Capitolo 3

La Trasformata di Laplace

3.1. Introduzione

Definizione 3.1.1 *Sia $F(t)$ una funzione definita per $t > 0$. Si dice* Trasformata di Laplace *di $F(t)$, ed è indicata con $L[F(t)]$, la seguente*

$$L[F(t)] = f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt, \tag{3.1}$$

con s parametro reale. Diremo che la Trasformata di Laplace $L[F(t)]$ *esiste* se l'integrale in (3.1) esiste per qualche valore di s. Altrimenti diremo che la trasformata non esiste.

Definizione 3.1.2 *Una funzione $F(t)$ è detta* generalmente continua *nell'intervallo $[a, b]$ se questo può essere suddiviso in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua ed ammette limite destro e sinistro finiti.*

Definizione 3.1.3 *Se esistono due numeri reali γ, M, con $M > 0$, e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|e^{-\gamma t} F(t)| < M \quad \left(|F(t)| < M e^{\gamma t}\right), \qquad \textit{per ogni } t \geq t_0$$

allora diremo che $F(t)$ è una funzione di ordine esponenziale *γ per t che tende a $+\infty$.*

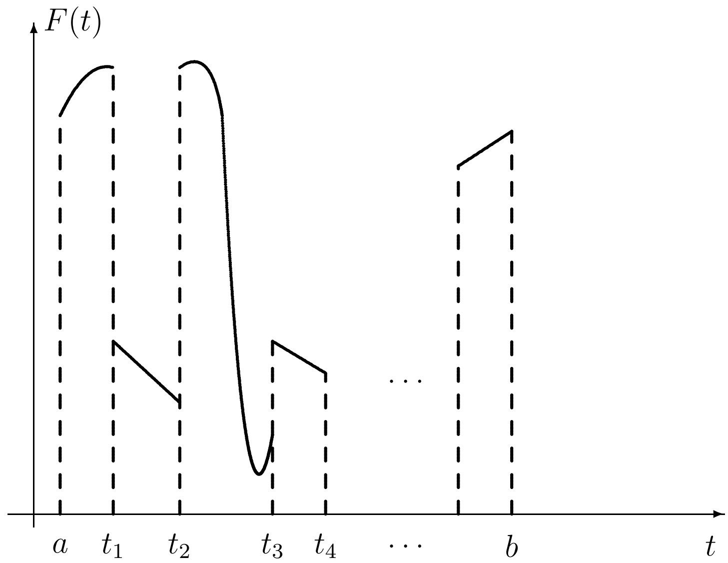

Figura 3.1: Esempio di funzione generalmente continua.

Esempio 3.1.1 *La funzione $F(t) = t^2$ è di ordine esponenziale 2. Infatti*

$$e^{2t} = 1 + 2t + \frac{4t^2}{2!} + \ldots > 2t^2 \qquad \forall t > 0.$$

Dunque

$$t^2 < \frac{1}{2}e^{2t} \qquad \forall t > 0.$$

Esempio 3.1.2 *La funzione $F(t) = e^{t^3}$ non è di ordine esponenziale. Infatti*

$$|e^{-\gamma t}e^{t^3}| = e^{t^3-\gamma t}$$

e questa quantità può essere resa maggiore di qualunque quantità assegnata, facendo crescere opportunamente t.

Vediamo ora le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Teorema 3.1.1 *Se la funzione $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo limitato $0 \le t \le t_0$ ed è di ordine esponenziale γ per $t > t_0$*

allora la trasformata di Laplace

$$f(s) = L[F(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

esiste per ogni $s > \gamma$.

Dimostrazione. Fissato un qualunque $t_0 > 0$ abbiamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{t_0} e^{-st} F(t) dt + \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt.$$

Poichè $F(t)$ è generalmente continua su $[0, t_0]$ essa è ivi integrabile e dunque il primo integrale a secondo membro esiste. Per quanto concerne il secondo integrale, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} F(t) dt \right| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} |e^{-st} F(t)| dt = \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-st} |F(t)| dt \leq \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \\
&= M \int_0^{+\infty} e^{(\gamma - s)t} dt = \\
&= \frac{M}{\gamma - s} \int_0^{+\infty} (\gamma - s) e^{(\gamma - s)t} dt = \\
&= \frac{M}{s - \gamma} \qquad\qquad \forall s > \gamma. \ \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.2 *Sia* $F(t)$ *tale che*

1.

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \pm\infty$$

2. *$F(t)$ continua a tratti in ogni intervallo $t_0 \leq t \leq t_1$, per qualche $t_0 > 0$;*

3. $$\lim_{t \to 0} t^n \; F(t) = 0$$

   per qualche $n \in]0, 1[$;

4. *$F(t)$ è di ordine esponenziale γ per $t > t_1$,*

allora $L[F(t)]$ esiste. □

3.2. Proprietà delle Trasformate di Laplace

Assumiamo che per una assegnata funzione $F(t)$ valgano le ipotesi del teorema 3.1.1 allora per la trasformata di Laplace sono valide le seguenti proprietà.

1. *Proprietà di linearità:*

   $$L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)] \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, s > \gamma.$$

   Dimostrazione.

   $$\begin{aligned} L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t))dt = \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} e^{-st} F_1(t)dt + c_2 \int_0^{+\infty} e^{-st} F_2(t)dt = \\ &= c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)]. \ \square \end{aligned}$$

2. *I^a Proprietà di traslazione:*
   posto
   $$L[F(t)] = f(s)$$
   si ha
   $$L[e^{at} F(t)] = f(s - a), \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \ s > \gamma + a.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[e^{at}F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt = f(s-a). \ \square \end{aligned}$$

3. *II*^{a} *Proprietà di traslazione:*
posto

$$L[F(t)] = f(s)$$

e

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

risulta

$$L[G(t)] = e^{-as}f(s), \qquad s > \gamma.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} L[G(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt = \\ &= \int_0^{a} e^{-st}G(t)dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}G(t)dt = \\ &= \int_0^{a} e^{-st}0dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)}F(u)du = \\ &= e^{-sa}\int_0^{+\infty} e^{-su}F(u)du = e^{-sa}f(s). \ \square \end{aligned}$$

4. *Proprietà del cambio di scala:*
   posto
   $$L[F(t)] = f(s)$$
   si ha
   $$L[F(at)] = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right), \qquad a > 0,\ s > \gamma a.$$
   Dimostrazione.
   $$\begin{aligned} L[F(at)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} F(at)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s\frac{u}{a}} \frac{F(u)}{a} du = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s}{a}u} F(u)du = \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right). \ \square \end{aligned}$$

Vediamo ora le trasformate di Laplace di alcune funzioni fondamentali.

1. $$L[1] = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$
   Infatti
   $$\begin{aligned} L[1] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}dt = \\ &= \lim_{p \to +\infty} \int_0^p e^{-st}dt = \\ &= -\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{s} \int_0^p (-s)e^{-st}dt = \\ &= -\lim_{p \to +\infty} \frac{1}{s} \left[e^{-st}\right]_0^p = \frac{1}{s}, \qquad s > 0; \end{aligned}$$

2. $$L[t] = \frac{1}{s^2}, \qquad s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
L[t] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t dt = \\
&= \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st} t dt = \\
&= -\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{s}\int_0^p (-s) t e^{-st} dt = \\
&= -\frac{1}{s}\lim_{p\to+\infty} \int_0^p t \frac{d}{dt}(e^{-st}) dt = \\
&= -\frac{1}{s}\lim_{p\to+\infty} \left\{ [te^{-st}]_0^p - \int_0^p e^{-st} dt \right\} = \\
&= \lim_{p\to+\infty} \left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sp}}{s^2} - \frac{pe^{-sp}}{s} \right] = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0;
\end{aligned}$$

3. per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$L[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \qquad s > a. \tag{3.2}$$

Infatti basta osservare che $L[1] = 1/s$ ed applicare la I^a proprietà di traslazione;

4.

$$L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0;$$

5.

$$L[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0.$$

Queste ultime due trasformate possono essere calcolate utilizzando la definizione di trasformata di Laplace, ma poichè in questo modo i calcoli risultano piuttosto lunghi cerchiamo un'altra via.

Accettando che la (3.2) sia vera anche per numeri complessi, abbiamo

$$L[e^{\iota at}] = \frac{1}{s-\iota a} = \frac{s+\iota a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + \iota\frac{a}{s^2+a^2}. \tag{3.3}$$

Ora

$$\begin{aligned}
L[e^{\iota at}] &= L[\cos at + \iota \sin at] = \\
&= L[\cos at] + \iota L[\sin at] = \\
&= \frac{s}{s^2+a^2} + \iota \frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow \\
L[\sin at] &= \frac{a}{s^2+a^2} \\
L[\cos at] &= \frac{s}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

6.

$$L[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|;$$

$$\begin{aligned}
L[\sinh at] &= L\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{2}L[e^{at}] - \frac{1}{2}L[e^{-at}] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \\
&= \frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|.
\end{aligned}$$

7.

$$L[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|.$$

Analogamente al caso precedente, ricordando che

$$\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}.$$

Vediamo ora alcuni esempi di applicazione delle altre proprietà della trasformata di Laplace.

