Esercizio 1.1 *Calcolare l'integrale complesso*

$$\oint_C \frac{2zdz}{(z^2+1)(2z^2-5z+2)}$$

usando il teorema dei residui e dove C è la circonferenza avente centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$ positivamente orientata.

Svolgimento. Innanzitutto identifichiamo i poli della funzione

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2+1)(2z^2-5z+2)}$$

che sono $z = \pm\iota$, $z = 1/2$ e $z = 2$, dei quali solo quest'ultimo è esterno alla circonferenza C. I poli sono tutti semplici. Calcoliamo ora i residui della funzione $f(z)$:

$$R(f,\iota) = \lim_{z\to\iota} \frac{2z}{(z+\iota)(2z^2-5z+2)} = \frac{\iota}{5};$$

$$R(f,-\iota) = \lim_{z\to-\iota} \frac{2z}{(z-\iota)(2z^2-5z+2)} = -\frac{\iota}{5};$$

$$R(f,1/2) = \lim_{z\to1/2} \frac{2z}{2(z^2+1)(z-2)} = -\frac{4}{15}.$$

L'integrale da calcolare vale quindi

$$\oint_C \frac{2zdz}{(z^2+1)(2z^2-5z+2)} = 2\pi\iota\left[\frac{\iota}{5} - \frac{\iota}{5} - \frac{4}{15}\right] = -\frac{8}{15}\pi\iota.$$

Esercizio 1.2 *Calcolare l'integrale complesso*

$$\oint_C \frac{e^{\iota\pi z}dz}{z(z-2)^2}$$

usando il teorema dei residui e dove C è la circonferenza $\{x+\iota y \in \mathbb{C} \mid x^2+y^2-2x-2y-2=0\}$ positivamente orientata.

Svolgimento. Innanzitutto calcoliamo centro e raggio della circonferenza C. Ricordiamo che se una circonferenza ha equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

allora il centro ha coordinate $(-a/2, -b/2)$ mentre il raggio è

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}.$$

In questo caso C ha centro nel punto $(1, 1)$ (cioè $1 + \iota$) e raggio 2. Ora identifichiamo i poli della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\iota\pi z}}{z(z-2)^2}$$

che sono $z = 0$, polo semplice, e $z = 2$, polo doppio, entrambi interni a C. Applicando il teorema dei residui:

$$\oint_C \frac{e^{\iota\pi z}dz}{z(z-2)^2} = 2\pi\iota[R(f, 0) + R(f, 2)].$$

Calcoliamo ora i residui:

$$R(f, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{\iota\pi z}}{(z-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} R(f, 2) &= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz} \frac{e^{\iota\pi z}}{z} = \\ &= \lim_{z\to 2} \frac{\pi\iota e^{\iota\pi z} z - e^{\iota\pi z}}{z^2} = \frac{2\pi\iota - 1}{4}. \end{aligned}$$

L'integrale da calcolare vale quindi

$$\oint_C \frac{e^{\iota\pi z}dz}{z(z-2)^2} = 2\pi\iota \left[\frac{2\pi\iota - 1}{4} + \frac{1}{4}\right] = -\pi^2.$$

Esercizio 1.3 *Calcolare l'integrale complesso*

$$\oint_C \frac{z^2 + 2z - 3}{(z^4 - z^3)(z^2 + 4)} dz$$

usando il teorema dei residui e dove C è la circonferenza $\{x + \iota y \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0\}$ positivamente orientata.

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che C è la circonferenza avente centro in $z = \iota$ e raggio 2. Calcoliamo ora i poli della funzione

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z - 3}{(z^4 - z^3)(z^2 + 4)}.$$

Il denominatore di $f(z)$ si annulla per $z = 0$, $z = 1$ e $z = \pm 2\iota$. Osserviamo che $z = 1$ è una discontinuità eliminabile poichè annulla il numeratore, pertanto possiamo ridurre la funzione $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z + 3}{z^3(z^2 + 4)}.$$

Per gli altri punti solo $z = 0$, polo triplo, e $z = 2\iota$, polo semplice, sono interni a C, pertanto:

$$\oint_C \frac{z + 3}{z^3(z^2 + 4)} dz = 2\pi\iota[R(f, 0) + R(f, 2\iota)].$$

Calcoliamo ora i residui:

$$\begin{aligned} R(f, 0) &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z + 3}{z^2 + 4} = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^2 + 4 - 2z(z + 3)}{(z^2 + 4)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{-z^2 - 6z + 4}{(z^2 + 4)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{(-2z - 6)(z^2 + 4) - 4z(-z^2 - 6z + 4)}{(z^2 + 4)^3} = -\frac{3}{16}. \end{aligned}$$

$$R(f, 2\iota) = \lim_{z \to 2\iota} \frac{z + 3}{z^3(z + 2\iota)} = \frac{2\iota + 3}{(4\iota)(-8\iota)} = \frac{2\iota + 3}{32}.$$

$$\oint_C \frac{z + 3}{z^3(z^2 + 4)} dz = 2\pi\iota \left[\frac{2\iota + 3}{32} - \frac{3}{16} \right] = -\frac{\pi}{16}(3\iota + 2).$$

Esercizio 1.4 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta.$$

Svolgimento. Se $z = e^{\iota\theta}$ allora

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z} \\ \cos 2\theta &= \frac{e^{2\iota\theta}+e^{-2\iota\theta}}{2} = \frac{z^4+1}{2z^2}, \end{aligned}$$

inoltre $dz = \iota z d\theta$. Sostituendo nell'integrale della traccia si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta} d\theta &= \oint_C \frac{z^4+1}{2z^2\left(2-\frac{z^2+1}{2z}\right)} \frac{dz}{\iota z} = \\ &= \oint_C \frac{z^4+1}{\iota z^2(4z-z^2-1)} dz = \\ &= \iota \oint_C \frac{z^4+1}{z^2(z^2-4z+1)} dz. \end{aligned}$$

dove C è la circonferenza avente centro nell'origine e raggio 1 positivamente orientata. Posto

$$f(z) = \frac{(z^4+1)\iota}{z^2(z^2-4z+1)}$$

osserviamo che $z = 0$ è un polo doppio per la funzione $f(z)$ ed è interno a C mentre gli altri poli sono gli zeri del polinomio $z^2 - 4z + 1$, cioè $z_1 = 2 + \sqrt{3}$ e $z_2 = 2 - \sqrt{3}$, ma solo quest'ultimo è interno a C. Quindi applicando il teorema dei residui

