodo di variazione delle costanti* nella forma $Y(x)c(x)$ con $c(x)$ vettore $n \times 1$ con la condizione $Y(x_0)c(x_0) = y_0$ ovvero $c(x_0) = Y^{-1}(x_0)y_0$. Dovrà essere

$$(Yc)'(x) = A(x)y(x) + a(x) \tag{1.7}$$

Ma

$$(Yc)'(x) = Y'(x)c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)Y(x)c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)y(x) + a(x) \tag{1.8}$$

e quindi

$$Y(x)c'(x) = a(x) \tag{1.9}$$

ovvero

$$c'(x) = Y^{-1}(x)a(x) \tag{1.10}$$

Integrando tenendo conto della condizione iniziale segue

$$c(x) = Y^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(u)a(u)du \tag{1.11}$$

Sostituendo nella $Y(x)c(x)$ si ricava la soluzione.

Nel seguito saremo interessati al caso in cui $A(x) = A$ ovvero a un sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti. Incominciamo quindi col definire la funzione $\exp(A)$ con A matrice $n \times n$ complessa. A è quindi un operatore da $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$. Ricordiamo la definizione di norma di A come

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \tag{1.12}$$

dove $||x|| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2}$. L'insieme di tutti gli operatori $A : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ è uno spazio di Banach (ovvero uno spazio metrico con la metrica indotta dalla norma (1.12) e completo).

Ricordiamo anche la equazione per il calcolo degli autovalori di una matrice

$$\det(A - \lambda I) = 0 = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(\lambda_1 + \ldots \lambda_n) + \ldots + \lambda_1 \ldots \lambda_n \tag{1.13}$$

e la definizione di traccia $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. In generale gli autovalori $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ possono essere anche non tutti distinti. Se i $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sono distinti i corrispondenti autovettori definiti da

$$Av_k = \lambda_k v_k \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{1.14}$$

sono indipendenti.

Consideriamo la serie

$$1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots \frac{1}{m!}A^m + \ldots \tag{1.15}$$

La successione delle somme parziali è di Cauchy e dato che lo spazio è completo ne segue che la serie esponenziale converge a un operatore dello stesso spazio che indicheremo con $\exp(A)$. Una definizione equivalente è

$$\exp(A) = \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{A}{m})^m \tag{1.16}$$

Valgono le seguenti proprietà:

i) Se $[A, B] = AB - BA = 0$ allora $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$

ii) Se $A = PBP^{-1}$ allora $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$

iii) $\det \exp(A) = \exp \mathrm{Tr}(A)$

i) e ii) seguono semplicemente dagli sviluppi in serie. Per es.

$$\begin{aligned}\exp(A)\exp(B) &= (1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots)(1 + B + \frac{1}{2!}B^2 + \ldots) \\ &= 1 + (A + B) + \frac{1}{2!}(A^2 + B^2 + 2AB) + \ldots = \exp(A + B)\end{aligned} \tag{1.17}$$

iii) Vale

$$\det \exp(A) = \det \lim_{m\to\infty}(1 + \frac{A}{m})^m \tag{1.18}$$

Ma

$$\det(1 + \frac{A}{m})^m = [\frac{\det(m + A)}{m^n}]^m = (1 + \frac{1}{m}\mathrm{Tr}(A) + \mathcal{O}(\frac{1}{m^2}))^m \tag{1.19}$$

dove abbiamo utilizzato la (1.13) per $\lambda = -m$. Nel limite $m \to \infty$ si ricava il risultato.

Nota Nel caso in cui $[A, B] \neq 0$ vale la formula di Baker, Campbell, Hausdorff:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(C) \tag{1.20}$$

dove

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}\{[A, [A, B]] + [B, [B, A]]\} + \cdots \tag{1.21}$$

Un'altra formula che può risultare utile è la seguente:

$$\exp(iA)B\exp(-iA) = B + i[A, B] + \frac{i^2}{2!}[A, [A, B]] + \cdots \tag{1.22}$$

Tornando al sistema di equazioni differenziali nel caso in cui $A(x) = A$ la soluzione della (1.2) sarà

$$y(x) = \exp(A(x - x_0))y_0 \tag{1.23}$$

e la matrice fondamentale $Y(x) = \exp(Ax)$. Per la verifica basta derivare la serie esponenziale termine a termine. Il problema è quindi ricondotto al calcolo dell'esponenziale di una matrice.

Esponenziale di una matrice diagonale. Nel caso in cui

$$A = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \tag{1.24}$$

sarà banalmente

$$\exp(Ax) = diag\{\exp(\lambda_1 x), \ldots, \exp(\lambda_n x)\} \tag{1.25}$$

Quindi se la matrice A è diagonalizzabile è possibile con una trasformazione PAP^{-1} diagonalizzarla, calcolare l'esponenziale (1.25) e poi fare la trasformazione inversa.

Esponenziale di una matrice nilpotente. Una matrice è detta nilpotente se una sua potenza $N^k = 0$. Anche in questo caso il calcolo dell'esponenziale $\exp(Nx)$ è semplice perchè lo sviluppo si arresta al termine $k - 1$.

Esempio Calcolare $\exp(Nx)$ con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

E' $N^3 = 0$. Quindi

$$\exp(Nx) = I + Nx + \frac{1}{2}N^2x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & x^2/2 & x & 1 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Esponenziale di una matrice nilpotente elementare. Una matrice $n \times n$ è detta nilpotente elementare se è del tipo

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

Vale $N^n = 0$. Inoltre, per esempio se $n = 4$, abbiamo

$$\begin{aligned} \exp(Nx) &= I_4 + Nx + \frac{1}{2}N^2x^2 + \frac{1}{3!}N^3x^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & 0 \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2} & x & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Esponenziale di un blocco di Jordan

Un blocco di Jordan è una matrice $m \times m$ del tipo

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N_m \tag{1.30}$$

con N_m matrice nilpotente elementare $m \times m$. Si ha

$$\exp(Jx) = \exp[(\lambda I + N_m)x] = \exp(\lambda I x)\exp(N_m x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ x & 1 & & & \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \frac{x^m}{m!} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

In generale ogni matrice può esser trasformata con una trasformazione non singolare P nella forma diagonale a blocchi

$$P^{-1}AP = diag\{J_1, \cdots, J_p\} \tag{1.32}$$

dove i J_α $(\alpha = 1, \cdots, p)$ sono blocchi di Jordan $m_\alpha \times m_\alpha$

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & & & & \\ 1 & \lambda_\alpha & & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

con i λ_α autovalori non necessariamente distinti.

La soluzione del sistema lineare sarà allora

$$e^{Ax} = P \exp diag\{J_1 x, \cdots, J_p x\} P^{-1} = P diag\{\exp J_1 x, \cdots, \exp J_p x\} P^{-1} \tag{1.34}$$

dove ciascun blocco è del tipo (1.33).