Esempio 3.2.1

$$L[e^{-t}\cos 2t] = \frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

Ricordando che

$$L[\cos 2t] = \frac{s}{s^2+4}$$

si ha

$$L[e^{-t}\cos 2t] = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}.$$

Esempio 3.2.2

$$L[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9}.$$

Posto $f(s) = L[\sin t]$ *si ha*

$$L[\sin 3t] = \frac{1}{3} f\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}.$$

Teorema 3.2.1 *Se* $L[F(t)] = f(s)$ *allora*

$$L[t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s), \;\; s > \gamma.$$

Dimostrazione. Poniamo, al solito,

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt.$$

Allora, per induzione

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (-t) e^{-st} F(t)dt = \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-st}(tF(t))dt = \\ &= -L[tF(t)]. \end{aligned}$$

Dunque
$$L[tF(t)] = -f'(s)$$
e la tesi è vera per $n = 1$. La dimostrazione si completa per induzione. Assunta vera la tesi per un fissato k dimostriamola per $k + 1$.
$$\begin{aligned} L\left[t^{k+1}F(t)\right] &= L\left[t\left(t^kF(t)\right)\right] = \\ &= -\frac{d}{ds}L\left[t^kF(t)\right] = \\ &= -\frac{d}{ds}(-1)^k f^{(k)}(s) = \\ &= (-1)^{k+1}\frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}}f(s). \ \square \end{aligned}$$

3.3. Trasformata di Laplace delle derivate

Teorema 3.3.1 *Sia $F(t)$ continua in $0 \leq t \leq t_0$, di ordine esponenziale γ per $t > t_0$, ed $F'(t)$ generalmente continua in $0 \leq t \leq t_0$. Posto*
$$L[F(t)] = f(s)$$
si ha
$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) \qquad s > \gamma.$$

Dimostrazione.
$$\begin{aligned} L[F'(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt = \lim_{p\to+\infty}\int_0^p e^{-st}F'(t)dt = \\ &= \lim_{p\to+\infty}\left\{\left[e^{-st}F(t)\right]_0^p + s\int_0^p e^{-st}F(t)dt\right\} = \\ &= \lim_{p\to+\infty}\left\{e^{-sp}F(p) - F(0) + s\int_0^p e^{-st}F(t)dt\right\} = \\ &= \lim_{p\to+\infty} e^{-sp}F(p) + \lim_{p\to+\infty}\left(s\int_0^p e^{-st}F(t)dt - F(0)\right). \end{aligned}$$

Essendo F di ordine esponenziale il primo limite è nullo e dunque segue la tesi. $\square$

Osservazione 1. Se nelle ipotesi del precedente teorema $F(t)$ non è continua in $t = 0$ ma esiste il

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = F(0^+),$$

allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0^+).$$

Osservazione 2. Se $F(t)$ non è continua in $t = a$, allora si può provare che

$$L[F'(t)] = sf(s) - F(0) - e^{-as}(F(a^+) - F(a^-)).$$

Teorema 3.3.2 *Sia $L[F(t)] = f(s)$. Se $F^{(k)}(t)$ è continua in $0 \leq t \leq t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$, e $F^{(n)}(t)$ è generalmente continua in $0 \leq t \leq t_0$, allora*

$$L[F^{(n)}(t)] = s^n f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} F^{(k-1)}(0).$$

Dimostrazione. (Per induzione). Per $n = 1$ la tesi è una diretta conseguenza del teorema 3.3.1. Supponiamo vera la tesi per k e dimostriamola per $k + 1$.

$$\begin{aligned}
L[F^{(k+1)}(t)] &= L\left[\frac{d}{dt} F^{(k)}(t)\right] = \\
&= sL[F^{(k)}(t)] - F^{(k)}(0) = \\
&= s\left\{s^k f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} F^{(j-1)}(0)\right\} - F^{(k)}(0) = \\
&= s^{k+1} f(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j+1} F^{(j-1)}(0) - F^{(k)}(0) = \\
&= s^{k+1} f(s) - \sum_{j=1}^{k+1} s^{k-j+1} F^{(j-1)}(0). \ \square
\end{aligned}$$

3.4. Trasformata di Laplace di integrali

Teorema 3.4.1 *Sia $L[F(t)] = f(s)$, allora*

$$L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \frac{f(s)}{s}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$G(t) = \int_0^t F(u)du.$$

Osserviamo che $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$. Passando alla trasformata di Laplace di ambo i membri segue:

$$L[G'(t)] = sL[G(t)] - G(0) = sL[G(t)] = f(s)$$

ovvero

$$L\left[\int_0^t F(u)du\right] = \frac{f(s)}{s}. \ \square$$

Esempio 3.4.1

$$L\left[\int_0^t \sin 2u du\right] = \frac{L[\sin 2t]}{s} = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$

Teorema 3.4.2 *Posto $L[F(t)] = f(s)$ ed $F(t)$ soddisfacente le ipotesi del teorema 3.1.1 si ha*

$$\lim_{s\to+\infty} f(s) = 0.$$

Dimostrazione.

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

abbiamo

$$\lim_{s\to+\infty} f(s) = \lim_{s\to+\infty} \lim_{p\to+\infty} \int_0^p e^{-st}F(t)dt.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^p e^{-st}F(t)dt\right| &< \int_0^p e^{-st}e^{\gamma t}Mdt = \\
&= M\int_0^p e^{-(s-\gamma)t}dt = \\
&= \frac{M}{\gamma - s}\ \left[e^{-(s-\gamma)t}\right]_0^p = \\
&= \frac{M}{\gamma - s}\ \left[e^{-(s-\gamma)p} - 1\right].
\end{aligned}
$$

Passando al limite per $s, p \to +\infty$ si ha

$$\lim_{s\to+\infty}\ \lim_{p\to+\infty}\frac{M}{\gamma - s}\ \left[e^{-(s-\gamma)p} - 1\right] = \ \lim_{s\to+\infty}\ \frac{-M}{\gamma - s} = 0$$

e quindi segue la tesi. $\square$

3.5. Divisione per t

Teorema 3.5.1 *Sia* $L[F(t)] = f(s)$. *Se*

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}$$

esiste ed è finito allora

$$L\left[\frac{F(t)}{t}\right] = \int_s^{+\infty} f(u)du.$$

Dimostrazione. Sia

$$G(t) = \frac{F(t)}{t}$$

ovvero

$$F(t) = tG(t);$$

passando alle trasformate di Laplace dei due membri ed applicando il teorema 3.2.1 segue

$$L[F(t)] = L[tG(t)] = -\frac{d}{ds}L[G(t)].$$

Posto $g(s) = L[G(t)]$, abbiamo

$$f(s) = -\frac{d}{ds}g(s).$$

Integrando membro a membro tra s e p e utilizzando il teorema 3.4.2 segue:

$$\int_s^p f(u)du = -\int_s^p \frac{d}{du}g(u)du = g(s) - g(p).$$

Da quest'ultima passando al limite per $p \to +\infty$ segue la tesi. □

3.6. Funzioni periodiche

Teorema 3.6.1 *Sia $F(t)$ una funzione periodica di periodo $T > 0$, cioè $F(t+T) = F(t)$ per ogni t. Allora*

$$L[F(t)] = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1 - e^{-sT}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt \\
&= \int_0^T e^{-st}F(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)dt + \ldots = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st}F(t)dt = \qquad (\text{posto } t = u + kT) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^T e^{-s(u+kT)}F(u+kT)du = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-skT} \int_0^T e^{-su}F(u)du = \\
&= \frac{\int_0^T e^{-su}F(u)du}{1 - e^{-sT}}. \ \square
\end{aligned}$$

3.7. Altri teoremi fondamentali

Teorema 3.7.1 *(del Valore Iniziale e del Valore Finale). Sia $F(t)$ continua in $0 \leq t \leq t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$ ed $F'(t)$ generalmente continua per $0 \leq t \leq t_0$. Allora se i limiti sotto indicati esistono si ha*

$$1) \qquad \lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to+\infty} sf(s);$$

$$2) \qquad \lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s).$$

Dimostrazione.
1)
$$\int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt = L[F'(t)] = sf(s) - F(0). \tag{3.4}$$

Essendo $F'(t)$ generalmente continua e di ordine esponenziale si ha

$$\lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt = 0.$$

Passando al limite in (3.4) (e supponendo $F(t)$ continua in $t = 0$) si ha

$$0 = \lim_{s\to+\infty} sf(s) - F(0) \qquad \Rightarrow$$

$$F(0) = \lim_{s\to+\infty} sf(s) \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to+\infty} sf(s). \ \square$$

2) Ricordiamo innanzitutto che la trasformata di Laplace di una assegnata funzione è una funzione continua. Allora

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0^-} e^{-st}F'(t)dt &= \lim_{s\to 0^-} L[F'(t)] = L[F'(t)]|_{s=0} = \\ &= \int_0^{+\infty} F'(t)dt = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t F'(u)du = \\ &= \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(0).\end{aligned}$$

Inoltre

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-st}F'(t)dt = \lim_{s\to 0^+} L[F'(t)] = \lim_{s\to 0^+} sf(s) - F(0).$$

Per la continuità della trasformata di Laplace i limiti destro e sinistro in zero devono coincidere e dunque

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s). \ \Box$$

Vediamo ora una generalizzazione dei teoremi del valore iniziale e finale.

Teorema 3.7.2 *Se*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 1$$

dove $f(s) = L[F(t)]$ *e* $g(s) = L[G(t)]$. $\Box$

Teorema 3.7.3 *Se*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{G(t)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{s\to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 1$$

dove $f(s) = L[F(t)]$ *e* $g(s) = L[G(t)]$. $\Box$

3.8. Applicazione delle trasformate di Laplace al calcolo di integrali

Se $f(s) = L[F(t)]$ allora

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt$$

da cui

$$\lim_{s\to 0} f(s) = f(0) = \lim_{s\to 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} F(t)dt = \int_0^{+\infty} F(t)dt.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} F(t)dt = f(0)$$

(purchè gli integrali in oggetto siano convergenti).

3.9. Antitrasformata di Laplace

Definizione 3.9.1 *Se $\mathcal{N}(t)$ è una funzione di t tale che, per ogni $t > 0$, si ha*

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)du = 0$$

allora $\mathcal{N}$ si dice Funzione Nulla.

Esempio 3.9.1 *La funzione:*

$$\mathcal{N}(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

è una funzione nulla.