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta} d\theta = 2\pi\iota[R(f,0) + R(f, 2-\sqrt{3})].$$

Calcoliamo ora i residui dei poli in questione.
Il residuo in $z = 0$ è:

$$\begin{aligned} R(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{(z^4+1)\iota}{z^2-4z+1} = \\ &= \iota \lim_{z\to 0} \frac{4z^3(z^2-4z+1)-(2z-4)(z^4+1)}{(z^2-4z+1)^2} = 4\iota. \end{aligned}$$

Il residuo in $z = 2 - \sqrt{3}$ è:

$$\begin{aligned} R(f, 2-\sqrt{3}) &= \lim_{z \to 2-\sqrt{3}} \frac{(z^4+1)\iota}{z^2(z-2-\sqrt{3})} = \\ &= \iota \lim_{z \to 2-\sqrt{3}} \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) \frac{1}{z-2-\sqrt{3}} = -\frac{7}{\sqrt{3}}\iota. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta} d\theta = 2\pi\iota \left[4\iota - \frac{7}{\sqrt{3}}\iota\right] = \frac{2\pi}{3}(7\sqrt{3}-12).$$

Esercizio 1.5 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}.$$

Svolgimento. Se $z = e^{\iota\theta}$ allora

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad d\theta = \frac{dz}{\iota z}.$$

Indichiamo inoltre con C la circonferenza del piano complesso avente centro nell'origine e raggio 1.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} &= \oint_C \frac{dz}{\iota z(2+\frac{z^2+1}{2z})^2} = \\ &= \oint_C \frac{dz}{\frac{\iota z}{4z^2}(z^2+4z+1)^2} = \\ &= \oint_C \frac{4z dz}{\iota(z^2+4z+1)^2} = \\ &= \frac{4}{\iota} \oint_C \frac{z dz}{(z^2+4z+1)^2}. \end{aligned}$$

Posto

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}.$$

calcoliamone i poli, che sono

$$z = -2 \pm \sqrt{3}$$

entrambi doppi. Solo $z = -2 + \sqrt{3}$ ha modulo minore di uno, quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4}{\iota}[2\pi\iota R(f, -2+\sqrt{3})] = 8\pi R(f, -2+\sqrt{3}).$$

Il residuo in $z = -2 + \sqrt{3}$ è:

$$\begin{aligned} R(f, -2+\sqrt{3}) &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2} = \\ &= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{z+2+\sqrt{3}-2z}{(z+2+\sqrt{3})^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{24\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Esercizio 1.6 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}.$$

Svolgimento. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}$$

i cui poli sono $z = \pm\iota$ e $z = -1 \pm \iota$, tutti semplici, ma per poter applicare il teorema dei residui devono essere considerati solo i poli aventi parte immaginaria positiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = 2\pi\iota[R(f,\iota) + R(f, -1+\iota)].$$

Calcoliamo i residui in questione.

$$\begin{aligned}
R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota} \frac{1}{(z+\iota)(z^2+2z+2)} = \\
&= \frac{1}{2\iota(-1+2\iota+2)} = \frac{1}{2\iota(1+2\iota)} = \\
&= \frac{1}{2(-2+\iota)} = \frac{1}{2(-2+\iota)}\,\frac{-2-\iota}{-2-\iota} = \frac{-2-\iota}{10}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(f,-1+\iota) &= \lim_{z\to-1+\iota} \frac{1}{(z^2+1)(z+1+\iota)} = \\
&= \frac{1}{[(\iota-1)^2+1]2\iota} = \\
&= \frac{1}{(1-2\iota)2\iota} = \frac{1}{2(2+\iota)} = \\
&= \frac{1}{2(2+\iota)}\,\frac{2-\iota}{2-\iota} = \frac{2-\iota}{10}.
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = 2\pi\iota\left[\frac{-2-\iota+2-\iota}{10}\right] = \frac{2}{5}\pi.$$

Esercizio 1.7 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{2(x^2+1)^2(x^2+4)}.$$

Svolgimento. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{2(z^2+1)^2(z^2+4)}$$

i cui poli sono $z = \pm\iota$, doppi, e $z = \pm 2\iota$, semplici, tuttavia devono essere considerati solo i poli aventi parte immaginaria positiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{2(x^2+1)^2(x^2+4)} = 2\pi\iota[R(f,\iota) + R(f,2\iota)].$$

Calcoliamo i residui in questione.

$$
\begin{aligned}
R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota}\frac{d}{dz}\ \frac{z^2}{2(z+\iota)^2(z^2+4)} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to\iota}\frac{2z(z+\iota)(z^2+4)-[2(z^2+4)+2z(z+\iota)]z^2}{(z+\iota)^3(z^2+4)^2} = \\
&= \lim_{z\to\iota}\frac{z(z^2+4)(z+\iota)-z^2(2z^2+2\iota z+4)}{(z+\iota)^3(z^2+4)^2} = \\
&= \frac{-6-2-2+4}{-72\iota} = \frac{1}{12\iota}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(f,2\iota) &= \lim_{z\to 2\iota}\frac{z^2}{2(z^2+1)^2(z+2\iota)} = \\
&= \frac{-4}{2(-3)^2(4\iota)} = -\frac{1}{18\iota}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2(x^2+1)^2(x^2+4)} = 2\pi\iota\left[\frac{1}{12\iota}-\frac{1}{18\iota}\right] = \frac{\pi}{18}.
$$

Esercizio 1.8 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\cos\pi x}{(x^2+1)^2}dx.
$$

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è pari quindi:

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\cos\pi x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\pi x}{(x^2+1)^2}dx.
$$

Poniamo quindi

$$
f(z) = \frac{e^{\iota\pi z}}{(z^2+1)^2}
$$

e consideriamo che $z=\iota$ è l'unico polo avente parte immaginaria positiva ed è un polo doppio, pertanto

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\cos\pi x}{(x^2+1)^2}dx = \Re e\,[\pi\iota R(f,\iota)].
$$

Calcoliamone il residuo:

$$\begin{aligned} R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota} \frac{d}{dz}\frac{e^{\iota\pi z}}{(z+\iota)^2} = \\ &= \lim_{z\to\iota} \frac{\pi\iota e^{\iota\pi z}(z+\iota) - 2e^{\iota\pi z}}{(z+\iota)^3} = \\ &= \frac{\pi\iota e^{-\pi}(2\iota) - 2e^{-\pi}}{-8\iota} = e^{-\pi}\frac{2\pi+2}{8\iota} = e^{-\pi}\frac{\pi+1}{4\iota}. \end{aligned}$$