Esercizio Trovare la matrice fondamentale del sistema

$$y'(x) = Ay(x) \tag{1.35}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

L'equazione agli autovalori

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0 \tag{1.37}$$

ha per soluzione $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Determiniamo l'autovettore corrispondente al primo autovalore

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

ovvero

$$u + 2v = 0 \tag{1.39}$$

Ed analogamente per il secondo autovalore

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

ovvero

$$u - v = 0 \tag{1.41}$$

Scegliamo come due autovettori

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

La matrice che diagonalizza A è quindi

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

con
$$P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \tag{1.44}$$
Risulta
$$P^{-1}AP = A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{1.45}$$
Pertanto la matrice fondamentale è
$$e^{Ax} = Pe^{A_D x}P^{-1} = P\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{4x} \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{4x} & -\frac{2}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{4x} \\ -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{4x} & \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{4x} \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

Esercizio Trovare la matrice fondamentale del sistema
$$y'(x) = Ay(x) \tag{1.47}$$
con
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.48}$$
L'equazione agli autovalori
$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.49}$$
è
$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \tag{1.50}$$
e quindi la matrice A ha l'autovalore $\lambda_1 = -1$ con molteplicità 1 e ha l'autovalore $\lambda_2 = 2$ con molteplicità 2. L'equazione per l'autovettore corrispondente all'autovalore -1 è
$$A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{1.51}$$
ovvero implica le equazioni
$$\begin{aligned} 2u &= -u \\ 3u + 2v &= -v \\ 5u - 2v - w &= -w \end{aligned} \tag{1.52}$$
Un autovettore è quindi
$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.53}$$
L'equazione per l'autovettore corrispondente all'autovalore 2 è
$$A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{1.54}$$
ovvero
$$\begin{aligned} 2u &= 2u \\ 3u + 2v &= 2v \\ 5u - 2v - w &= 2w \end{aligned} \tag{1.55}$$

E' possibile determinare un solo autovettore indipendente, per esempio

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

E' possibile però costruire un *autovettore generalizzato* $v^{(3)}$ soluzione dell'equazione

$$(A - 2I)v^{(3)} = v^{(2)} \tag{1.57}$$

Questo vettore $v^{(3)} \in \ Ker(A - 2I)^2$. L'eq.(1.57) implica

$$\begin{aligned} &0 = 0 \\ &3u = 3 \\ &5u - 2v - 3w = -2 \end{aligned} \tag{1.58}$$

Quindi

$$v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

Costruiamo la matrice

$$P = \{v^{(1)}, v^{(3)}, v^{(2)}\} \tag{1.60}$$

con

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

Si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = diag\{J_1, J_2\} \tag{1.62}$$

con

$$J_1 = -1, J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.63}$$

Quindi

$$\exp{(P^{-1}APx)} = \begin{pmatrix} e^{-x} & & \\ & e^{2x} & 0 \\ & xe^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

La matrice fondamentale del problema di partenza sarà data da

$$e^{Ax} = Pe^{P^{-1}APx}P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3e^{2x} & 0 & 0 \\ 9xe^{2x} & 3e^{2x} & 0 \\ -7e^{-x} + 7e^{2x} - 6xe^{2x} & 2e^{-x} - 2e^{2x} & 3e^{-x} \end{pmatrix} \tag{1.65}$$

In generale per ciascun autovalore λ con una certa molteplicità p, si ottiene prima lo spazio nullo di $A - \lambda I$. Se la dimensione del $Ker(A - \lambda I) < p$ si procede a studiare il $Ker(A - \lambda I)^2$ e cosi via fino ad ottenere una base di p vettori.

2 Soluzioni per serie di ODE del secondo ordine

Sia data l'equazione differenziale del secondo ordine omogenea

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0 \tag{2.1}$$

Supponendo $a_0(x) \neq 0$, possiamo riscrivere la eq. (2.1) nella forma

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{2.2}$$

con

$$p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} \qquad q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)} \tag{2.3}$$

Consideriamo i tre casi seguenti, i primi due dei quali studieremo in dettaglio:

1. $p(x)$ e $q(x)$ sono funzioni sviluppabili in serie di Taylor intorno al punto x_0. In questo caso x_0 è detto *punto ordinario*
2. $p(x)$ e/o $q(x)$ hanno una singolarità in x_0, ma $xp(x)$ e $x^2q(x)$ sono funzioni sviluppabili in serie di Taylor intorno al punto x_0. In questo caso x_0 è detto *punto singolare regolare*
3. $p(x)$ e/o $q(x)$ hanno una singolarità in x_0, ma x_0 non è un punto singolare regolare. In questo caso x_0 è detto *punto singolare irregolare*

Per semplicità assumeremo $x_0 = 0$.

2.1 Soluzione intorno a punti regolari: tecnica di Frobenius

Cerchiamo una soluzione nella forma di serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2.4}$$

Siano

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k \tag{2.5}$$

gli sviluppi di p e q. Calcoliamo y' e y'':

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} \tag{2.6}$$

Sostituendo le eq. (2.6) e le (2.5) in (2.2), otteniamo:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{r=0}^{\infty} p_r x^r \sum_{s=1}^{\infty} sc_s x^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} q_r x^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s \quad = \quad 0 \tag{2.7}$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{r=0}^{\infty} p_r x^r \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)c_{s+1}x^s + \sum_{r=0}^{\infty} q_r x^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s \quad = \quad 0 \tag{2.8}$$

Dato il prodotto di due serie nella forma

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \sum_{s=0}^{\infty} b_s x^s \tag{2.9}$$

questo si può riscrivere come

$$\sum_{k=0}^{\infty} \quad (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}(a_s b_{k-s})x^k \tag{2.10}$$

L'equazione diventa dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{k} p_{k-s}(s+1)c_{s+1}\right]x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{k} q_{k-s}c_s\right]x^k = 0 \tag{2.11}$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{s=0}^{k} p_{k-s}(s+1)c_{s+1} + \sum_{s=0}^{k} q_{k-s}c_s\right]x^k = 0 \tag{2.12}$$

Affinché questa equazione possa essere verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ è necessario che si annullino tutti i coefficienti di x^k.

Si ottiene dunque una relazione di ricorrenza per i c_k, per cui, noti tutti i p_i e i q_i è possibile costruire tutti i termini dello sviluppo della soluzione.

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = -\sum_{s=0}^{k}\left[(s+1)p_{k-s}c_{s+1} + q_{k-s}c_s\right] \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Per conoscere la funzione soluzione del problema di Cauchy (2.6) è in effetti necessario conoscere anche le condizioni iniziali del problema; queste vengono fornite attraverso i termini c_0 e c_1 dello sviluppo di $y(x)$. In particolare ponendo

$$\begin{gathered} \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \end{gathered} \tag{2.14}$$

possiamo costruire due soluzioni linearmente indipendenti.