In generale ogni funzione che abbia valore nullo in tutti i punti, eccetto in un insieme numerabile, è una funzione nulla. Evidentemente

$$L[\mathcal{N}(t)] = 0.$$

Definizione 3.9.2 *Se $L[F(t)] = f(s)$ è la trasformata di Laplace di $F(t)$ allora $F(t)$ si dice* Antitrasformata di Laplace *di $f(s)$ (oppure* Trasformata Inversa*) e si scrive*

$$F(t) = L^{-1}[f(s)].$$

L^{-1} *è detto* Operatore Trasformata Inversa di Laplace *o* Antitrasformazione di Laplace.

Evidentemente poichè la trasformata di Laplace di una funzione nulla è 0 ne consegue che

$$L[F(t) + \mathcal{N}(t)] = L[F(t)] + L[\mathcal{N}(t)] = L[F(t)]$$

e perciò possiamo concludere che in generale due diverse funzioni possono ammettere la stessa trasformata di Laplace.
Se si escludono le funzioni nulle è però possibile stabilire un risultato di unicità, vale infatti il seguente teorema.

Teorema 3.9.1 *(Teorema di Lerch). Se $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo $0 \leq t \leq t_0$ e di ordine esponenziale per $t > t_0$ allora l'Antitrasformata di Laplace di $f(s)$*

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

è unica. □

Nel seguito assumeremo sempre, salvo esplicita affermazione contraria, che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Learch.

3.10. Proprietà dell'Antitrasformata di Laplace

1. *Proprietà di linearità:*
   se $f_1(s)$ ed $f_2(s)$ sono le trasformate di Laplace di $F_1(t)$ ed $F_2(t)$ rispettivamente, allora

   $$\begin{aligned} L^{-1}[c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] &= c_1 L^{-1}[f_1(s)] + c_2 L^{-1}[f_2(s)] = \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t), \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

   Dimostrazione.

   $$L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)] = c_1 L[F_1(t)] + c_2 L[F_2(t)] = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

   conseguentemente

   $$\begin{aligned} c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) &= L^{-1}\left[L[c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)]\right] = \\ &= L^{-1}[c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)]; \end{aligned}$$

   ma, poichè $F_1(t) = L^{-1}[f_1(s)]$ e $F_2(t) = L^{-1}[f_2(s)]$ segue la tesi. □

2. *I^a Proprietà di traslazione:*
   posto

   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

   si ha

   $$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at} F(t).$$

Dimostrazione. Poichè

$$L[e^{at}F(t)] = f(s-a)$$

allora

$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t). \ \Box$$

In alternativa

$$\begin{aligned} f(s-a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt = \\ &= L[e^{at}F(t)]. \end{aligned}$$

Dunque

$$L^{-1}[f(s-a)] = e^{at}F(t). \ \Box$$

3. *II^a^ Proprietà di traslazione:*
posto

$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$

si ha

$$L^{-1}[e^{-as}f(s)] = G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ \\ 0 & t < a. \end{cases}$$

Dimostrazione. Da

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{-sa}f(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)}F(t)dt = \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-su}F(u-a)du = \\ &= \int_0^{a} e^{-st}0\ dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}F(t-a)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st}G(t)dt. \ \Box \end{aligned}$$

4. *Proprietà del cambio di scala:*
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
   $$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right).$$
   Dimostrazione. Per la proprietà del cambio di scala delle trasformate di Laplace si ha:
   $$L\left[F\left(\frac{t}{k}\right)\right] = kf(ks).$$
   Allora
   $$L^{-1}[f(ks)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right). \ \square$$

5. *Antitrasformata di Laplace delle derivate:*
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   allora
   $$L^{-1}[f^{(n)}(s)] = (-1)^n t^n F(t).$$
   Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace. □

6. *Antitrasformata di Laplace di integrali:*
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
   $$L^{-1}\left[\int_s^{+\infty} f(u)du\right] = \frac{F(t)}{t}.$$
   Dimostrazione. È una immediata conseguenza dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace.

7. *Prodotto per s:*
   se
   $$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$

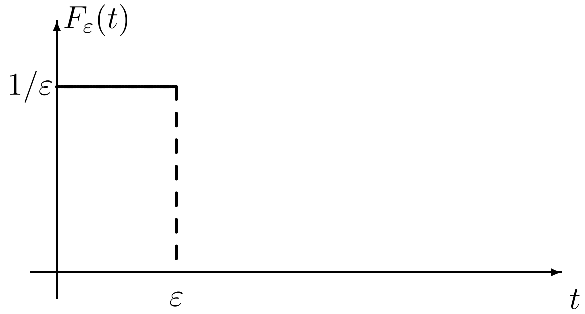

Figura 3.2: Grafico della funzione $F_\varepsilon(t)$.

e $F(0) = 0$, allora

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t).$$

Se $F(0) \neq 0$ allora

$$L^{-1}[sf(s) - F(0)] = F'(t)$$

oppure

$$L^{-1}[sf(s)] = F'(t) + F(0)\delta(t) \tag{3.5}$$

dove $\delta(t)$ è la funzione *delta di Dirac* o *funzione impulsiva unitaria,* che ci apprestiamo a definire. La relazione (3.5) è una conseguenza della proprietà (iv) della funzione $\delta(t)$ definita a pagina 80.

Osservazione. Consideriamo la funzione così definita:

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

dove $\varepsilon > 0$.

È geometricamente chiaro che per $\varepsilon \to 0$ l'altezza del rettangolo in figura 3.2 cresce oltre ogni limite mentre la larghezza tende a 0, in modo tale però che l'area del rettangolo sia costantemente uguale a 1, cioè

$$\int_0^{+\infty} F_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Ciò ha suggerito l'idea di una funzione limite, che indichiamo con $\delta(t)$, cui tenderebbe $F_\varepsilon(t)$ per $\varepsilon \to 0$. Questa funzione limite è stata chiamata *delta di Dirac*. Alcune utili proprietà della funzione $\delta(t)$ sono:

(i)
$$\int_0^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

(ii)
$$\int_0^{+\infty} \delta(t)G(t)dt = G(0)$$

per ogni G funzione continua;

(iii)
$$\int_0^{+\infty} \delta(t-a)G(t)dt = G(a)$$

per ogni G funzione ;

(iv)
$$L[\delta(t-a)] = e^{-as};$$

8. *Divisione per s:*
   se
$$L^{-1}[f(s)] = F(t),$$
   allora
$$L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s}\right] = \int_0^t F(u)du.$$

   Dimostrazione. Basta tener conto dell'analoga proprietà delle trasformate di Laplace. □

9. *Proprietà di Convoluzione:*
   se
$$L^{-1}[f(s)] = F(t)$$
   e
$$L^{-1}[g(s)] = G(t)$$
   allora
$$L^{-1}[f(s)g(s)] = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G.$$

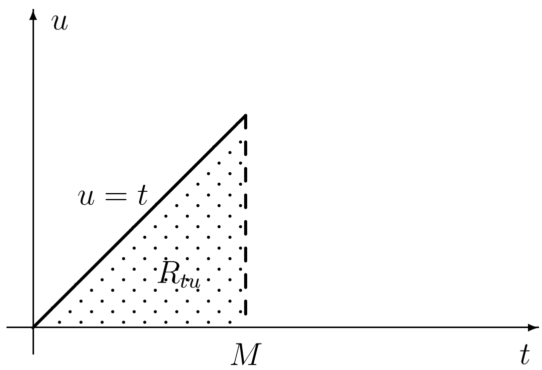

Figura 3.3:

$F * G$ è detta *Convoluzione* di F e G.

Dimostrazione. La tesi è dimostrata se si prova che

$$f(s)g(s) = L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right].$$

Allora

$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t F(u)G(t-u)du\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \lim_{M\to+\infty} S_M \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} S_M &= \int_0^M e^{-st}\left(\int_0^t F(u)G(t-u)du\right)dt = \\ &= \int\int_{R_{tu}} e^{-st}F(u)G(t-u)dudt. \end{aligned}$$

ed R_{tu} è la zona indicata in figura 3.3.

Consideriamo ora il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} v = t-u & \qquad t = t(v,u) = v+u \\ u = u & \qquad u = (v,u) = u. \end{cases}$$

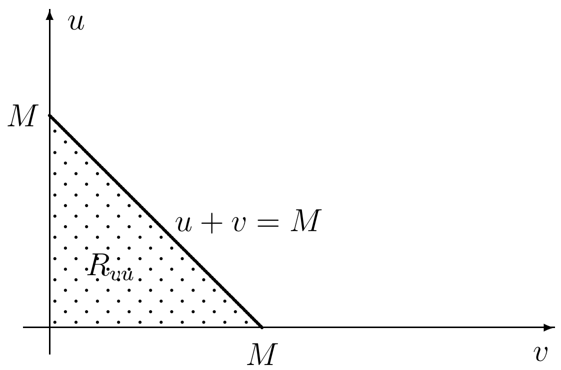

Figura 3.4:

Cosicchè la regione R_{tu} è trasformata nella regione R_{vu} in figura 3.4.