Il valore dell'integrale è quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos\pi x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{4}(\pi+1)e^{-\pi}.$$

Esercizio 1.9 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\pi x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx.$$

Svolgimento. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}$$

i cui poli sono $z = \pm\iota$ e $z = -1 \pm \iota$, tutti semplici, ma per poter applicare il teorema dei residui devono essere considerati solo i poli aventi parte immaginaria positiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\pi x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx = \Re e\left\{2\pi\iota[R(f,\iota) + R(f,-1+\iota)]\right\}.$$

Calcoliamo i residui in questione.

$$\begin{aligned} R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota} \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z+\iota)(z^2+2z+2)} = \\ &= \frac{\iota e^{-\pi}}{2\iota(1+2\iota)} = \frac{e^{-\pi}}{2(1+2\iota)}\frac{1-2\iota}{1-2\iota} = \frac{e^{-\pi}}{10}(1-2\iota). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(f,-1+\iota) &= \lim_{z\to -1+\iota} \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z^2+1)(z+1+\iota)} = \\
&= \frac{(-1+\iota)e^{\iota\pi(\iota-1)}}{2\iota(1-2\iota)} = \\
&= \frac{(1-\iota)e^{-\pi}}{2(2+\iota)}\,\frac{2-\iota}{2-\iota} = \\
&= \frac{(2+\iota-1-2\iota)e^{-\pi}}{10} = \frac{e^{-\pi}}{10}(1-\iota).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos\pi x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}dx &= \Re e\left\{2\pi\iota\left[\frac{e^{-\pi}}{10}(1-2\iota)+\frac{e^{-\pi}}{10}(1-\iota)\right]\right\} = \\
&= \frac{3}{10}\pi e^{-\pi}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.10 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2\pi x}{(x^2+2x+5)(x^2+1)}dx.$$

Svolgimento. Poniamo

$$f(z) = \frac{ze^{2\pi\iota z}}{(z^2+2z+5)(z^2+1)}$$

e osserviamo che i poli di f, tutti semplici, sono $\pm\iota$ e $-1\pm 2\iota$, tuttavia solo $z=\iota$ e $z=-1+2\iota$ hanno parte immaginaria strettamente positiva. L'integrale vale quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2\pi x dx}{(x^2+2x+5)(x^2+1)} = \Im m\{2\pi\iota[R(f,\iota)+R(f,-1+2\iota)]\}.$$

Calcoliamo ora i residui:

$$\begin{aligned}
R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota} \frac{ze^{2\pi\iota z}}{(z+\iota)(z^2+2z+5)} = \\
&= \frac{\iota e^{-2\pi}}{(2\iota)(4+2\iota)} = \frac{e^{-2\pi}}{4(2+\iota)}\,\frac{2-\iota}{2-\iota} = \frac{e^{-2\pi}}{20}(2-\iota).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(f,-1+2\iota) &= \lim_{z\to -1+2\iota} \frac{ze^{2\pi\iota z}}{(z^2+1)(z+1+2\iota)} = \\
&= \frac{(-1+2\iota)e^{2\iota\pi(2\iota-1)}}{(-3-4\iota+1)(1-2\iota)} = \\
&= \frac{(-1+2\iota)e^{-4\pi}}{8(2-\iota)}\ \frac{2+\iota}{2+\iota} = \\
&= \frac{e^{-4\pi}}{40}(-2+\iota+4\iota-2) = \frac{e^{-4\pi}}{40}(5\iota-4).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2\pi x\ dx}{(x^2+2x+5)(x^2+1)} &= \Im m\left\{2\pi\iota\left[\frac{e^{-2\pi}}{20}(2-\iota)+\frac{e^{-4\pi}}{40}(5\iota-4)\right]\right\} = \\
&= \frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}-e^{-4\pi}).
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.11 *Calcolare il seguente integrale reale utilizzando il teorema dei residui*

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\pi x}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2-2x+2)}dx.
$$

Svolgimento. Poniamo

$$
f(z) = \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z^2+1)(z^2+4)(z^2-2z+2)}
$$

e osserviamo che i poli di f, tutti semplici, sono $\pm\iota$, $\pm 2\iota$ e $1\pm\iota$, tuttavia solo $z=\iota$, $z=2\iota$ e $z=1+\iota$ hanno parte immaginaria strettamente positiva. Il valore dell'integrale è quindi

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\pi x\ dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2-2x+2)} = \Im m\{2\pi\iota[R(f,\iota)+R(f,2\iota)+R(f,1+\iota)]\}.
$$

Calcoliamo ora i residui:

$$
\begin{aligned}
R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota} \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z+\iota)(z^2+4)(z^2-2z+2)} = \\
&= \frac{\iota e^{-\pi}}{(2\iota)(3)(1-2\iota)} = \frac{e^{-\pi}}{1-2\iota} = \\
&= \frac{\iota e^{-\pi}}{6(1-2\iota)} \frac{(1+2\iota)}{(1+2\iota)} = \\
&= \frac{e^{-\pi}}{30}(1+2\iota). \\
R(f,2\iota) &= \lim_{z\to 2\iota} \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z+2\iota)(z^2+1)(z^2-2z+2)} = \\
&= \frac{2\iota e^{-2\pi}}{(4\iota)(-3)(-2-4\iota)} = \frac{e^{-2\pi}}{12(1+2\iota)} = \\
&= \frac{\iota e^{-2\pi}}{12(1+2\iota)} \frac{(1-2\iota)}{(1-2\iota)} = \\
&= \frac{e^{-2\pi}}{60}(1-2\iota). \\
R(f,1+\iota) &= \lim_{z\to 1+\iota} \frac{ze^{\pi\iota z}}{(z^2+4)(z^2+1)(z-1+\iota)} = \\
&= \frac{(1+\iota)e^{\pi(\iota-1)}}{(2\iota+1)(2\iota+4)(2\iota)} = \\
&= \frac{-(1+\iota)e^{-\pi}}{2(\iota-2)(2\iota+4)} = \\
&= \frac{-(1+\iota)e^{-\pi}}{4(\iota-2)(\iota+2)} = \frac{e^{-\pi}}{20}(1+\iota).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x \; dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2-2x+2)} &= \Im m \left\{ 2\pi\iota \left[\frac{e^{-2\pi}}{60}(1-2\iota) + \frac{e^{-\pi}}{20}(1+\iota) + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{e^{-\pi}}{20}(1+\iota) \right] \right\} = \\
&= 2\pi \left[\frac{e^{-\pi}}{30} + \frac{e^{-2\pi}}{60} + \frac{e^{-\pi}}{20} \right] = \\
&= \frac{\pi}{30}(5e^{-\pi} + e^{-2\pi})
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.12 *Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine:*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = \cosh t$$

dove $Y(t)$ *è una funzione soggetta alle seguenti condizioni iniziali* $Y(0) = 1$ *e* $Y'(0) = -1$.