Se R è il più piccolo dei raggi di convergenza degli sviluppi di p e q si dimostra che la soluzione ha un raggio di convergenza che è maggiore o uguale a R [3].

Esempio 1: Equazione di Hermite Cerchiamo la soluzione dell'equazione

$$y'' - 2xy' + 2\nu y = 0 \tag{2.15}$$

$x = 0$ è un punto ordinario per l'equazione di Hermite.

In questo caso (con le notazioni di prima) abbiamo:

$$\begin{aligned} p(x) = -2x \Rightarrow & \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = -2 \\ p_i = 0 & \forall i > 1 \end{cases} \\ q(x) = 2\nu \Rightarrow & \begin{cases} q_0 = 2\nu \\ q_i = 0 & \forall i > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dalla (2.13) si ottiene

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} = 2(k-\nu)c_k \tag{2.17}$$

e con la sostituzione $k \to k-2$ si ha

$$c_k k(k-1) = -2(\nu - k + 2)c_{k-2} \tag{2.18}$$

ovvero, separando k pari e dispari

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{-2(\nu - 2k + 2)}{2k(2k-1)} c_{2k-2} \\ c_{2k+1} &= \frac{-2(\nu - 2k + 1)}{(2k+1)2k} c_{2k-1} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Consideriamo della (2.1) solamente i termini pari dello sviluppo di $y(x)$ ed esprimiamoli in funzione di c_0. Si ottiene

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{(-2)^k(\nu - 2k + 2)(\nu - 2k + 4)\ldots(\nu - 2k + 2k)}{2k(2k-1)(2k-2)\ldots(1)} c_0 \\ &= \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}(\nu/2 - k + 1)(\nu/2 - k + 2)\ldots(\nu/2) \\ &= \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - k + 2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - k + 1\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - k + 3\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - k + 2\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} c_0 \\ &= \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - k + 1\right)} c_0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

dove abbiamo fatto uso di $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$.

In modo simile per i termini dispari si ha

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - k + \frac{1}{2}\right)} c_1 \tag{2.21}$$

Le due soluzioni dell'equazione differerenziale (2.15) sono dunque

$$y_1(x) = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\frac{(2x)^{2k}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+1\right)}$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{(2x)^{2k+1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+\frac{1}{2}\right)} \tag{2.22}$$

Supponiamo adesso che $\nu = 2n$ con $n \in \mathbf{Z}$. La relazione in questo caso si semplifica, essendo $\Gamma(n+1) = n!$. Consideriamo infatti la soluzione *pari* dell'equazione (2.15).

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}c_0 \tag{2.23}$$

Se si ha $k = n+1$ si ottiene

$$c_{2n+2} \sim \frac{1}{\Gamma(0)} \to 0 \tag{2.24}$$

Dunque $c_{2n+2} = 0$ e $\forall k > n+1$ si ha $c_{2k} = 0$. In questo caso si può verificare che la soluzione $y_1(x)$ è proporzionale al polinomio di Hermite di ordine $2n$, H_{2n}. Infatti per H_{2n} si ha

$$H_{2n}(x) = (-1)^n(2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2x)^{2k}}{(2k)!(n-k)!}$$
$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!}y_1(x) \tag{2.25}$$

Vale inoltre una analoga relazione per la soluzione dispari:

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2(-1)^n(2n+1)!}{n!}y_2(x) \tag{2.26}$$

Esempio 2: Equazione di Legendre Cerchiamo adesso la soluzione dell'equazione differenziale nell'intorno di $x_0 = 0$

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \nu(\nu+1)y(x) = 0 \tag{2.27}$$

$x = 0$ è un punto ordinario per l'equazione di Legendre dato che

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad q(x) = \frac{\nu(\nu+1)}{1-x^2} \tag{2.28}$$

In questo particolare caso non è necessario lo sviluppo di $p(x)$ e $q(x)$ per trovare la soluzione. Cerchiamo $y(x)$ nella forma

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \tag{2.29}$$

L'equazione (2.27) diventa

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2)\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} + \nu(\nu+1)\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^m - 2\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^m + \nu(\nu+1)\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)c_{m+2}x^m - \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)c_m x^m - 2\sum_{m=0}^{\infty} m c_m x^m + \nu(\nu+1)\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+2)(m+1)c_{m+2} - m(m+1)c_m + \nu(\nu+1)c_m\right]x^m
\end{aligned}$$

Deve essere quindi

$$\begin{aligned}
c_{m+2} &= -\frac{-m(m+1)+\nu(\nu+1)}{(m+2)(m+1)}c_m \\
&= -\frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{(m+2)(m+1)}c_m \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Anche in questo caso si hanno due soluzioni distinte: una pari ed una dispari. Studieremo esclusivamente la soluzione pari, ponendo cioè $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$. La relazione per ricorrenza per i c_m si può riscrivere allora come

$$c_{2k} = -\frac{(\nu-2k+2)(\nu+2k-1)}{2k(2k-1)}c_{2k-2} \qquad (2.31)$$

Iterando questa relazione fino ad ottenere c_{2k} in funzione di c_0 si ha

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= (-1)^k\frac{(\nu-2k+2)(\nu-2k+4)\dots(\nu)(\nu+2k-1)(\nu+2k-3)\dots(\nu+1)}{(2k)!}c_0 \\
&= (-1)^k\frac{2^k(\frac{\nu}{2}-k+1)(\frac{\nu}{2}-k+2)\dots(\frac{\nu}{2})2^k(\frac{\nu}{2}+k-\frac{1}{2})(\frac{\nu}{2}+k-\frac{3}{2})\dots(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2})}{(2k)!}c_0
\end{aligned}$$

Usando la relazione

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1) \qquad (2.32)$$

si ha

$$\frac{\nu}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad \frac{\nu}{2}-1 = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} \quad \cdots \qquad (2.33)$$

I coefficienti c_{2k} diventano quindi

$$\begin{aligned}
c_{2k} = (-1)^k\frac{(2)^{2k}}{(2k)!}&\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+3\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+2\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\cdot \\
&\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+k-1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+k-1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+k-2\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}c_0 \\
&= (-1)^k 2^{2k}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+1\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Con la scelta

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \end{array} \right. \tag{2.35}$$

otteniamo la soluzione pari $y_1(x)$

$$y_1(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+k+\frac{1}{2}\right)}{(2k)!\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+1\right)} (2x)^{2k} \tag{2.36}$$

In modo analogo si trova la soluzione dispari:

$$y_2(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+k+1\right)}{(2k+1)!\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-k+\frac{1}{2}\right)} (2x)^{2k+1} \tag{2.37}$$