Per un noto teorema sul cambiamento di variabile negli integrali doppi si ha:

$$\begin{aligned} S_M &= \int\int_{R_{tu}} e^{-st} F(u)G(t-u)dudt = \\ &= \int\int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)J(u,v)dudv. \end{aligned}$$

dove

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial v} & \dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} & \dfrac{\partial u}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$S_M = \int\int_{R_{vu}} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)dudv.$$

Dunque

$$S_M = \int_{v=0}^{M} \int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} F(u)G(v)dudv.$$

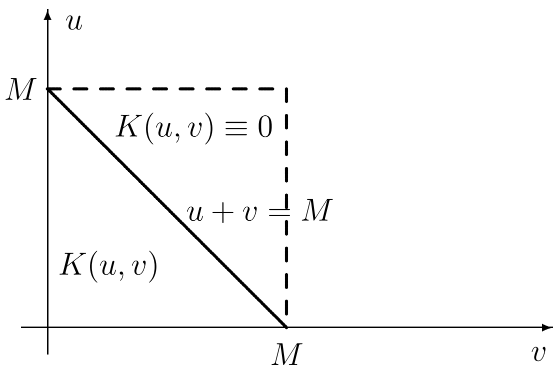

Figura 3.5:

Definiamo ora la seguente funzione:

$$K(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)}F(u)G(v) & u+v \le M \\ \\ 0 & u+v > M,\ 0 \le v \le M. \end{cases}$$

In termini di questa funzione abbiamo

$$S_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)dudv.$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{M\to+\infty} S_M &= \lim_{M\to+\infty}\int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)dudv = \\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} e^{-s(u+v)}F(u)G(v)dudv = \\ &= \lim_{M\to+\infty}\int_{u=0}^{M} e^{-su}F(u)du\int_{v=0}^{M} e^{-sv}G(v)dv = \\ &= \left(\int_{0}^{+\infty} e^{-su}F(u)du\right)\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-sv}G(v)dv\right) = \\ &= f(s)g(s).\ \square \end{aligned}$$

Si può dimostrare che il prodotto di convoluzione gode della proprietà associativa, commutativa e distributiva.

3.11. Frazioni Parziali e Sviluppi di Heaviside

Ogni funzione razionale $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ con grado di P minore del grado di Q, può essere espressa come somma di funzioni razionali (dette *frazioni parziali*) del tipo:

$$\frac{A}{(as+b)^k} \qquad \text{e} \qquad \frac{As+B}{(as^2+bs+c)^k} \qquad k=1,2,3,\dots$$

Ne consegue che determinando l'antitrasformata di Laplace di ognuna di queste frazioni parziali, si può dare l'antitrasformata di una qualunque funzione razionale.

Esempio 3.11.1

$$\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}.$$

Esempio 3.11.2

$$\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}.$$

Le costanti che compaiono in entrambi gli esempi possono essere calcolate, per esempio, riducendo le frazioni allo stesso denominatore ed applicando poi il principio di identità dei polinomi. Si ottiene così un sistema di equazioni lineari nelle incognite A, B, C, D ed E.
Descriviamo ora un metodo abitualmente usato in un contesto applicativo quale il calcolo delle antitrasformate di Laplace, basato sulla nozione di residuo.
Sia

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

con $z = \alpha + \iota\beta$. Ci proponiamo di scomporre $F(z)$ in una somma di termini che siano polinomi o funzioni razionali del tipo

$$\frac{A}{(z-z_0)^k}$$

oppure del tipo

$$\frac{B}{(z-\alpha_0)^2+\beta_0^2} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{Cz}{(z-\alpha_0)^2+\beta_0^2}.$$

3.12. Poli semplici

Assumiamo che il denominatore di $F(z)$, $Q_m(z)$, che è un polinomio di grado m, si annulli negli m punti

$$z_1, z_2, \ldots, z_m, \qquad \text{con } z_i \neq z_j,\ \forall i, j,\ i \neq j$$

e nei quali non si annulla il polinomio $P_n(z)$. È noto allora che $F(z)$ può essere così scomposta:

$$F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{z - z_k} \tag{3.6}$$

dove $D_{n-m}(z)$ è il *quoziente* di $P_n(z)$ e $Q_m(z)$. Uguagliando i coefficienti dei numeratori nella relazione (3.6) si ottiene un sistema di equazioni algebriche lineari che permettono di determinare i coefficienti A_k.

Esempio 3.12.1 *Scomporre*

$$F(z) = \frac{2z^2 + 1}{(z+2)(z-1)}$$

in frazioni semplici.
Si ha

$$\begin{aligned}\frac{2z^2 + 1}{(z+2)(z-1)} &= D_0 + \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \\ &= \frac{D_0 z^2 + (D_0 + A + B)z + (-2D_0 - A + 2B)}{(z+2)(z-1)}.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{array}{l} D_0 = 2 \\ D_0 + A + B = 0 \\ -2D_0 - A + 2B = 1 \end{array}$$

da cui risolvendo ricaviamo $D_0 = 2$, $A = -3$ e $B = 1$. Quindi in definitiva

$$F(z) = 2 + \frac{-3}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

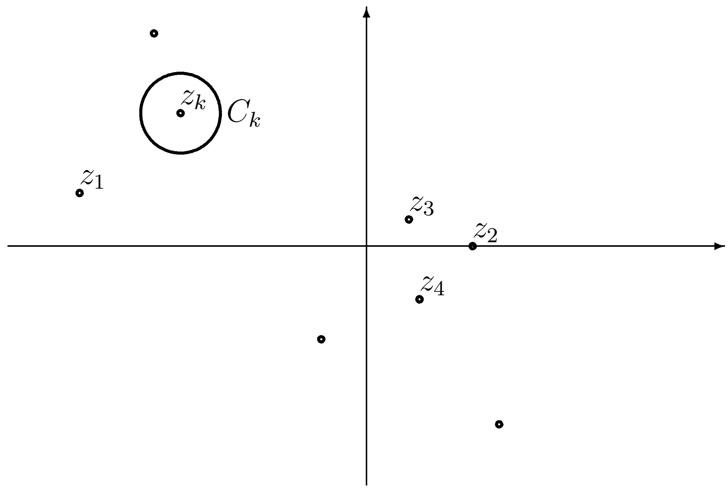

Figura 3.6:

3.13. Uso dei residui

Proviamo ora che le costanti A_k, $k = 1, \ldots, m$, nella (3.6) possono essere ottenute con il calcolo di opportuni residui. Siano C_k, $k = 1, \ldots, m$, circonferenze di centro rispettivamente z_k, $k = 1, \ldots, m$, e raggio sufficientemente piccolo in modo da contenere una sola singolarità polare (come mostrato in figura 3.6).

$$\begin{aligned} R(F, z_k) &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{C_k} F(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{C_k} \left[D_{n-m}(z) + \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{z - z_i} \right] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi\iota} \left[\oint_{C_k} D_{n-m}(z) dz + \sum_{i=1}^{m} \oint_{C_k} \frac{A_i}{z - z_i} dz \right]. \end{aligned}$$

Poichè $D_{n-m}(z)$ e tutte le frazioni $\dfrac{A_i}{z - z_i}$, per $i \neq k$, sono funzioni analitiche nel cerchio di bordo C_k per il teorema di Cauchy gli integrali di tali funzioni su C_k sono nulli e pertanto

$$R(F, z_k) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_{C_k} \frac{A_k}{z - z_k} dz = \frac{1}{2\pi\iota}\, 2\pi\iota A_k = A_k.$$

Pertanto

$$\boxed{F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + \sum_{k=1}^{m} \frac{R(F, z_k)}{z - z_k}.} \tag{3.7}$$

Esempio 3.13.1 *Scomporre in fratti semplici con il metodo dei residui la funzione*

$$F(z) = \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z^2 - 4)(z^2 - 1)}.$$

La funzione ha come numeratore un polinomio di grado inferiore rispetto al denominatore, perciò $D_{n-m}(z) = 0$. Ora dalla (3.7):

$$F(z) = \frac{R(F, -2)}{z + 2} + \frac{R(F, -1)}{z + 1} + \frac{R(F, 0)}{z} + \frac{R(F, 1)}{z - 1} + \frac{R(F, 2)}{z - 2}.$$

$$R(F, -2) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z - 2)(z + 1)(z - 1)} \right|_{z=-2} = 1$$

$$R(F, -1) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z + 2)(z - 2)(z - 1)} \right|_{z=-1} = 2$$

$$R(F, 0) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{(z + 2)(z - 2)(z + 1)(z - 1)} \right|_{z=0} = 3$$

$$R(F, 1) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z - 2)(z + 2)(z + 1)} \right|_{z=1} = 4$$

$$R(F, 2) = \left. \frac{15z^4 + 10z^3 - 45z^2 - 16z + 12}{z(z + 2)(z + 1)(z - 1)} \right|_{z=2} = 5.$$

Quindi

$$F(z) = \frac{1}{z + 2} + \frac{2}{z + 1} + \frac{3}{z} + \frac{4}{z - 1} + \frac{5}{z - 2}.$$

3.14. Poli multipli

Sia

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

ed assumiamo che $F(z)$ abbia un solo polo multiplo di molteplicità m in z_0 e $P_n(z_0) \neq 0$. Allora $F(z)$ può essere così scomposta

$$\boxed{F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(z-z_0)^k}} \tag{3.8}$$

dove $D_{n-m}(z)$ è presente solo se $n \geq m$; inoltre, per $k = 1, \ldots, m$, le costanti al numeratore hanno la seguente espressione:

$$\boxed{A_k = R\left[(z-z_0)^{k-1}F(z), z_0\right] = c_{-k}} \tag{3.9}$$

dove $c_{-m}, c_{-(m-1)}, \ldots, c_{-1}$ indicano i coefficienti di indice negativo dello sviluppo in serie di Laurent di centro z_0 di $F(z)$:

$$F(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots$$

Dimostriamo la (3.9).
Sia C una circonferenza di centro z_0. Allora

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C D_{n-m}(z)dz + \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(z-z_0)^k} dz.$$

In virtù dell'esempio 1.2.8 segue che tutti gli addendi a secondo membro sono nulli eccetto il primo sotto il segno di sommatoria. Pertanto

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint_C F(z)dz = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_C \frac{A_1}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi\imath} A_1 2\pi\imath = A_1. \tag{3.10}$$