Svolgimento. Poniamo $y(s) = L[Y(t)]$ e applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale:

$$L[Y''(t)] - 3L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = L[\cosh t],$$

da cui

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 3(sy(s) - Y(0)) + 2y(s) = \frac{s}{s^2-1}.$$

Sostituendo le condizioni iniziali e mettendo in evidenza $y(s)$:

$$(s^2 - 3s + 2)y(s) - s + 1 + 3 = \frac{s}{s^2-1}$$

$$(s^2 - 3s + 2)y(s) = s - 4 + \frac{s}{s^2-1} = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2-1}.$$

In questo modo si ricava $y(s)$:

$$y(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s^2 - 3s + 2)(s^2 - 1)}$$

Gli zeri del polinomio $s^2 - 3s + 2$ sono 2 e 1 pertanto $y(s)$ ha $s = 1$ come polo doppio ed $s = -1$ e $s = 2$ come poli semplici ed ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}.$$

Calcoliamo ora i coefficienti A, B, C e D:

$$A = R(y(s), -1) = \lim_{s \to -1} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-2)(s-1)^2} = \frac{1}{12};$$

$$B = R(y(s), 2) = \lim_{s \to 2} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s+1)(s-1)^2} = -\frac{4}{3};$$

$$\begin{aligned} C = R(y(s), 1) \quad &= \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-2)(s+1)} = \lim_{s \to 1} \frac{d}{ds} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 - s - 2} = \\ &= \lim_{s \to 1} \frac{(3s^2 - 8s)(s^2 - s - 2) - (2s - 1)(s^3 - 4s^2 + 4)}{(s^2 - s - 2)^2} = \frac{9}{4}; \end{aligned}$$

$$D = R((s-1)y(s), 1) = \lim_{s \to 1} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-2)(s+1)} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi la scomposizione di $y(s)$ è

$$y(s) = \frac{1}{12(s+1)} - \frac{4}{3(s-2)} - \frac{9}{4(s-1)} - \frac{1}{2(s-1)^2}$$

e la soluzione è:

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \frac{1}{12} e^{-t} - \frac{4}{3} e^{2t} - \frac{9}{4} e^t - \frac{1}{2} t e^t.$$

Esercizio 1.13 *Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine:*

$$Y''(t) - 2Y'(t) + 2Y(t) = t^2$$

dove $Y(t)$ è una funzione soggetta alle seguenti condizioni iniziali $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = 1$.

Svolgimento. Poniamo $y(s) = L[Y(t)]$ e applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale:

$$L[Y''(t)] - 2L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = L[t^2]$$

da cui

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) - 2sy(s) + 2Y(0)2 + y(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Sostituendo le condizioni iniziali e mettendo in evidenza $y(s)$:

$$(s^2 - 2s + 2)y(s) = 1 + \frac{2}{s^3} = \frac{s^3 + 2}{s^3},$$

ricaviamo ora $y(s)$:

$$y(s) = \frac{s^3 + 2}{s^3(s^2 - 2s + 2)}.$$

La funzione $y(s)$ presenta $s = 0$ come polo triplo e $s = 1 \pm \iota$, poli complessi coniugati, pertanto se tra questi ultimi scegliamo $1 + \iota$, allora ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{2D(s-1)}{(s-1)^2 + 1} - \frac{2E}{(s-1)^2 + 1}.$$

Calcoliamo ora i coefficienti incogniti.

$$\begin{aligned}
A &= R(y(s), 0) = \frac{1}{2} \lim_{s \to 0} \frac{d^2}{ds^2} \; \frac{s^3 + 2}{s^2 - 2s + 2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \; \frac{3s^2(s^2 - 2s + 2) - (2s - 2)(s^3 + 2)}{(s^2 - 2s + 2)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \; \frac{3s^4 - 6s^3 + 6s^3 - (2s^4 + 4s - 2s^3 - 4)}{(s^2 - 2s + 2)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \; \frac{s^4 - 4s^3 + 6s^2 - 4s + 4}{(s^2 - 2s + 2)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{s \to 0} \frac{(4s^3 - 12s^2 + 12s - 4)(s^2 - 2s + 2) - 2(2s - 2)(s^4 - 4s^3 + 6s^2 - 4s + 4)}{(s^2 - 2s + 2)^3} = \\
&= \frac{-8 + 16}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B \quad &= R(sy(s),0) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\ \frac{s^3+2}{s^2-2s+2} = \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{s^4-4s^3+6s^2-4s+4}{(s^2-2s+2)^2} = 1 \\
C \quad &= R(s^2y(s),0) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3+2}{s^2-2s+2} = 1 \\
D+\iota E \quad &= R(y(s),1+\iota) = \lim_{s\to 1+\iota} \frac{s^3+2}{s^3(s-1+\iota)} = \\
&= \frac{(1+\iota)^3+2}{(1+\iota)^3(2\iota)} = \frac{-2+2\iota+2}{(-2+2\iota)(2\iota)} = \\
&= \frac{1}{2(-1+\iota)}\frac{(-1-\iota)}{(-1-\iota)} = -\frac{1}{4} - \frac{\iota}{4}.
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'espressione di $y(s)$:

$$
y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2+1}.
$$

Antitrasformando:

$$
Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \frac{1}{2} + t + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}e^t\cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t.
$$

Esercizio 1.14 *Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale del terzo ordine:*

$$
Y'''(t) + Y''(t) = \cos t
$$

dove $Y(t)$ *è una funzione soggetta alle seguenti condizioni iniziali* $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$ *e* $Y''(0) = 2$.