Anche in questo caso se $\nu = n$ (intero pari) la soluzione $y_1(x)$ è proporzionale ad un polinomio di Legendre P_n di ordine n. In particolare per n pari vale

$$P_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} n!}{2^n \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} y_1(x) \tag{2.38}$$

Se $\nu = n$ è un intero dispari, esiste una analoga relazione tra la soluzione dispari dell'equazione (2.27) e il polinomio di Legendre di ordine n:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n+1)!}{2^n (\frac{n-1}{2})!(\frac{n+1}{2})!} y_2(x) \tag{2.39}$$

2.2 Soluzione nell'intorno di un punto singolare regolare

Supponiamo di voler studiare l'equazione differenziale (2.2) intorno a $x_0 = 0$ punto *singolare regolare*. Questo vuole dire che è possibile scrivere lo sviluppo delle funzioni $xp(x)$ e $x^2 q(x)$.

$$xp(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r x^r \quad x^2 q(x) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r x^r \tag{2.40}$$

Scriviamo adesso la soluzione nella forma

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0) \tag{2.41}$$

E'

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha) c_k x^{k+\alpha-1} \quad y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1) c_k x^{k+\alpha-2} \tag{2.42}$$

e pertanto

$$xy'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha) c_k x^{k+\alpha} \quad x^2 y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1) c_k x^{k+\alpha} \tag{2.43}$$

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (2.2) moltiplicata per x^2

$$x^2 \left(y'' + py' + qy\right) = 0 \tag{2.44}$$

Utilizzando cosí tutti gli sviluppi di xp, x^2q, x^2y'', xy' otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + \sum_{r=0}^{\infty} p_r x^r \sum_{s=0}^{\infty}(s+\alpha)c_s x^{s+\alpha} + \sum_{r=0}^{\infty} q_r x^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^{s+\alpha} = 0$$

Moltiplicando le serie termine a termine, si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k+\alpha)(k+\alpha-1)c_k + \sum_{s=0}^{k} \left[p_{k-s}(s+\alpha) + q_{k-s}\right] c_s \right\} x^{k+\alpha} = 0 \tag{2.45}$$

da cui ricaviamo una relazione di ricorrenza per i c_k

$$(k+\alpha)(k+\alpha-1)c_k + \sum_{s=0}^{k} \left[p_{k-s}(s+\alpha) + q_{k-s}\right] c_s = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots \tag{2.46}$$

Consideriamo dapprima il termine con $k = 0$;

$$\alpha(\alpha-1)c_0 + (p_o\alpha + q_0)c_0 = F(\alpha)c_0 = 0 \tag{2.47}$$

dove abbiamo definito

$$F(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + (p_0\alpha + q_0) \tag{2.48}$$

Per ipotesi $c_0 \neq 0$, poiché altrimenti si annullerebbero tutti i termini, grazie alla relazione di ricorrenza (2.46). Deve essere quindi $F(\alpha) = 0$. Questa equazione (detta *equazione indiciale*), in generale ha 2 radici α_1 e α_2, dette *indici*. Consideriamo la relazione (2.46); scriviamo esplicitamente il termine in c_k:

$$[(k+\alpha)(k+\alpha-1) + p_0(k+\alpha) + q_0]c_k + \sum_{s=0}^{k-1}[p_{k-s}(s+\alpha) + q_{k-s}]c_s = 0 \tag{2.49}$$

ovvero

$$F(\alpha+k)c_k = -\sum_{s=0}^{k-1}[p_{k-s}(s+\alpha) + q_{k-s}]c_s \tag{2.50}$$

L'equazione precedente deve essere affrontata diversamente a seconda della natura delle soluzioni di $F(\alpha)$. Si hanno tre casi:

$$\begin{array}{ll} i) & \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z} \\ ii) & \alpha_1 = \alpha_2 \\ iii) & \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Caso i) E' possibile ricavare due soluzioni indipendenti utilizzando l'eq. (2.50) per α_1 e α_2:

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_k c_k(\alpha_1) x^k \tag{2.51}$$

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_k c_k(\alpha_2) x^k \tag{2.52}$$

con i $c_k(\alpha_1)$, $c_k(\alpha_2)$ determinati dalla (2.50), fissato $c_0 = 1$.

Caso ii) In questo caso si ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$. Procedendo come sopra si puo' costruire una delle due soluzioni:

$$y_0 = x^{\alpha_0} \sum_k c_k(\alpha_0) x^k \tag{2.53}$$

Costruiamo adesso la seconda soluzione. Per semplicitá scriviamo l'equazione differenziale come $Ly = 0$, essendo L il seguente operatore differenziale:

$$L = x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \right) \tag{2.54}$$

Costruiamo la funzione $y(x, \alpha)$ definita da

$$y(x, \alpha) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) x^k \tag{2.55}$$

Supponendo che i $c_k(\alpha)$ per $k > 0$ soddisfino la eq. (2.50), si ha:

$$\begin{aligned} L(y) &= L\left[x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) x^k \right] && (2.56) \\ &= c_0 F(\alpha) x^\alpha && (2.57) \\ &= c_0 x^\alpha (\alpha - \alpha_0)^2 && (2.58) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(y) \right|_{\alpha=\alpha_0} &= c_0 \left[x^\alpha \log x (\alpha - \alpha_0)^2 + x^\alpha 2 (\alpha - \alpha_0) \right] \big|_{\alpha=\alpha_0} && (2.59) \\ &= 0 && (2.60) \end{aligned}$$

ovvero

$$L \left(\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) \right|_{\alpha=\alpha_0} \right) = 0 \tag{2.61}$$

Abbiamo quindi trovato un'altra soluzione $y(x)$

$$y(x) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) \right|_{\alpha=\alpha_0} \tag{2.62}$$

Dato che

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} x^\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha \log x} = e^{\alpha \log x} \log x = x^\alpha \log x \tag{2.63}$$

si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{\alpha_0} \log x \sum_k c_k(\alpha_0) x^k + x^{\alpha_0} \sum_{k=1}^{\infty} c'_k(\alpha_0) x^k && (2.64) \\ y(x) &= y_0(x) \log x + x^{\alpha_0} \sum_{k=1}^{\infty} c'_k(\alpha_0) x^k && (2.65) \end{aligned}$$

Nel secondo termine la somma parte da 1 dato che c_0 non dipende da α.