Inoltre integrando lo sviluppo in serie di Laurent di $F(z)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\iota}\oint_C F(z)dz &= \frac{1}{2\pi\iota}\oint_C \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}dz + \ldots + \frac{1}{2\pi\iota}\oint_C \frac{c_{-1}\,dz}{z-z_0} + \\ &+ \frac{1}{2\pi\iota}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_C c_k(z-z_0)^k dz.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Le relazioni (3.10) e (3.11) permettono di concludere che

$$A_1 = c_{-1} = R(F, z_0).$$

Per ottenere gli altri coefficienti $A_2, \ldots, A_m$ si integra su C non $F(z)$ ma la funzione

$$(z-z_0)^{k-1}F(z) \qquad k = 2, \ldots, m.$$

Esempio 3.14.1 *Scomporre in fratti semplici con il metodo dei residui la funzione razionale*

$$F(z) = \frac{z^5}{(z-1)^5}.$$

Si ha

$$F(z) = 1 + \frac{c_{-5}}{(z-1)^5} + \frac{c_{-4}}{(z-1)^4} + \frac{c_{-3}}{(z-1)^3} + \frac{c_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{c_{-1}}{z-1}$$

dove i coefficienti c_{-k} sono dati dalla formula (3.10). Quindi

$$\begin{aligned}c_{-1} &= R\left(F(z), 1\right) = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{dz^4}z^5\right]_{z=1} = 5,\\ c_{-2} &= R\left((z-1)F(z), 1\right) = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3}z^5\right]_{z=1} = 10,\\ c_{-3} &= R\left((z-1)^2F(z), 1\right) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}z^5\right]_{z=1} = 10,\\ c_{-4} &= R\left((z-1)^3F(z), 1\right) = \left[\frac{d}{dz}z^5\right]_{z=1} = 5,\\ c_{-5} &= R\left((z-1)^4F(z), 1\right) = \left[z^5\right]_{z=1} = 1.\end{aligned}$$

In definitiva abbiamo

$$F(z) = 1 + \frac{1}{(z-1)^5} + \frac{5}{(z-1)^4} + \frac{10}{(z-1)^3} + \frac{10}{(z-1)^2} + \frac{5}{z-1}.$$

3.15. Poli complessi coniugati

Il caso dei poli semplici complessi coniugati rientra evidentemente nel caso più generale già visto per i poli semplici. Tuttavia una scomposizione ad hoc per questo caso può risultare molto utile. Prendiamo in considerazione una funzione razionale con una coppia di poli semplici complessi coniugati. L'estensione poi al caso di più poli semplici complessi coniugati è abbastanza immediata.
Sia

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$$

con $Q_m(z)$ avente una coppia di zeri semplici in $z_0 = \alpha + \iota\beta$ e $\overline{z}_0 = \alpha - \iota\beta$. Inoltre assumiamo che $P_n(z)$ e $Q_m(z)$ sono polinomi a coefficienti reali. Allora $F(z)$ ammette la seguente scomposizione:

$$\boxed{F(z) = \underbrace{D_{n-m}(z)}_{n \geq m} + 2A\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\beta^2} - 2B\frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2}} \tag{3.12}$$

dove $D_{n-m}(z)$ è presente solo se $n \geq m = 2$, e dove

$$\boxed{A = \Re e\left[R(F, z_0)\right]} \tag{3.13}$$

e

$$\boxed{B = \Im m\left[R(F, z_0)\right]} \tag{3.14}$$

ovvero $A + \iota B = R(F, z_0)$.

Dalla decomposizione di F per poli semplici possiamo scrivere

$$\begin{aligned} F(z) &= D_{n-m}(z) + \frac{R(F,z_0)}{z-z_0} + \frac{R(F,\overline{z}_0)}{z-\overline{z}_0} = \\ &= D_{n-m}(z) + \frac{R(F,z_0)}{z-z_0} + \frac{\overline{R(F,z_0)}}{z-\overline{z}_0}. \end{aligned}$$

Dimostriamo innanzitutto che

$$R(F,\overline{z}_0) = \overline{R(F,z_0)}.$$

Innanzitutto osserviamo che

$$Q_m(z) = R_{m-2}(z)(z-z_0)(z-\overline{z}_0)$$

dove $R_{m-2}(z)$ è un polinomio di grado al più $m-2$ (se $m \geq 2$) che non si annulla in z_0 (e quindi neanche in $\overline{z}_0$). Calcoliamo ora il residuo in z_0:

$$\begin{aligned} R(F,z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)F(z) = \\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{P_n(z)}{(z-\overline{z}_0)R_{m-2}(z)} = \frac{P_n(z_0)}{(z_0-\overline{z}_0)R_{m-2}(z_0)} = \\ &= \frac{P_n(z_0)}{2\iota\Im m(z_0)R_{m-2}(z_0)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\overline{R(F,z_0)} = \frac{\overline{P_n(z_0)}}{-2\iota\Im m(z_0)\overline{R_{m-2}(z_0)}}.$$

Calcoliamo ora il residuo in $\overline{z}_0$:

$$\begin{aligned} R(F,\overline{z}_0) &= \lim_{z\to \overline{z}_0}(z-\overline{z}_0)F(z) = \\ &= \lim_{z\to \overline{z}_0}\frac{P_n(z)}{(z-z_0)R_{m-2}(z)} = \frac{P_n(\overline{z}_0)}{(\overline{z}_0-z_0)R_{m-2}(\overline{z}_0)} = \\ &= \frac{P_n(\overline{z}_0)}{-2\iota\Im m(z_0)R_{m-2}(\overline{z}_0)}. \end{aligned}$$

Poichè $P_n(z)$ e $R_{m-2}(z)$ sono polinomi a coefficienti reali allora $P_n(\overline{z}_0) = \overline{P_n(z_0)}$ e $R_{m-2}(\overline{z}_0) = \overline{R_{m-2}(z_0)}$, e quindi segue la tesi:

$$R(F, \overline{z}_0) = \overline{R(F, z_0)}.$$

Posto $A = \Re e[R(F, z_0)]$ e $B = \Im m[R(F, z_0)]$ abbiamo

$$\begin{aligned}
F(z) &= D_{n-m}(z) + \frac{A + \iota B}{(z-\alpha) - \iota\beta} + \frac{A - \iota B}{(z-\alpha) + \iota\beta} = \\
&= D_{n-m}(z) + \frac{(A + \iota B)[(z-\alpha) + \iota\beta] + (A - \iota B)[(z-\alpha) - \iota\beta]}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} = \\
&= D_{n-m}(z) + \frac{A(z-\alpha) + \iota B(z-\alpha) + \iota A\beta - B\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} + \\
&\quad + \frac{A(z-\alpha) - \iota B(z-\alpha) - \iota A\beta - B\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} = \\
&= D_{n-m}(z) + \frac{2A(z-\alpha)}{(z-\alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2B\beta}{(z-\alpha)^2 + \beta^2}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.15.1 *Scomporre in fratti semplici con il metodo dei residui la funzione*

$$F(z) = \frac{10z - 22}{z^2 + 4z + 13}.$$

Il denominatore della funzione assegnata presenta due zeri complessi coniugati nei punti

$$z_1 = -2 + \iota 3, \qquad z_2 = -2 - \iota 3.$$

Calcoliamo ora il residuo nel polo z_1:

$$\begin{aligned} R\left(F(z), z_1\right) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)F(z) = \\ &= \lim_{z\to -2+3\iota} \frac{10z-22}{z+2+3\iota} = \\ &= \left[\frac{10z-22}{z+2+3\iota}\right]_{z=-2+3\iota} = \\ &= \frac{-20+30\iota-22}{6\iota} = \\ &= \frac{-42+30\iota}{6\iota} = 5+7\iota. \end{aligned}$$

Quindi in questo caso risulta:

$$\begin{aligned} F(z) &= 2A\frac{(z+2)}{(z+2)^2+9} - 2B\frac{3}{(z+2)^2+9} = \\ &= 10\frac{(z+2)}{(z+2)^2+9} - 14\frac{3}{(z+2)^2+9} \end{aligned}$$

3.16. Formula di Heaviside per poli semplici

Sia $Q_m(s)$ un polinomio di grado $m \geq 1$ con m zeri distinti $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Allora

$$Q_m(s) = q_0 \prod_{i=1}^{m}(s-s_i) \tag{3.15}$$

e anche

$$\frac{dQ_m}{ds} = q_0 \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (s-s_j)$$

e dunque

$$Q'_m(s_i) = q_0 \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (s_i - s_j).$$

Ciò premesso sia

$$f(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)}$$

una funzione razionale con $n < m$ e Q_m definito in (3.15). Possiamo allora scrivere

$$f(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{R[f(s), s_k]}{s - s_k}. \tag{3.16}$$

Osservando che

$$\begin{aligned} R[f(s), s_k] &= \lim_{s \to s_k} (s - s_k) f(s) = \\ &= \lim_{s \to s_k} (s - s_k) \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} = \\ &= \lim_{s \to s_k} \frac{P_n(s)}{q_0 \prod\limits_{j=1, j \neq k} (s - s_j)} = \\ &= \frac{P_n(s_k)}{Q'_m(s_k)}. \end{aligned}$$

La (3.16) diventa

$$f(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_n(s_k)}{Q'_m(s_k)} \, \frac{1}{s - s_k}$$

e pertanto

$$L^{-1}[f(s)] = \sum_{k=1}^{m} \frac{P_n(s_k)}{Q'_m(s_k)} \, L^{-1}\left[\frac{1}{s - s_k}\right]$$

ovvero

$$\boxed{L^{-1}[f(s)] = \sum_{k=1}^{m} e^{s_k t} \frac{P_n(s_k)}{Q'_m(s_k)}.}$$

3.17. Formula di Heaviside per poli multipli

Se $Q_m(s)$ ha un unico polo s_0 di ordine m allora

$$f(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)}$$

con $n < m$, può essere scritta

$$f(s) = \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{1}{(s-s_0)^k}$$

dove

$$A_k = R\left[(s-s_0)^{k-1} f(s), s_0\right] \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Ora

$$L^{-1}[f(s)] = \sum_{k=1}^{m} A_k L^{-1}\left[\frac{1}{(s-s_0)^k}\right]. \tag{3.17}$$

Osservato che

$$L[e^{s_0 t} t^{k-1}] = \left(L\left[t^{k-1}\right]\right)_{s-s_0}$$

consideriamo la seguente definizione.