Svolgimento. Poniamo $y(s) = L[Y(t)]$ e applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale:

$$
L[Y'''(t)] + L[Y''(t)] = L[\cos t],
$$

da cui

$$s^3y(s) - s^2Y(0) - sY'(0) - Y''(0) + s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Sostituendo le condizioni iniziali e mettendo in evidenza $y(s)$:

$$(s^3+s^2)y(s) - s - 2 - 1 = \frac{s}{s^2+1}$$

$$s^2(s+1)y(s) = s + 3 + \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^3+3s^2+2s+3}{s^2+1}.$$

Da quest'ultima equazione si ricava $y(s)$:

$$y(s) = \frac{s^3+3s^2+2s+3}{s^2(s+1)(s^2+1)}$$

La funzione $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{2D(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2E\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

dove $\alpha + \iota\beta$ è un polo complesso di $y(s)$, in questo caso scegliamo il polo ι quindi $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. L'espressione di $y(s)$ diventa:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{2Ds}{s^2+1} - \frac{2E}{s^2+1}.$$

I coefficienti sono particolari residui:

$$A \;= R(y(s),0) = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\,\frac{s^3+3s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+1)} = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\,\frac{s^3+3s^2+2s+3}{s^3+s^2+s+1} =$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{(3s^2+6s+2)(s^3+s^2+s+1) - (3s^2+2s+1)(s^3+3s^2+2s+3)}{(s^3+s^2+s+1)^2} = -1$$

$$B = R(sy(s),0) = \lim_{s\to 0}\frac{s^3+3s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+1)} = 3$$

$$C = R(y(s),-1) = \lim_{s\to -1}\frac{s^3+3s^2+2s+3}{s^2(s^2+1)} = \frac{3}{2}$$

$$D + \iota E \quad = R(y(s), \iota) = \lim_{s \to \iota} \frac{s^3 + 3s^2 + 2s + 3}{s^2(s+1)(s+\iota)} =$$

$$= \frac{-\iota - 3 + 2\iota + 3}{(-1)(1+\iota)(2\iota)} = -\frac{1}{1+\iota}\,\frac{1-\iota}{1-\iota} = -\frac{1}{4} + \frac{\iota}{4}$$

Sostituendo i coefficienti si ha

$$y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{3}{2(s+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)} - \frac{1}{2(s^2+1)}$$

pertanto la soluzione è:

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = 3t - 1 + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Esercizio 1.15 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y'''(t) - Y'(t) = F(t), \qquad Y(0) = 0, \qquad Y'(0) = 2, \qquad Y''(0) = -1$$

dove $F(t)$ è una funzione che ammette trasformata di Laplace.

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y'''(t)] - L[Y'(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e $f(s) = L[F(t)]$, si ha

$$s^3 y(s) - s^2 Y(0) - sY'(0) - Y''(0) - sy(s) + Y(0) = f(s).$$

Sostituendo le condizioni iniziali:

$$(s^3 - s)y(s) = 2s - 1 + f(s)$$

quindi

$$y(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s+1)} + \frac{f(s)}{s(s-1)(s+1)}.$$

Osserviamo che possiamo trasformare in fratti semplici il primo addendo a secondo membro, in quanto è indipendente da $F(t)$, per il secondo addendo possiamo scomporre in fratti la funzione che non dipende da $f(s)$ e per antitrasformare il risultato applichiamo il teorema di convoluzione. Quindi poniamo, per semplicità:

$$g(s) = \frac{2s-1}{s(s-1)(s+1)}$$

e

$$h(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+1)}$$

e scomponiamo singolarmente le due funzioni:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1},$$

dove

$$A = R(g(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{2s-1}{s^2-1} = 1$$

$$B = R(g(s), 1) = \lim_{s\to 1} \frac{2s-1}{s(s+1)} = \frac{1}{2}$$

$$C = R(g(s), -1) = \lim_{s\to -1} \frac{2s-1}{s(s-1)} = -\frac{3}{2}.$$

Procediamo analogamente per $h(s)$:

$$h(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1},$$

dove

$$A = R(h(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2-1} = -1$$

$$B = R(h(s), 1) = \lim_{s\to 1} \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{2}$$

$$C = R(h(s), -1) = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{3}{2(s+1)} + -\frac{f(s)}{s} + \frac{f(s)}{2(s-1)} + \frac{f(s)}{2(s+1)}$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$\begin{aligned} Y(t) &= 1+\frac{1}{2}e^t-\frac{3}{2}e^{-t}-F(t)*1++\frac{1}{2}F(t)*e^t+\frac{1}{2}F(t)*e^{-t}= \\ &= 1+\frac{1}{2}e^t-\frac{3}{2}e^{-t}-\int_0^t F(u)du+\frac{1}{2}\int_0^t F(u)e^{t-u}du+ \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^t F(u)e^{-(t-u)}du. \end{aligned}$$

Esercizio 1.16 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y'''(t)-2Y''(t)+10Y'(t)=-tF(t), \qquad Y(0)=Y'(0)=-1, \qquad Y''(0)=2$$

dove $F(t)$ è una funzione che ammette trasformata di Laplace $f(s)$ funzione di classe $\mathcal{C}^{(1)}$ per ogni s reale.

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y'''(t)]-2L[Y''(t)]+10L[Y'(t)]=-L[tF(t)]$$

da cui, posto $y(s)=L[Y(t)]$ e $f(s)=L[F(t)]$, si ha

$$s^3y(s)-s^2Y(0)-sY'(0)-Y''(0)-2s^2y(s)+2sY(0)+Y'(0)+10sy(s)-10Y(0)=f'(s).$$

Sostituendo le condizioni iniziali:

$$s(s^2-2s+10)y(s)+s^2+s-2-2s-2+10=f'(s)$$

$$s(s^2-2s+10)y(s)=-s^2+s-6+f'(s)$$

quindi

$$y(s)=\frac{-s^2+s-6}{s(s^2-2s+10)}+\frac{f'(s)}{s(s^2-2s+10)}.$$

Poniamo, per semplicità:

$$g(s)=\frac{-s^2+s-6}{s(s^2-2s+10)}$$

e

$$h(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 10)}$$

e scomponiamo singolarmente le due funzioni. Osserviamo che entrambe hanno gli stessi poli $s = 0$, semplice, e $s = 1 \pm 3\iota$, poli complessi coniugati. Se scegliamo $s = 1 + 3\iota$ allora $g(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s-1)}{(s-1)^2 + 9} - \frac{6C}{(s-1)^2 + 9},$$

dove

$$A = R(g(s), 0) = \lim_{s \to 0} \frac{-s^2 + s - 6}{s^2 - 2s + 10} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}
B + \iota C &= R(g(s), 1 + 3\iota) = \lim_{s \to 1+3\iota} \frac{-s^2 + s - 6}{s(s - 1 + 3\iota)} = \\
&= \frac{8 - 6\iota + 1 + 3\iota - 6}{(1 + 3\iota)6\iota} = \frac{3 - 3\iota}{(1 + 3\iota)6\iota} = \\
&= \frac{1 - \iota}{2(-3 + \iota)} = \frac{1 - \iota}{2(-3 + \iota)} \frac{-3 - \iota}{-3 - \iota} = \\
&= \frac{1}{20}(-3 - \iota + 3\iota - 1) = -\frac{1}{5} + \frac{\iota}{10}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$g(s) = -\frac{3}{5s} - \frac{2(s-1)}{5[(s-1)^2 + 9]} - \frac{3}{5[(s-1)^2 + 9]}.$$