Caso iii) $\alpha_1 - \alpha_2 = n$ con $n \in \mathbf{N}$. Non é sempre necessario applicare il metodo seguente, come giá accennato in precedenza. In genere prima di applicare questo metodo conviene controllare se davvero la relazione di ricorrenza porta ad una indeterminazione. Ecco altrimenti il metodo generale per la soluzione del caso iii). Come sopra scriviamo una soluzione con il metodo standard:

$$\begin{cases} y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha_1) x^k \\ c_0(\alpha_1) = 1 \end{cases} \tag{2.66}$$

Per ottenere la seconda soluzione poniamo come prima

$$y(x,\alpha) = x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) x^k \tag{2.67}$$

e richiediamo che i c_k soddisfino la relazione di ricorrenza (2.50) per $k \neq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} Ly(x,\alpha) &= c_0 F(\alpha) x^{\alpha} && (2.68) \\ &= c_0 (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) x^{\alpha} && (2.69) \end{aligned}$$

Scegliamo adesso $c_0 = \alpha - \alpha_2$; pertanto

$$Ly(x,\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)^2 x^{\alpha} \tag{2.70}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[Ly(x,\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_2} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)^2 x^{\alpha} \right]_{\alpha=\alpha_2} \tag{2.71}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) \bigg|_{\alpha=\alpha_2} \right] &= x^{\alpha_2} \left[(\alpha - \alpha_2)^2 + (\alpha - \alpha_1) 2 (\alpha - \alpha_2) + (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)^2 \log x \right]_{\alpha=\alpha_2} \\ &= 0 && (2.72) \end{aligned}$$

e quindi la soluzione cercata é

$$y_2(x) = \lim_{\alpha \to \alpha_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) = \lim_{\alpha \to \alpha_2} \left[x^{\alpha} \log x \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) x^k + x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} {c'}_k(\alpha) x^k \right] \tag{2.73}$$

Ma e' possibile dimostrare che

$$\lim_{\alpha \to \alpha_2} x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha) x^k = c y_1(x) \tag{2.74}$$

e quindi

$$y_2(x) = c \log x y_1(x) + \lim_{\alpha \to \alpha_2} x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} {c'}_k(\alpha) x^k \tag{2.75}$$

Proviamo a dimostrare la (2.74).

Scegliendo $c_0 = \alpha - \alpha_2$, tutti i coefficienti fino a c_{n-1}, risultano proporzionali a c_0 e quindi tendono a 0 per $\alpha \to \alpha_2$, ossia

$$\lim_{\alpha \to \alpha_2} c_k(\alpha) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{2.76}$$

Consideriamo adesso c_n, ovvero dalla relazione di ricorrenza (2.50)

$$F(\alpha + n)c_n = -\sum_{s=0}^{n-1} [p_{n-s}(s + \alpha) + q_{n-s}]c_s \tag{2.77}$$

Per quanto sopra osservato i $c_s(\alpha)$ del membro sinistro di questa equazione possono essere riscritti come $(\alpha - \alpha_2)\tilde{c}_s(\alpha)$. Pertanto la (2.77) diventa

$$(\alpha + n - \alpha_1)(\alpha + n - \alpha_2)c_n(\alpha) \;\; = - \;\; (\alpha - \alpha_2) \sum_{s=0}^{n-1} [p_{n-s}(s + \alpha) + q_{n-s}]\tilde{c}_s(\alpha) \tag{2.78}$$

ovvero

$$(\alpha - \alpha_2)(\alpha + n - \alpha_2)c_n(\alpha) = -(\alpha - \alpha_2) \sum_{s=0}^{n-1} [p_{n-s}(s + \alpha) + q_{n-s}]\tilde{c}_s(\alpha) \tag{2.79}$$

Quindi

$$(\alpha + n - \alpha_2)c_n(\alpha) = -\sum_{s=0}^{n-1} [p_{n-s}(s + \alpha) + q_{n-s}]\tilde{c}_s(\alpha) \tag{2.80}$$

e pertanto

$$c_n(\alpha) = -\frac{\sum_{s=0}^{n-1} [p_{n-s}(s + \alpha) + q_{n-s}]\tilde{c}_s(\alpha)}{(\alpha + n - \alpha_2)} \tag{2.81}$$

Per cui, posto

$$c := \lim_{\alpha \to \alpha_2} c_n(\alpha) \tag{2.82}$$

si ha che

$$c = -\frac{1}{n} \lim_{\alpha \to \alpha_2} \sum_{s=0}^{n-1} [p_{n-s}(s + \alpha) + q_{n-s}]\tilde{c}_s(\alpha) \tag{2.83}$$

D'altra parte dalla (2.50) con $k = n + r$ ed $\alpha = \alpha_2$

$$c_{n+r}(\alpha_2)F(\alpha_2 + n + r) = -\sum_{l=n}^{n+r-1} \left[(l + \alpha_2)p_{n+r-l} + q_{n+r-l}\right] c_l(\alpha_2) \tag{2.84}$$

dove abbiamo tenuto conto che i primi n termini della somma sono zero a causa della (2.76). Posto $l = n + t$ si ha

$$c_{n+r}(\alpha_2)F(\alpha_2 + n + r) \;\; = \;\; -\sum_{t=0}^{r-1} \left[(n + t + \alpha_2)p_{r-t} + q_{r-t}\right] c_{n+t}(\alpha_2) \tag{2.85}$$

ovvero

$$c_{n+r}(\alpha_2)F(\alpha_1 + r) \;\; = \;\; -\sum_{t=0}^{r-1} \left[(t + \alpha_1)p_{r-t} + q_{r-t}\right] c_{n+t}(\alpha_2) \tag{2.86}$$

che coincide con l'equazione di ricorrenza per $c_r(\alpha_1)$. Quindi

$$c_{n+r}(\alpha_2) = ac_r(\alpha_1) \tag{2.87}$$

Essendo $c_0(\alpha_1) = 1$, abbiamo $c_n(\alpha_2) = a$ e quindi per la eq.(2.83) $a = c$ per cui

$$\lim_{\alpha\to\alpha_2} x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\alpha)x^k = x^{\alpha_2} \sum_{r=0}^{\infty} c_{n+r}(\alpha_2)x^{n+r} \tag{2.88}$$

$$= x^{\alpha_2+n} c \sum_{r=0}^{\infty} c_r(\alpha_1)x^r = cy_1(x) \tag{2.89}$$

Esempio 3: Equazione di Bessel

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \tag{2.90}$$

Il punto $x = 0$ é un punto singolare regolare:

$$xp(x) = 1 \tag{2.91}$$

$$x^2q(x) = x^2 - \nu^2 \tag{2.92}$$

Pertanto

$$p_0 = 1, \quad q_0 = -\nu^2, \quad q_2 = 1 \tag{2.93}$$

e tutti gli altri p_k e q_k sono nulli. Pertanto l'equazione indiciale é:

$$F(\alpha) = \alpha(\alpha - 1) + \alpha - \nu^2 = \alpha^2 - \nu^2 = 0 \tag{2.94}$$

Gli indici sono

$$\alpha_1 = \nu, \alpha_2 = -\nu \tag{2.95}$$

Consideriamo i tre casi:

i) 2ν non intero

ii) $\nu = 0$

iii) 2ν intero

i) In questo caso dalla relazione di ricorrenza per $k = 1$ si ottiene

$$F(\alpha + 1)c_1 = -c_0(p_1\alpha + q_1) = 0 \tag{2.96}$$

ovvero

$$0 = \left[(\alpha + 1)^2 - \nu^2)\right] c_1 = (\pm 2\nu + 1)c_1 \tag{2.97}$$

che implica $c_1 = 0$. Per $k > 1$

$$\left[(\alpha + k)^2 - \nu^2)\right] c_k = -c_{k-2} \tag{2.98}$$

Pertanto $c_{2k+1} = 0$.