Definizione 3.17.1 *Per $n \in \mathbb{R}_+^*$ la funzione gamma, Γ, è definita in questo modo*

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-1} du.$$

Si possono provare le seguenti proprietà:

1. *per ogni $n \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ e $\Gamma(1) = 1$;*
2. *per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$;*
3. *$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.*

Dimostriamo ora che

$$L[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad n > -1, s > 0.$$

Infatti

$$\begin{aligned} L[t^n] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t^n dt = \qquad \text{(posto } st = u\text{)} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{du}{s} = \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^n du = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

In particolare per $n = -1/2$:

$$L[t^{-1/2}] = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Quindi segue

$$\left(L\left[t^{k-1}\right]\right)_{s-s_0} = \frac{\Gamma(k)}{(s-s_0)^k} = \frac{(k-1)!}{(s-s_0)^k}$$

e di conseguenza abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned} L^{-1}[f(s)] &= \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(k-1)!} e^{s_0 t} t^{k-1} = \\ &= e^{s_0 t}\left[A_1 + A_2 t + A_3 \frac{t^2}{2!} + \ldots + A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right]. \end{aligned}}$$

3.18. Formula di Heaviside per poli complessi coniugati

Sia

$$f(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)}$$

e supponiamo che $Q_m(s)$ abbia un unico zero complesso coniugato $s_1 = \alpha + \iota\beta$, $(s_2 = \overline{s}_1 = \alpha - \iota\beta)$ e che $m = 2$.

$$f(s) = 2A\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - 2B\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

dove

$$A = \Re e\,[R(f, s_1)] \qquad\qquad B = \Im m\,[R(f, s_1)]$$

da cui

$$\begin{aligned} L^{-1}[f(s)] &= 2A\; L^{-1}\left[\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] - 2B\; L^{-1}\left[\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\right] = \\ &= 2Ae^{\alpha t}\cos\beta t - 2Be^{\alpha t}\sin\beta t. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\boxed{L^{-1}[f(s)] = 2e^{\alpha t}[A\cos\beta t - B\sin\beta t].}$$

3.19. Applicazioni delle trasformate di Laplace

Applicazione alle equazioni differenziali

Un'utilissima applicazione delle trasformate di Laplace è nella risoluzione delle equazioni differenziali. Supponiamo per esempio di dover risolvere la seguente equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i Y^{(i)}(t) = F(t) \\ \\ Y^{(i)}(0) = y_{i0} \qquad i = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

Allora posto $y(s) = L[Y(t)]$ abbiamo:

$$\begin{aligned} L\left[\sum_{i=0}^{n} a_i Y^{(i)}(t)\right] &= \sum_{i=0}^{n} a_i L\left[Y^{(i)}(t)\right] = \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \left[s^i y(s) - \sum_{k=1}^{i} s^{i-k} y^{(k-1)}(0)\right] = L[F(t)]. \end{aligned}$$

Quindi

$$y(s)\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{i} s^{i-k} a_i y^{(k-1)}(0) + L[F(t)]$$

e risulta

$$y(s) = \frac{L[F(t)] + \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{i} s^{i-k} a_i y^{(k-1)}(0)}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}.$$

Conseguentemente

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{L[F(t)] + \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{i} s^{i-k} a_i y^{(k-1)}(0)}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right].$$

Dopo aver visto l'applicazione delle trasformate di Laplace in un caso del tutto generale vediamone alcune particolari. Consideriamo la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y}{dt^2} + a\dfrac{dY}{dt} + bY = F(t) \\ \\ Y(0) = \alpha \qquad\qquad Y'(0) = \beta \end{cases}$$

con $F(t)$ funzione assegnata e a, b, α, β costanti assegnate. Allora, definite $L[Y(t)] = y(s)$ e $L[F(t)] = f(s)$, le trasformate di Laplace di $Y(t)$ e $F(t)$ rispettivamente, abbiamo:

$$L\left[\frac{d^2Y}{dt^2} + a\frac{dY}{dt} + bY\right] = L[F(t)] \qquad \Leftrightarrow$$

$$L\left[\frac{d^2Y}{dt^2}\right] + aL\left[\frac{dY}{dt}\right] + bL[Y] = L[F(t)] \qquad \Leftrightarrow$$

$$(s^2y(s) - sY(0) - Y'(0)) + a\,(sy(s) - Y(0)) + by(s) = f(s) \Leftrightarrow$$

$$(s^2 + as + b)y(s) = f(s) + s\alpha + \beta + a\alpha \qquad \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{f(s) + s\alpha + \beta + a\alpha}{s^2 + as + b} \qquad \Rightarrow$$

$$Y(t) = L^{-1}\left[\frac{f(s) + s\alpha + \beta + a\alpha}{s^2 + as + b}\right].$$

Esempio 3.19.1 *Risolvere*

$$\begin{cases} Y'' + Y = t \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

$$L[Y'' + Y] = L[t] \qquad \Leftrightarrow$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + y(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \Rightarrow$$

$$(s^2 + 1)y(s) = \frac{1}{s^2} + s - 2 \qquad \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1} \qquad \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}.$$

$$Y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right] = t + \cos t - 3\sin t.$$

Esempio 3.19.2 *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$Y^{(3)} - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2 e^t.$$

Poichè in questo caso le condizioni iniziali sono arbitrarie, poniamo

$$Y(0) = A, \qquad Y'(0) = B, \qquad Y''(0) = C$$

con A, B, C costanti arbitrarie. Passando alle trasformate di Laplace si ha:

$$L[Y^{(3)}] - 3L[Y''] + 3L[Y'] - L[Y] = L[t^2 e^t]$$

ovvero

$$(s^3 y(s) - As^2 - Bs - C) - 3(s^2 y(s) - As - B) +$$

$$+3(sy(s) - A) - y(s) = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Isolando $y(s)$ segue

$$y(s) = \frac{As^2 + (B - 3A)s - 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6} \qquad \Rightarrow$$

$$y(s) = \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}.$$

Passando all'antitrasformata di Laplace si trova

$$Y(t) = \frac{c_1 t^2}{2}\, e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t + \frac{t^5}{60}\, e^t.$$

Esempio 3.19.3 *Risolvere*

$$\begin{cases} Y'' + 9Y = \cos 2t \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y(\pi/2) = -1. \end{cases}$$

Poichè $Y'(0)$ non è noto, ma interviene nelle trasformate delle derivate poniamo arbitrariamente $Y'(0) = C$. Allora

$$L[Y''] + 9L[Y] = L[\cos 2t] \qquad \Leftrightarrow$$

$$s^2 y(s) - sY(0) - C + 9y(s) = \frac{s}{s^2 - 4} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{s + C}{s^2 + 9} + \frac{s}{(s^2 + 9)(s^2 + 4)} = \\ &= \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{C}{s^2 + 9} + \frac{s}{5(s^2 + 4)} - \frac{s}{5(s^2 + 9)}. \end{aligned}$$

Passando alle antitrasformate si trova

$$Y(t) = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{C}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t.$$

Imponendo in quest'ultima espressione la condizione $Y(\pi/2) = -1$ segue $C = 12/5$ e quindi la soluzione richiesta è:

$$Y(t) = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{4}{5}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t.$$

Esempio 3.19.4 *Risolvere*

$$\begin{cases} Y'' + \omega^2 Y = F(t) \\ \\ Y(0) = 1 \qquad Y'(0) = -2. \end{cases}$$

Si ha:

$$L[Y''] + \omega^2 L[Y] = L[F(t)] \qquad \Leftrightarrow$$

$$(s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)) + \omega^2 y(s) = f(s)$$

ovvero

$$y(s) = \frac{s-2}{s^2+\omega^2} + \frac{f(s)}{s^2+\omega^2}.$$

In virtù del teorema di convoluzione abbiamo:

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+\omega^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s^2+\omega^2}\right] = \\ &= \cos\omega t - \frac{2\sin\omega t}{\omega} + F(t) * \frac{\sin\omega t}{\omega} = \\ &= \cos\omega t - \frac{2\sin\omega t}{\omega} + \frac{1}{\omega}\int_0^t F(u)\sin\omega(t-u)du. \end{aligned}$$

Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti variabili

La trasformata di Laplace può essere utilizzata con profitto anche per risolvere alcune classi di equazioni differenziali a coefficienti variabili. In particolare essa è molto utile per risolvere equazioni differenziali i cui termini hanno la forma:

$$t^m Y^{(n)}(t).$$

Infatti in questo caso la trasformata di Laplace è data da

$$L\left[t^m Y^{(n)}(t)\right] = (-1)^m \frac{d^m}{ds^m} L[Y^{(n)}(t)].$$

Esempio 3.19.5 *Risolvere*

$$\begin{cases} tY'' + Y' + 4tY = 0 \\ Y(0) = 3 \qquad Y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si ha:

$$L[tY''] + L[Y'] + 4L[tY] = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0)\right) + sy(s) - Y(0) - 4\frac{d}{ds}y(s) = 0.$$

ovvero

$$(s^2+4)\frac{dy}{ds} + sy(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{sds}{s^2+4}.$$