Procediamo analogamente per $h(s)$:

$$h(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s-1)}{(s-1)^2 + 9} - \frac{6C}{(s-1)^2 + 9},$$

dove

$$A = R(h(s), 0) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 - 2s + 10} = \frac{1}{10}$$

$$
\begin{aligned}
B+\iota C &= R(h(s),1+3\iota)=\lim_{s\to 1+3\iota}\frac{1}{s(s-1+3\iota)}=\\
&=\frac{1}{(1+3\iota)6\iota}=\frac{1}{6(-3+\iota)}=\\
&=\frac{1}{6(-3+\iota)}\frac{-3-\iota}{-3-\iota}=\frac{1}{60}(-3-\iota)=\\
&=-\frac{1}{20}-\frac{\iota}{60}.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
h(s)=\frac{1}{10s}-\frac{s-1}{10[(s-1)^2+9]}+\frac{1}{10[(s-1)^2+9]},
$$

da cui, si ottiene la scomposizione di $y(s)$:

$$
\begin{aligned}
y(s)= \quad & -\frac{3}{5s}-\frac{2(s-1)}{5[(s-1)^2+9]}-\frac{3}{5[(s-1)^2+9]}+\frac{f'(s)}{10s}+\\
& -\frac{f'(s)(s-1)}{10[(s-1)^2+9]}+\frac{f'(s)}{10[(s-1)^2+9]}.
\end{aligned}
$$

Applicando opportunamente il teorema di convoluzione si ottiene la soluzione $Y(t)$:

$$
\begin{aligned}
Y(t) \quad &= \quad -\frac{3}{5}-\frac{2}{5}e^t\cos 3t+\frac{3}{5}e^t\sin 3t-\frac{1}{10}(tF(t))*1+\\
&\quad +\frac{1}{10}(tF(t))*(e^t\cos 3t)-\frac{1}{30}(tF(t))*(e^t\sin 3t)=\\
&= \quad -\frac{3}{5}-\frac{2}{5}e^t\cos 3t+\frac{3}{5}e^t\sin 3t-\frac{1}{10}\int_0^t uF(u)du+\\
&\quad +\frac{1}{10}\int_0^t uF(u)e^{t-u}\cos 3(t-u)du+\\
&\quad -\frac{1}{30}\int_0^t uF(u)e^{t-u}\sin 3(t-u)du.
\end{aligned}
$$

Esercizio 1.17 *Utilizzare le trasformate di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale:*

$$Y''(t) + Y'(t) = F(t), \qquad Y(0) = 1,\ Y'(0) = -1$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t < 1 \\ 0 & t \geq 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] + L[Y'(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) = L[F(t)]$$

$$s(s+1)y(s) - s + 1 - 1 = L[F(t)]$$

A questo punto si può calcolare la trasformata di Laplace della funzione $F(t)$ applicando direttamente la definizione:

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \\ &= 2\int_0^1 e^{-st}dt = \frac{2(1-e^{-s})}{s}. \end{aligned}$$

L'equazione algebrica diventa

$$s(s+1)y(s) = s + \frac{2-2e^{-s}}{s} = \frac{s^2+2-2e^{-s}}{s}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^2+2}{s^2(s+1)} - \frac{2e^{-s}}{s^2(s+1)}.$$

Poniamo per comodità

$$g(s) = \frac{s^2+2}{s^2(s+1)}$$

e

$$h(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

e scomponiamo le due funzioni in fratti semplici. Entrambe ammettono un polo doppio $s = 0$ e un polo semplice $s = -1$:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R(g(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\ \frac{s^2+2}{s+1} = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{2s(s+1) - s^2 - 2}{(s+1)^2} = -2 \end{aligned}$$

$$B = R(sg(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+2}{s+1} = 2$$

$$C = R(g(s), -1) = \lim_{s\to -1} \frac{s^2+2}{s^2} = 3$$

Procediamo analogamente per $h(s)$:

$$h(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

dove

$$A = R(h(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\ \frac{1}{s+1} = -\frac{1}{(s+1)^2} = -1$$

$$B = R(sh(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

$$C = R(h(s), -1) = \lim_{s\to -1} \frac{1}{s^2} = 1.$$

Quindi

$$y(s) = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s+1}e^{-s}$$

L'antitrasformata delle funzioni dove compare il fattore e^{-s} è data dalle seguenti funzioni a tratti:

$$L^{-1}\left[\frac{2e^{-s}}{s}\right] = \begin{cases} 2 & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{2e^{-s}}{s^2}\right] = \begin{cases} 2(t-1) & t \geq 1 \\ \\ 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{2e^{-s}}{s+1}\right] = \begin{cases} 2e^{-(t-1)} & t \geq 1 \\ \\ 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$

La soluzione $Y(t)$ è quindi:

$$Y(t) = \begin{cases} -2 + 2t + 3e^{-t} & 0 < t < 1 \\ \\ -2 + 2t + 3e^{-t} + 2 - 2(t-1) - 2e^{-(t-1)} & t \geq 1 \end{cases}$$

da cui semplificando ulteriormente:

$$Y(t) = \begin{cases} -2 + 2t + 3e^{-t} & 0 < t < 1 \\ \\ 2 + 3e^{-t} - 2e^{-(t-1)} & t \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 1.18 *Risolvere la seguente equazione differenziale del secondo ordine utilizzando le trasformate di Laplace:*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = F(t)$$

soggetta alle seguenti condizioni iniziali $Y(0) = 1, Y'(0) = 0$, *e dove* $F(t)$ *è la funzione così definita:*

$$F(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 2 \\ \\ 0 & 0 < t < 2. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 3L[Y'(t)] + 2L[Y(t)] = L[F(t)]$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ si ha

$$s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) - 3sy(s) + 3Y(0) + 2y(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$(s^2-3s+2)y(s)+s-2-3=\frac{e^{-2s}}{s}.$$