Inoltre

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= -\frac{1}{(\alpha+2k+\nu)(\alpha+2k-\nu)}c_{2k-2} \\
&= (-1)^k \frac{1}{(\alpha+2k+\nu)\cdots(\alpha+2+\nu)} \frac{1}{(\alpha+2k-\nu)\cdots(\alpha+2-\nu)}c_0 \\
&= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{(\alpha/2+k+\nu/2)\cdots(\alpha/2+1+\nu/2)} \frac{1}{(\alpha/2+k-\nu/2)\cdots(\alpha/2+1-\nu/2)}c_0
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Sceglendo $\alpha = \pm\nu$ si ottiene

$$c_{2k}(\nu) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{(\nu+k)(\nu+k-1)\cdots(\nu+1)} \frac{1}{k!}c_0(\nu) \tag{2.100}$$

e

$$c_{2k}(-\nu) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{(-\nu+k)(-\nu+k-1)\cdots(-\nu+1)} \frac{1}{k!}c_0(-\nu) \tag{2.101}$$

ovvero

$$c_{2k}(\nu) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}c_0(\nu) \tag{2.102}$$

e

$$c_{2k}(-\nu) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(2k)!} \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)}c_0(-\nu) \tag{2.103}$$

Scegliendo $c_0(\pm\nu) = 1$ si ottengono le due soluzioni

$$y_1(x) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu} \tag{2.104}$$

$$y_2(x) = 2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k-\nu} \tag{2.105}$$

La funzione

$$J_\nu(x) = \frac{y_1(x)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \tag{2.106}$$

é detta funzione di Bessel di ordine ν.

ii) Una soluzione é $J_0(x)$,l'altra

$$y(x) = J_0(x)\log(x) + \sum_{k=1}^\infty c'_{2k}(0)x^{2k} \tag{2.107}$$

Per ricavare i $c'_{2k}(0)$ occorre considerare la soluzione di

$$(2k+\alpha)^2 c_{2k} = -c_{2k-2} \tag{2.108}$$

ovvero

$$c_{2k}(\alpha) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{\Gamma^2(\alpha/2+1)}{\Gamma^2(k+\alpha/2+1)} \tag{2.109}$$

Ricordando

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n}\right] \tag{2.110}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{c'_{2k}(\alpha)}{c_{2k}(\alpha)} &= \frac{\Gamma'(\alpha/2+1)}{\Gamma(\alpha/2+1)} - \frac{\Gamma'(k+\alpha/2+1)}{\Gamma(k+\alpha/2+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k+\alpha/2+1+n} - \frac{1}{\alpha/2+1+n}\right] \\
&= -\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{\alpha/2+1+n} \\
&= -\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{\alpha/2+r}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

e quindi

$$c'_{2k}(0) = -\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}c_{2k}(0) = -\frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r} \tag{2.112}$$

In conclusione

$$y(x) = J_0(x)\log(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{r}\right]\frac{(-1)^k}{(k!)^2}(x/2)^{2k} \tag{2.113}$$

iii) L'equazione di ricorrenza per k pari è

$$(2k+\alpha+\nu)(2k+\alpha-\nu)c_{2k} = -c_{2k-2} \tag{2.114}$$

Se $2\nu = 2n+1$ si hanno le due soluzioni (2.104)(2.105) con $\nu = \pm(n+1/2)$. Se $2\nu = 2n$ siamo effettivamente nel caso iii). La soluzione con $\nu = n$ ($c_0 = 1$) è

$$y_1(x) = 2^n n! J_n(x) \tag{2.115}$$

La seconda soluzione per la (2.75) è

$$y_2(x) = c\log x y_1(x) + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}{c'}_{2k}(-n)x^{2k} \tag{2.116}$$

con y_1 dato dalla (2.115) e

$$c = -\lim_{\alpha\to -n} c_{2n}(\alpha) \tag{2.117}$$

Scegliendo $c_0 = \alpha - \alpha_2 = \alpha + n$, dalla (2.114) segue

$$\begin{aligned}
c_{2n}(\alpha) &= (-1)^n\frac{1}{(3n+\alpha)(3n+\alpha-2)\cdots(n+\alpha+2)} \\
&\quad \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha-2)\cdots(-n+\alpha+2)}(\alpha+n)
\end{aligned} \tag{2.118}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
c &= \frac{(-1)^n}{2n(2n-2)\cdots 2}\frac{1}{(-2)\cdots(-2n+2)} \\
&= \frac{-1}{2^{2n-1}n!(n-1)!}
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Omettiamo il calcolo di ${c'}_{2k}(-n)$.

3 Problemi ai limiti e funzioni di Green

Sia $A(t)$ matrice $n \times n$ definita e continua per $t \in (\alpha, \beta)$ e $b(t)$ vettore $n \times 1$ definito e continuo nello stesso intervallo. Siano H, K matrici costanti $m \times n$ e $\gamma \in \mathbb{R}^m$. Consideriamo il problema ai limiti con condizioni non omogenee (bilocali) $(t_1, t_2 \in (\alpha, \beta))$.

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{3.1}$$

$$Hy(t_1) + Ky(t_2) = \gamma \tag{3.2}$$

Vale il seguente

Teorema Sia $u(t)$ vettore $n \times 1$ di classe $C^1(\alpha, \beta)$ tale che

$$Hu(t_1) + Ku(t_2) = \gamma \tag{3.3}$$

Allora se $x(t)$ è soluzione di

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + a(t) \tag{3.4}$$

$$Hx(t_1) + Kx(t_2) = 0 \tag{3.5}$$

con

$$a(t) = b(t) + A(t)u(t) - \dot{u}(t) \tag{3.6}$$

allora

$$y(t) = x(t) + u(t) \tag{3.7}$$

è soluzione di (3.1)(3.2), con $b(t) = a(t) - A(t)u(t) + \dot{u}(t)$. Viceversa se $y(t)$ è soluzione di (3.1)(3.2) allora

$$x(t) = y(t) - u(t) \tag{3.8}$$

è soluzione di (3.4)(3.5).