Integrando si ha

$$\log y + \frac{1}{2}\log(s^2+4) = C$$

cioè

$$y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+4}}.$$

Considerando l'antitrasformata (vedere le tabelle delle trasformate di Laplace) si ha:

$$Y(t) = CJ_0(2t).^1$$

Imponendo la condizione $Y(0) = CJ_0(0) = 3$ *segue* $C = 3$*; dunque*

$$Y(t) = 3J_0(2t).$$

Esempio 3.19.6 *Risolvere*

$$\begin{cases} tY'' + 2Y' + tY = 0 \\ \\ Y(0^+) = 1 \qquad Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace di ogni termine,

$$-\frac{d}{ds}\Big(s^2y(s) - sY(0^+) - Y'(0^+)\Big) + 2(sy(s) - Y(0^+)) - \frac{d}{ds}y(s) = 0.$$

oppure

$$-s^2y'(s) - 2sy(s) + 1 + 2sy(s) - 2 - y'(s) = 0$$

[1] $J_0(t)$ è la funzione di di ordine zero definita da:

$$J_0(t) = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} - \frac{t^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots,$$

e risulta

$$L[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

cioè

$$-(s^2+1)y'(s)-1=0; \qquad y'(s)=-\frac{1}{s^2+1}.$$

Integrando si ha

$$y(s)=-\arctan s+A.$$

Poichè per il teorema 3.4.2 $y(s)\to 0$ *per* $s\to+\infty$ *deve essere* $A=\pi/2$. *Quindi*

$$y(s)=\frac{\pi}{2}-\arctan s=\arctan\frac{1}{s}.$$

Dalla tabella delle trasformate di Laplace risulta

$$Y(t)=L^{-1}\left[\arctan\frac{1}{s}\right]=\frac{\sin t}{t}.$$

Si noti che questa funzione soddisfa la condizione $Y(\pi)=0$.

Sistemi di equazioni differenziali

Esempio 3.19.7 *Risolvere*

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=2X-3Y \\[2ex] \dfrac{dY}{dt}=Y-2X \\[2ex] X(0)=8 \qquad Y(0)=3. \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace di ambo i membri abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} L\left[\frac{dX}{dt}\right]&=2L[X]-3L[Y] \\[2ex] L\left[\frac{dY}{dt}\right]&=L[Y]-2L[X] \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} sx(s)-8 &= 2x(s)-3y(s) \\ sy(s)-3 &= y(s)-2x(s) \end{aligned}$$

dove $x(s)$ e $y(s)$ sono le trasformate di Laplace di X e Y rispettivamente. Equivalentemente

$$(s-2)x(s)+3y(s)=8$$

$$2x(s)+(s-1)y(s)=3.$$

Risolvendo il sistema, per esempio con la regola di Kramer, si trova

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4} \\ y(s) &= \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4} \end{aligned}$$

e passando all'antitrasformata segue

$$\begin{aligned} X(t) &= L^{-1}[x(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right] = \\ &= 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}\right] = \\ &= 5e^{-t} - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Applicazione alle equazioni integrali

Un'equazione integrale è un'equazione avente la forma

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)Y(u)du$$

dove $F(t)$ e $K(u,t)$ sono date, a e b sono costanti note o funzioni di t e la funzione $Y(t)$ che compare sotto segno di integrale deve invece essere determinata. La funzione $K(u,t)$ è detta anche *nucleo* dell'equazione integrale. Se a e b sono delle costanti, l'equazione è detta anche *equazione integrale di Fredholm.* Se a è una costante, mentre $b=t$, l'equazione è detta *equazione integrale di Volterra.*

È possibile trasformare un'equazione differenziale lineare in un'equazione integrale.
Un'equazione integrale particolarmente importante ai fini applicativi è

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du.$$

Quest'equazione è del *tipo convoluzione* e può essere scritta nella forma

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t).$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri, assumendo che esistano $L[F(t)] = f(s)$ e $L[K(t)] = k(s)$, si ha

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s) \qquad \text{o} \qquad \boxed{y(s) = \frac{f(s)}{1-k(s)}.}$$

La soluzione cercata può essere trovata applicando l'antitrasformata di Laplace.
Prima di vedere alcuni esempi sulle equazioni integrali consideriamo il seguente esercizio che risulterà utile successivamente.

Esempio 3.19.8 *Dimostrare che*

$$\int_0^t \int_0^v F(u)dudv = \int_0^t (t-u)F(u)du.$$

Per il teorema di convoluzione, se $f(s) = L[F(t)]$, si ha

$$L\left[\int_0^t (t-u)F(u)du\right] = L[t]L[F(t)] = \frac{f(s)}{s^2}.$$

Allora

$$\int_0^t (t-u)F(u)du = L^{-1}\left[\frac{f(s)}{s^2}\right] = \int_0^t \int_0^v F(u)du\ dv.$$

Esempio 3.19.9 *Trasformare l'equazione differenziale*

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4\sin t,$$

$$Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = -2$$

in un'equazione integrale.

Procedimento 1. *Poniamo* $Y''(t) = V(t)$. *Allora usando la formula dell'esempio 3.19.8 e le condizioni* $Y'(0) = 1$ *e* $Y(0) = 1$,

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \int_0^t V(u)du - 2, \\ Y(t) &= \int_0^t (t-u)V(u)du - 2t + 1. \end{aligned}$$

Così l'equazione differenziale diventa

$$V(t) - 3\int_0^t V(u)du + 6 + 2\int_0^t (t-u)V(u)du - 4t + 2 = 4\sin t$$

da cui si ha

$$V(t) = 4\sin t + 4t - 8 + \int_0^t [3 - 2(t-u)]V(u)du.$$

Procedimento 2. *Integrando entrambi i membri dell'equazione differenziale assegnata, si ha*

$$\int_0^t \left[Y''(u) - 3Y'(u) + 2Y(u)\right] du = \int_0^t 4\sin u du$$

oppure

$$Y'(t) - Y'(0) - 3Y(t) + 3Y(0) + 2\int_0^t Y(u)du = 4 - 4\cos t.$$

Sostituendo le condizioni iniziali assegnate questa diventa

$$Y'(t) - 3Y(t) + 2\int_0^t Y(u)du = -1 - 4\cos t.$$

Integrando nuovamente tra 0 *e* t*, come prima, si ha*

$$Y(t) - Y(0) - 3\int_0^t Y(u)du + 2\int_0^t (t-u)Y(u)du = -t - 4\sin t.$$

oppure

$$Y(t) + \int_0^t [2(t-u) - 3]Y(u)du = 1 - t - 4\sin t.$$

Esempio 3.19.10 *Trasformare l'equazione differenziale*

$$Y''(t) + (1-t)Y'(t) + e^{-t}Y(t) = t^3 - 5t,$$

$$Y(0) = -3, \qquad Y'(0) = 4$$

in un'equazione integrale.

Procedimento 1. *Posto* $Y''(t) = V(t)$ *e sfruttando le condizioni iniziali* $Y(0) = -3$ *e* $Y'(0) = 4$*, si ha, come nell'esempio 3.19.9,*

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \int_0^t V(u)du + 4, \\ Y(t) &= \int_0^t (t-u)V(u)du + 4t - 3. \end{aligned}$$

Così l'equazione differenziale diventa

$$V(t) + (1-t)\int_0^t V(u)du + 4(1-t) +$$

$$+ e^{-t}\int_0^t (t-u)V(u)du + 4te^{-t} - 3e^{-t} = t^3 - 5t$$

che può essere scritta nella forma

$$V(t) = t^3 - t - 4 + 3e^{-t} - 4te^{-t} + \int_0^t [t - 1 - e^{-t}(t-u)]V(u)du.$$

Procedimento 2. *Integrando entrambi i membri dell'equazione differenziale assegnata, si ha*

$$\int_0^t Y''(u)du + \int_0^t (1-u)Y'(u)du +$$

$$+\int_0^t e^{-u}Y(u)du = \int_0^t (u^3 - 5u)du.$$

Integrando per parti nel secondo integrale, si ha

$$Y'(t) - Y'(0) + \left\{ (1-u)Y(u)]_0^t + \int_0^t Y(u)du \right\} +$$

$$+\int_0^t e^{-u}Y(u)du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

cioè

$$Y'(t) - Y'(0) + (1-t)Y(t) - Y(0) + \int_0^t Y(u)du + \int_0^t e^{-u}Y(u)du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

oppure

$$Y'(t) + (1-t)Y(t) + \int_0^t Y(u)du + \int_0^t e^{-u}Y(u)du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 1.$$

Un' ulteriore integrazione tra 0 *e* t *fornisce*

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t (1-u)Y(u)du + \int_0^t (t-u)Y(u)du +$$

$$+\int_0^t (t-u)e^{-u}Y(u)du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t$$

che può essere scritta nella forma

$$Y(t) + \int_0^t \left[1 + t - 2u + (t-u)e^{-u} \right] Y(u)du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t - 3.$$

Esempio 3.19.11 *Risolvere l'equazione integrale*

$$Y(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-u)Y(u)du.$$

L'equazione integrale può essere scritta nella forma

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \sin t.$$

Allora prendendo la trasformata di Laplace e usando il teorema di convoluzione, si ha, per $y(s) = L[Y(t)]$,

$$y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{y(s)}{s^2+1}$$

risolvendo

$$y(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

e quindi

$$\begin{aligned} Y(t) &= L^{-1}[y(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}\right] = \\ &= 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = \\ &= t^2 + \frac{1}{12}t^4. \end{aligned}$$

Esempio 3.19.12 *Risolvere l'equazione integrale*

$$\int_0^t Y(t-u)Y(u)du = 16\sin 4t \tag{3.18}$$

Questa equazione può essere scritta nella forma

$$Y(t) * Y(t) = 16\sin 4t.$$

Prendendo la trasformata di Laplace si ha, per $y(s) = L[Y(t)]$,

$$(y(s))^2 = \frac{64}{s^2+16}$$

oppure

$$y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}}.$$

Allora

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = \pm 8J_0(4t)$$

dove $J_0(t)$ *è la funzione di Bessel di ordine zero che abbiamo già visto a pagina 102. Così*

$$Y(t) = 8J_0(4t)$$

e

$$Y(t) = -8J_0(4t)$$

sono entrambe soluzioni dell'equazione integrale (3.18).