L'equazione algebrica diventa

$$(s^2-3s+2)y(s)=-s+5+\frac{e^{-2s}}{s}=\frac{-s+5+e^{-2s}}{s}$$

da cui

$$y(s)=\frac{-s+5}{s^2-3s+2}-\frac{e^{-2s}}{s(s^2-3s+2)}.$$

Poniamo per comodità

$$g(s)=\frac{-s+5}{s^2-3s+2}$$

e

$$h(s)=\frac{1}{s(s^2-3s+2)}$$

e scomponiamo le due funzioni in fratti semplici. La funzione $g(s)$ ammette due poli semplici $s=1$ ed $s=2$:

$$g(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}$$

dove

$$A=R(g(s),1)=\lim_{s\to1}\frac{-s+5}{s-2}=-4$$

$$B=R(g(s),2)=\lim_{s\to2}\frac{-s+5}{s-1}=3$$

Procediamo analogamente per $h(s)$:

$$h(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

dove

$$A=R(h(s),0)=\lim_{s\to0}\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{2}$$

$$B=R(h(s),1)=\lim_{s\to1}\frac{1}{s(s-2)}=-1$$

$$C=R(h(s),2)=\lim_{s\to2}\frac{1}{s(s-1)}=\frac{1}{2}.$$

Quindi
$$y(s) = -\frac{4}{s-1} + \frac{3}{s-2} + +\frac{e^{-2s}}{2s} - \frac{e^{-2s}}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{2(s-2)}$$
L'antitrasformata delle funzioni dove compare il fattore e^{-2s} è data dalle seguenti funzioni a tratti:
$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{2s}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \geq 2 \\ 0 & 0 < t < 2 \end{cases}$$
$$L^{-1}\left[-\frac{e^{-2s}}{s-1}\right] = \begin{cases} -e^{t-2} & t \geq 2 \\ 0 & 0 < t < 2. \end{cases}$$
$$L^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{2(s+1)}\right] = \begin{cases} \frac{e^{2(t-2)}}{2} & t \geq 2 \\ 0 & 0 < t < 2. \end{cases}$$
La soluzione $Y(t)$ è quindi:
$$Y(t) = \begin{cases} -4e^t + 3e^{2t} & 0 < t < 2 \\ -4e^t + 3e^{2t} + \frac{1}{2} - e^{t-2} + \frac{e^{2(t-2)}}{2} & t \geq 2. \end{cases}$$

Esercizio 1.19 *Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere il seguente problema ai limiti:*
$$\begin{cases} Y''(t) + 4Y(t) = \cos t \\ Y(0) = 1 \qquad Y(\pi/4) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Poniamo $y(s) = L[Y(t)]$ e applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione differenziale:
$$L[Y''(t)] + 4L[Y(t)] = L[\cos t],$$
$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4y(s) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Poniamo $A = Y'(0)$ e procediamo come al solito:

$$(s^2+4)y(s) = s + A + \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^3 + As^2 + 2s + A}{s^2+1}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^3 + As^2 + 2s + A}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

La funzione ammette 2 coppie di poli complessi coniugati tra i quali noi scegliamo $s = \iota$ e $s = 2\iota$ pertanto $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{2Bs}{s^2+1} - \frac{2C}{s^2+1} + \frac{2Ds}{s^2+4} - \frac{4E}{s^2+4},$$

dove

$$\begin{aligned} B + \iota C &= R(y(s), \iota) = \lim_{s\to\iota} \frac{s^3 + As^2 + 2s + A}{(s^2+4)(s+\iota)} = \\ &= \frac{-\iota - A + 2\iota + A}{6\iota} = \frac{1}{6} \\ D + \iota E &= R(y(s), 2\iota) = \lim_{s\to 2\iota} \frac{s^3 + As^2 + 2s + A}{(s+2\iota)(s^2+1)} = \\ &= \frac{-8\iota - 4A + 4\iota + A}{-12\iota} = \frac{1}{3} - \frac{A}{4}\iota. \end{aligned}$$

$$y(s) = \frac{s}{3(s^2+1)} + \frac{2s}{3(s^2+4)} + \frac{A}{s^2+4},$$

pertanto la soluzione è:

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t + \frac{A}{2}\sin 2t.$$

Per calcolare la costante A imponiamo la condizione di coincidenza in $\pi/4$:

$$Y(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{A}{2} = 0$$

da cui segue $A = -\sqrt{2}/3$ e quindi la soluzione è:

$$Y(t) = \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{6}\sin 2t.$$

Esercizio 1.20 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} Y'(t) - Z'(t) = \sin t \\ \\ Y''(t) + 2Z'(t) + Z(t) = 0 \\ \\ Y(0) = Y'(0) = Z(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema:

$$\begin{cases} L[Y'(t)] - L[Z'(t)] = L[\sin t] \\ \\ L[Y''(t)] + 2L[Z'(t)] + L[Z(t)] = 0 \end{cases}$$

Poniamo, come al solito, $z(s) = L[Z(t)]$ e $y(s) = L[Y(t)]$ e teniamo conto che tutte le condizioni iniziali sono nulle:

$$\begin{cases} sy(s) - sz(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ \\ s^2 y(s) + 2sz(s) + z(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sy(s) - sz(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ \\ s^2 y(s) + (2s+1)z(s) = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema lineare decidiamo di utilizzare la regola di Cramer. Calcoliamo prima il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} s & -s \\ s^2 & 2s+1 \end{pmatrix} = s(2s+1) + s^3 = s(s+1)^2$$

quindi

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2+1} & -s \\ \\ 0 & 2s+1 \end{vmatrix}}{s(s+1)^2} = \\ \\ &= \frac{2s+1}{s(s+1)^2(s^2+1)}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{2Ds}{s^2+1} - \frac{2E}{s^2+1}$$

dove

$$A = R(y(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{2s+1}{(s+1)^2(s^2+1)} = 1$$

$$\begin{aligned} B \quad &= R(y(s), -1) = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\ \frac{2s+1}{s(s^2+1)} = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\ \frac{2s+1}{s^3+s} = \\ &= \lim_{s\to -1} \frac{2(s^3+s)-(3s^2+1)(2s+1)}{(s^3+s)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$C = R((s+1)y(s), -1) = \lim_{s\to -1} \frac{2s+1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} D + \iota E \quad &= R(y(s), \iota) = \lim_{s\to \iota} \frac{2s+1}{s(s^2+2s+1)(s+\iota)} = \\ &= \frac{2\iota+1}{(\iota)(2\iota)(2\iota)} = -\frac{1}{2} + \frac{\iota}{4} \end{aligned}$$

Pertanto

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{2(s+1)^2} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2(s^2+1)}$$