Dimostrazione Dalla (3.7) segue

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \dot{x}(t) + \dot{u}(t) = \\
&= Ax + \dot{u} + a = A(y-u) + \dot{u} + a \\
&= A(t)y(t) + b(t)
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
Hy(t_1) + Ky(t_2) &= Hx(t_1) + Kx(t_2) + Hu(t_1) + Ku(t_2) = \\
&= 0 + \gamma = \gamma
\end{aligned}$$

Viceversa se $y(t)$ è soluzione

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - \dot{u}(t) &= Ay + b - \dot{u} \\
&= Ax + Au + b - \dot{u} \\
&= Ax + a
\end{aligned}$$

Inoltre

$$Hx(t_1) + Kx(t_2) = Hy(t_1) + Ky(t_2) - Hu(t_1) - Ku(t_2) = \gamma - \gamma = 0$$

$\blacksquare$

Teorema Sia $Y(t)$ una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato alla (3.1). Se χ è soluzione di

$$[HY(t_1) + KY(t_2)]\chi = -KY(t_2)\int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau \tag{3.9}$$

allora

$$x(t) = Y(t)\chi + Y(t)\int_{t_1}^{t} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau \tag{3.10}$$

è soluzione di (3.4)(3.5). Viceversa se $x(t)$ è soluzione di (3.4)(3.5) allora $\chi = Y^{-1}(t_1)x(t_1)$ è soluzione di (3.9).

Dimostrazione Sia χ soluzione di (3.9) e sia $x(t)$ data da (3.10). E'

$$\dot{x}(t) = \dot{Y}(t)[\chi + \int_{t_1}^{t} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau] + Y(t)Y^{-1}(t)a(t) = A(t)x(t) + a(t) \tag{3.11}$$

Inoltre

$$Hx(t_1) + Kx(t_2) = HY(t_1)\chi + KY(t_2)\chi + \int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau = 0 \tag{3.12}$$

Viceversa sia $x(t)$ soluzione di (3.4)(3.5). Dalla formula di variazione delle costanti

$$x(t) = Y(t)Y^{-1}(t_1)x(t_1) + Y(t)\int_{t_1}^{t} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau \tag{3.13}$$

poiché $x(t)$ soddisfa (3.4)(3.5) deve essere

$$HY(t_1)Y^{-1}(t_1)x(t_1) + KY(t_2)Y^{-1}(t_1)x(t_1) + KY(t_2)\int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau = 0 \tag{3.14}$$

ovvero la (3.9) con l'identificazione $Y^{-1}(t_1)x(t_1) = \chi$. $\blacksquare$

Teorema Il problema (3.4)(3.5) con $m = n$ e $detR \neq 0$ dove

$$R = HY(t_1) + KY(t_2) \tag{3.15}$$

ha una sola soluzione data da

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}(t,\tau)a(\tau)d\tau \tag{3.16}$$

essendo $\mathcal{G}$ la matrice di Green data da

$$\mathcal{G}(t,\tau) = -Y(t)[R^{-1}KY(t_2) - 1]Y^{-1}(\tau) \quad per \quad \tau < t \tag{3.17}$$

$$\mathcal{G}(t,\tau) = -Y(t)R^{-1}KY(t_2)Y^{-1}(\tau) \quad per \quad \tau > t \tag{3.18}$$

Dimostrazione Se $m = n$ e $detR \neq 0$, allora dalla (3.9)

$$\chi = -R^{-1}KY(t_2)\int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau \tag{3.19}$$

e quindi la sola soluzione è

$$\begin{aligned}
x(t) &= Y(t)(\chi + \int_{t_1}^{t} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau) \\
&= Y(t)[-R^{-1}KY(t_2)\int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau] \\
&= -Y(t)R^{-1}KY(t_2)\int_{t_1}^{t} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau - Y(t)R^{-1}KY(t_2)\int_{t}^{t_2} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau \\
&\quad + Y(t)\int_{t_1}^{t} Y^{-1}(\tau)a(\tau)d\tau \\
&= \int_{t_1}^{t} [-Y(t)(R^{-1}KY(t_2) - 1)Y^{-1}(\tau)]a(\tau)d\tau \\
&\quad + \int_{t}^{t_2} [-Y(t)R^{-1}KY(t_2)Y^{-1}(\tau)]a(\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{3.20}$$

■

4 Problemi ai limiti e funzioni di Green ($n = 2$)

Consideriamo il problema ai limiti

$$a_0(t)\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_2(t)y(t) = f(t) \tag{4.1}$$

con le condizioni

$$\begin{aligned}
H_{11}y(t_1) + H_{12}\dot{y}(t_1) + K_{11}y(t_2) + K_{12}\dot{y}(t_2) = 0 \\
H_{21}y(t_1) + H_{22}\dot{y}(t_1) + K_{21}y(t_2) + K_{22}\dot{y}(t_2) = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Tale problema si può riscrivere nella forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + a(t) \tag{4.3}$$

con

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \quad a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t)/a_0(t) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$p(t) = \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \quad q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \tag{4.6}$$

con le condizioni

$$Hx(t_1) + Kx(t_2) = 0 \tag{4.7}$$

dove

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Se $det[HY(t_1) + KY(t_2)] \neq 0$ la soluzione è data da

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t, \tau) f(\tau) d\tau \tag{4.9}$$

con

$$G(t, \tau) = \frac{1}{a_0(\tau)} \mathcal{G}_{12}(t, \tau) \tag{4.10}$$

essendo $\mathcal{G}_{12}(t, \tau)$ l'elemento 12 della matrice di Green. Sara'

$$\mathcal{G}_{12}(t, \tau) = -Y(t)_{1k}[R^{-1}KY(t_2) - 1]_{kl} Y^{-1}(\tau)_{l2} \quad per \quad \tau < t \tag{4.11}$$

$$\mathcal{G}_{12}(t, \tau) = -Y(t)_{1k}[R^{-1}KY(t_2)]_{kl} Y^{-1}(\tau)_{l2} \quad per \quad \tau > t \tag{4.12}$$

Vale il seguente

Teorema Sia $G(t, \tau)$ la funzione di Green per il problema (4.1)(4.2). Allora

i) $G(t, \tau)$ è soluzione di (4.1)(4.2) con $f = 0$ $\forall t \neq \tau$.

ii) $G(t, \tau)$ è continua sul rettangolo $(t, \tau) \in [t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$

iii) $dG(t, \tau)/dt$ ha una discontinuità in $t = \tau$:

$$\frac{d}{dt} G(t, \tau)|_{t=\tau^+} - \frac{d}{dt} G(t, \tau)|_{t=\tau^-} = \frac{1}{a_0(\tau)} \tag{4.13}$$

■

Teorema Dato il problema ai limiti (4.1)(4.2), siano u e v due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea. Allora la funzione di Green è

$$G(t, \tau) = \frac{1}{a_0(\tau)} [A(\tau)u(t) + B(\tau)v(t) - \frac{u(t)v(\tau) - v(t)u(\tau)}{w(\tau)}] \tag{4.14}$$

per $\tau < t$ e

$$G(t, \tau) = \frac{1}{a_0(\tau)} [Au(t) + Bv(t)] \tag{4.15}$$

per $\tau > t$ con A e B funzioni di τ determinate dalla condizione che $G(t, \tau)$ soddisfi le condizioni ai limiti e dove $w(\tau)$ è il wronskiano

$$w(\tau) = u(\tau)\dot{v}(\tau) - v(\tau)\dot{u}(\tau) \tag{4.16}$$

Dimostrazione Se u e v sono soluzioni indipendenti, sia

$$Y = \begin{pmatrix} u & v \\ \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

la matrice fondamentale. La matrice inversa

$$Y^{-1} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} \dot{v} & -v \\ -\dot{u} & u \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

Pertanto il termine

$$-Y(t)_{1k}[R^{-1}KY(t_2) - 1]_{kl}Y^{-1}(\tau)_{l2} \tag{4.19}$$

sara' una combinazione di $u(t)$ e $v(t)$ con coefficienti dipendenti da τ. Inoltre

$$Y(t)_{1k}1_{kl}Y^{-1}(\tau)_{l2} = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \end{pmatrix} \frac{1}{w(\tau)} \begin{pmatrix} -v(\tau) \\ u(\tau) \end{pmatrix} = [-u(t)v(\tau) + u(\tau)v(t)]\frac{1}{w(\tau)} \tag{4.20}$$

■

Vediamo alcuni casi particolari.

Problema di Cauchy con condizioni iniziali nulle ($H = I$ e $K = 0$)

Dalla (3.15) si ha $detR = detY(t_1) \neq 0$. Quindi dalle (4.10)-(4.12) segue

$$G(t,\tau) = -\frac{1}{a_0(\tau)} \frac{u(t)v(\tau) - v(t)u(\tau)}{w(\tau)} \quad per \quad \tau < t \tag{4.21}$$

$$G(t,\tau) = 0 \quad per \quad \tau > t \tag{4.22}$$

Quindi

$$y(t) = -\int_{t_1}^{t} \frac{u(t)v(\tau) - v(t)u(\tau)}{a_0(\tau)w(\tau)} f(\tau) d\tau \tag{4.23}$$

Problema di Cauchy E' il problema dato da:

$$\begin{aligned} &a_0(t)\ddot{\xi}(t) + a_1(t)\dot{\xi}(t) + a_2(t)\xi(t) = f(t) \\ &\xi(t_1) = \gamma_1 \quad \dot{\xi}(t_1) = \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

La soluzione è data da

$$\xi(t) = y(t) + z(t) \tag{4.25}$$

con y soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali nulle (il precedente) e z di (4.24) con $f = 0$.

Condizioni al contorno separate

E' il problema (4.1)(4.2) con

$$H_{21} = H_{22} = K_{11} = K_{12} = 0 \tag{4.26}$$

ovvero

$$a_0(t)\ddot{y}(t) + a_1(t)\dot{y}(t) + a_2(t)y(t) = f(t) \tag{4.27}$$

con le condizioni

$$\begin{aligned} H_{11}y(t_1) + H_{12}\dot{y}(t_1) = 0 \\ K_{21}y(t_2) + K_{22}\dot{y}(t_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Sia u una soluzione di

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{4.29}$$

e

$$u(t_1) = H_{12} \qquad \dot{u}(t_1) = -H_{11} \tag{4.30}$$

Sia v una soluzione di (4.29) e

$$v(t_2) = K_{22} \qquad \dot{v}(t_2) = -K_{21} \tag{4.31}$$

Se u e v sono linearmente indipendenti, posto

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

si ha

$$R = HY(t_1) + KY(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & w(t_1) \\ -w(t_2) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Quindi

$$\det R = w(t_1)w(t_2) \neq 0 \tag{4.34}$$

Pertanto

$$R^{-1} = \frac{1}{w(t_1)w(t_2)} \begin{pmatrix} 0 & -w(t_1) \\ w(t_2) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

e

$$R^{-1}KY(t_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

La soluzione è quindi

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,\tau)f(\tau)d\tau \tag{4.37}$$

con

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= [-Y_{11}(t)Y_{12}^{-1}(\tau) + Y_{1k}(t)Y_{k2}^{-1}(\tau)]/a_0(\tau) \\ &= [u(t)v(\tau) - u(t)v(\tau) + v(t)u(\tau)]/[a_0(\tau)w(\tau)] \\ &= v(t)u(\tau)/[a_0(\tau)w(\tau)] \quad per \quad \tau < t \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} G(t,\tau) &= -Y_{11}(t)Y_{12}^{-1}(\tau)/[a_0(\tau)w(\tau)] \\ &= u(t)v(\tau)/[a_0(\tau)w(\tau)] \quad per \quad \tau > t \end{aligned} \tag{4.39}$$

Condizioni al contorno separate non omogenee

Sia dato il problema (4.27) con le condizioni

$$\begin{aligned} B_1 y &= H_{11}y(t_1) + H_{12}\dot{y}(t_1) = \gamma_1 \\ B_2 y &= K_{21}y(t_2) + K_{22}\dot{y}(t_2) = \gamma_2 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Siano u e v soluzioni di (4.29), (4.30) e (4.31). Quindi

$$B_1 u = B_2 v = 0 \tag{4.41}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} B_2 u &= K_{21} u(t_2) + K_{22} \dot{u}(t_2) \\ &= -\dot{v}(t_2) u(t_2) + v(t_2) \dot{u}(t_2) \\ &= -w(t_2) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Analogamente

$$B_1 v = w(t_1) \tag{4.43}$$

Se u e v sono indipendenti, poniamo

$$z(t) = \frac{\gamma_2}{B_2 u} u(t) + \frac{\gamma_1}{B_1 v} v(t) \tag{4.44}$$

z é soluzione della equazione omogenea e delle (4.40). Se y é soluzione del problema (4.27) (4.28) si ha che $\xi(t) = y(t) + z(t)$ é soluzione di (4.27) (4.40).

Riferimenti bibliografici

[1] J.K. Hale, Ordinary Differential Equations, Wiley Interscience, 1969

[2] V.I. Arnold, Equazioni differenziali ordinarie, MIR 1979

[3] B. Spain and M. G. Smith, Functions of Mathematical Physics,Van Nostrand Reinhold Company, London 1970