La soluzione è

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = 1 + \frac{1}{2}te^{-t} - \cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per $z(s)$:

$$\begin{aligned} z(s) \quad &= \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{1}{s^2+1} \\ & \\ s^2 & 0 \end{vmatrix}}{s(s+1)^2} = \\ &= -\frac{s^2}{s(s+1)^2(s^2+1)} = -\frac{s}{(s+1)^2(s^2+1)}. \end{aligned}$$

La funzione $z(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$z(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{2Cs}{s^2+1} - \frac{2D}{s^2+1}$$

dove

$$A = R(z(s), -1) = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{-s}{s^2+1} = \lim_{s \to -1} \frac{-(s^2+1)+2s^2}{(s^2+1)^2} = 0$$

$$B = R((s+1)z(s), -1) = \lim_{s \to -1} \frac{-s}{s^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$C + \iota D = R(y(s), \iota) = \lim_{s \to \iota} \frac{-s}{(s^2+2s+1)(s+\iota)} = \frac{\iota}{4}.$$

Quindi

$$z(s) = \frac{1}{2(s+1)^2} - \frac{1}{2(s^2+1)}$$

pertanto la seconda componente della soluzione del sistema differenziale è:

$$Z(t) = \frac{1}{2} t e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$$

Esercizio 1.21 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t) = t + \frac{1}{6} \int_0^t (t-u)^3 Y(u) du.$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integrale ponendo $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y(t)] = L[t] + L\left[\frac{1}{6} \int_0^t (t-u)^3 Y(u) du\right].$$

Applicando il teorema di convoluzione abbiamo che il secondo addendo a secondo membro è proprio la convoluzione tra le funzioni $G(t) = t^3$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni t^3 e $Y(t)$:

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{y(s)}{s^4}$$

quindi

$$y(s)\Big(1-\frac{1}{s^4}\Big)=\frac{1}{s^2}$$

da cui

$$y(s)=\frac{s^2}{s^4-1}=\frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}.$$

La funzione $y(s)$ ha i poli reali ± 1 e i poli complessi coniugati $\pm\iota$. Se tra questi ultimi scegliamo $s=\iota$ allora $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s)=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{2Cs}{s^2+1}-\frac{2D}{s^2+1}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A=R(y(s),1)=\lim_{s\to 1}\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{4}$$

$$B=R(y(s),-1)\lim_{s\to -1}\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}=-\frac{1}{4}$$

$$C+\iota D=R(y(s),\iota)=\lim_{s\to\iota}\frac{s^2}{(s^2-1)(s+\iota)}=-\frac{\iota}{4}.$$

Sostituendo i quattro coefficienti si ricava:

$$y(s)=\frac{1}{4(s-1)}-\frac{1}{4(s+1)}+\frac{1}{2(s^2+1)}$$

e quindi

$$Y(t)=L^{-1}[y(s)]=\frac{e^t}{4}-\frac{e^{-t}}{4}+\frac{1}{2}\sin t.$$

Esercizio 1.22 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t)=t+2\int_0^t\cos(t-u)Y(u)du.$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integrale ponendo $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y(t)] = L[t] + L\left[2\int_0^t \cos(t-u)Y(u)du\right].$$

Applicando il teorema di convoluzione abbiamo che il secondo addendo a secondo membro è proprio la convoluzione tra le funzioni $G(t) = \cos t$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni t^3 e $Y(t)$:

$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2sy(s)}{s^2+1}$$

quindi

$$y(s)\left(1 - \frac{2s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s-1)^2}.$$

La funzione $y(s)$ ha i poli doppi 0 e 1 pertanto ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A \quad = R(y(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\ \frac{s^2+1}{(s-1)^2} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{2s(s-1) - 2(s^2+1) - 2(s^+1)}{(s^2-1)^3} = 2$$

$$B = R(sy(s), 0) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+1}{(s^2-1)^2} = 1$$

$$C \quad = R(y(s), 1) = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\ \frac{s^2+1}{s^2} =$$

$$= \lim_{s\to 1} \frac{2s^2 - 2(s^2+1)}{s^3} = -2$$

$$D = R(sy(s), 1) = \lim_{s \to 1} \frac{s^2+1}{s^2} = 2$$

Sostituendo i quattro coefficienti si ricava:

$$y(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}.$$

e quindi

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = 2 + t - 2e^t + 2te^t.$$

Esercizio 1.23 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale*

$$Y'(t) = 1 + t + 8\int_0^t (t-u)^2 Y(u)du$$

con $Y(0) = 1$.

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integro-differenziale ponendo $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y'(t)] = L[1] + L[t] + 8L\left[\int_0^t (t-u)^2 Y(u)du\right].$$

Applicando il teorema di convoluzione abbiamo che il secondo addendo a secondo membro è proprio la convoluzione tra le funzioni $G(t) = t^2$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni t^2 e $Y(t)$:

$$sy(s) - 1 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{16y(s)}{s^3}$$

quindi

$$y(s)\left(s - \frac{16}{s^3}\right) = 1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s^2+s+1}{s^2}.$$

$$y(s)\left(\frac{s^4-16}{s^3}\right) = \frac{s^2+s+1}{s^2}.$$

da cui

$$y(s) = \frac{s(s^2+s+1)}{s^4-16} = \frac{s(s^2+s+1)}{(s-2)(s+2)(s^2+4)}.$$

La funzione $y(s)$ ha i poli reali ± 2 e i poli complessi coniugati $\pm 2\iota$. Se tra questi ultimi scegliamo $s = 2\iota$ allora $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} + \frac{2Cs}{s^2+4} - \frac{4D}{s^2+4}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A = R(y(s), 2) = \lim_{s \to 2} \frac{s(s^2+s+1)}{(s+2)(s^2+4)} = \frac{7}{16}$$

$$B = R(y(s), -2) = \lim_{s \to -2} \frac{s(s^2+s+1)}{(s-2)(s^2+4)} = \frac{3}{16}$$

$$C + \iota D \quad = R(y(s), 2\iota) = \lim_{s \to 2\iota} \frac{s(s^2+s+1)}{(s^2-4)(s+2\iota)} =$$

$$= \frac{(2\iota)(-3+2\iota)}{(-8)(4\iota)} = -\frac{1}{16}(-3+2\iota).$$

Sostituendo i quattro coefficienti si ricava:

$$y(s) = \frac{7}{16(s-2)} + \frac{3}{16(s+1)} + \frac{3s}{8(s^2+4)} + \frac{1}{2(s^2+4)}$$

e quindi

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \frac{7}{16}e^{2t} + \frac{3}{16}e^{-2t} + \frac{3}{8}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$