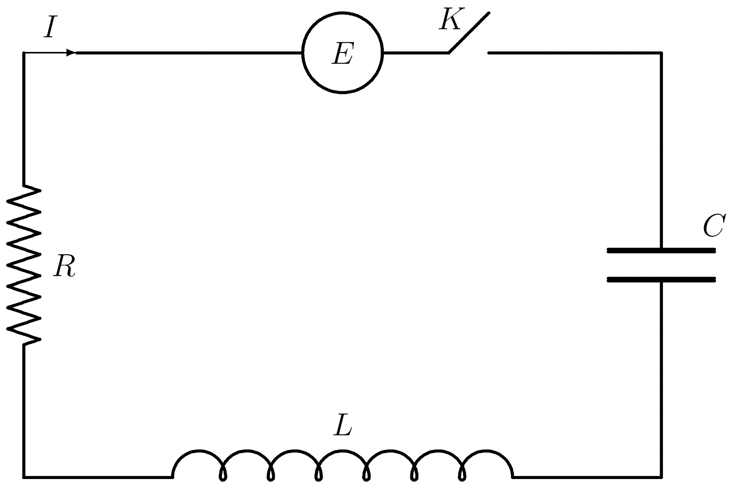

Figura 3.7:

Applicazioni ai circuiti elettrici

Un circuito elettrico semplice (vedere figura 3.7) è formato dai seguenti elementi, collegati in serie con un interruttore K:

1. un generatore che fornisce una forza elettromotrice f.e.m. E (misurata in *Volt*);

2. un resistore avente resistenza R (misurata in *Ohm*);

3. un induttore avente induttanza L (misurata in *Henry*);

4. un condensatore avente capacità C (misurata in *Farad*).

Quando si chiude il circuito, una carica Q (misurata in *Coulomb*) si trasferisce alle armature del condensatore. Il flusso di tale carica è definito da

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

ed è detto *corrente* (misurata in *Ampere* se il tempo è misurato in secondi).

Un importante problema da risolvere in questi circuiti è determinare la carica del condensatore e la corrente in funzione del tempo. A tal fine si introduce la caduta di potenziale (o di tensione) attraverso gli elementi del circuito:

a) caduta di potenziale attraverso un resistore:
$$RI = R\frac{dQ}{dt};$$

b) caduta di potenziale attraverso un induttore:
$$L\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2};$$

c) caduta di potenziale attraverso un condensatore:
$$\frac{Q}{C}$$

d) Caduta di potenziale attraverso un generatore:
$$-E.$$

Valgono le seguenti *Leggi di Kirchhoff*:

1. la somma algebrica delle correnti che fluiscono verso un nodo qualunque (per esempio A nella figura 3.8) è sempre uguale a zero;

2. la somma algebrica delle cadute di potenziale lungo un qualsiasi circuito chiuso (per esempio $ABDFGHA$ nella figura 3.8) è sempre uguale a zero.

Tenendo conto delle relazioni *a*), *b*), *c*) e *d*) e della seconda legge di Kirchhoff applicata al circuito in figura risulta:
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} - E = 0$$
ovvero
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E.$$

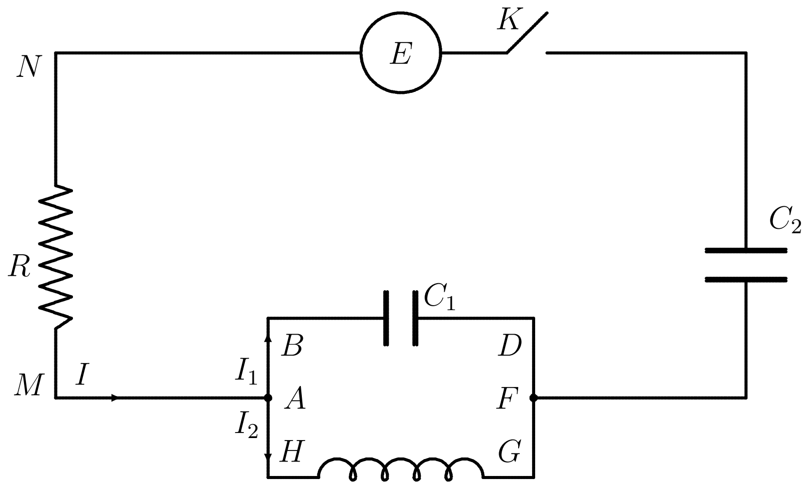

Figura 3.8:

Problema 3.19.1 *Un induttore di* 2 *henry, un resistore di* 16 *ohm ed un condensatore di* 0.02 *farad sono collegati in serie con una f.e.m. di* E *volt, come mostrato in figura 3.9. Per* $t = 0$ *la carica del condensatore e la corrente nel circuito sono nulle. Determinare la carica e la corrente in ogni istante* $t > 0$ *se*

a) $E = 300$ *volt;*

b) $E = 100 \sin 3t$ *volt.*

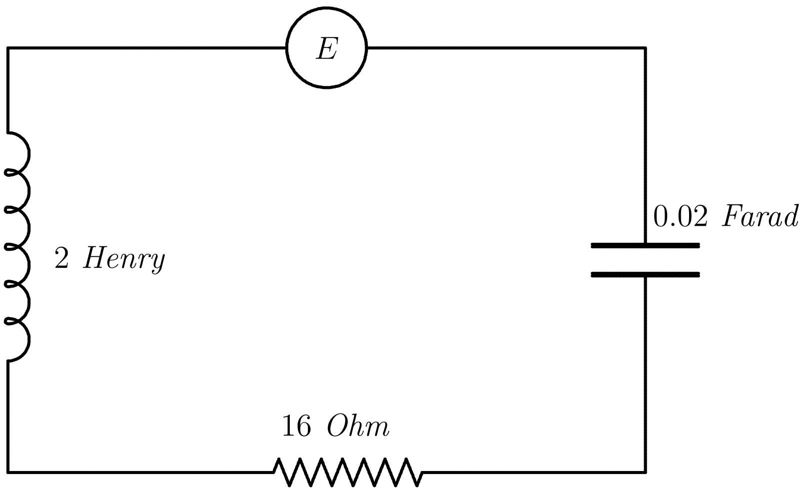

Figura 3.9:

Applicando la seconda legge di Kirchhoff possiamo scrivere

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0.02} = E.$$

ovvero, tenendo conto che $I = dQ/dt$*:*

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.02} = E. \tag{3.19}$$

Le condizioni iniziali sono:

$$Q(0) = 0 \qquad\qquad I(0) = Q'(0) = 0. \tag{3.20}$$

Applicando la trasformata di Laplace ad ambo i membri di (3.19) segue:

$$2L\left[\frac{d^2Q}{dt^2}\right] + 16L\left[\frac{dQ}{dt}\right] + \frac{1}{0.02}L[Q] = L[E]. \tag{3.21}$$

a) *L'equazione (3.21) si scrive*

$$(s^2q(s) - sQ(0) - Q'(0)) + 8(sq(s) - Q(0)) + 25q(s) = \frac{150}{s}.$$

Isolando $q(s)$ e tendendo conto delle condizioni iniziali (3.20) si ha:

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{150}{s(s^2+8s+25)} = \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6s+48}{s^2+8s+25} = \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)+24}{(s+4)^2+9} = \\ &= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{24}{(s+4)^2+9}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} Q(t) &= 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t \\ I(t) &= Q'(t) = 50e^{-4t}\sin 3t; \end{aligned}$$

b) Se $E = 100\sin 3t$ la (3.21) diventa

$$(s^2+8s+25)q(s) = \frac{150}{s^2+9}$$

e

$$\begin{aligned} q(s) &= \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)} = \\ &= \frac{75}{26}\,\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\,\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\,\frac{1}{(s+4)^2+9} + \\ &\quad + \frac{75}{52}\,\frac{s+4}{(s+4)^2+9}. \end{aligned}$$

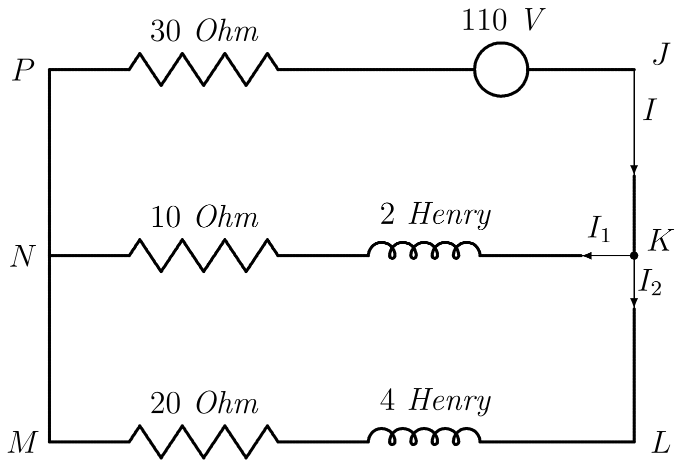

Figura 3.10:

Allora

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\sin 3t + \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t = \\ &= \frac{25}{52}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\sin 3t) \\ I(t) &= Q'(t) = \frac{25}{52}(2\cos 3t + 3\sin 3t) + \\ & -\frac{25}{52}e^{-4t}(7\sin 3t - 6\cos 3t). \end{aligned}$$

Problema 3.19.2 *Assegnata la rete in figura 3.10 determinare la corrente nei vari rami assumendo nulle le correnti iniziali.*

Percorriamo i circuiti chiusi $KLMNK$ e $JKNPJ$ in senso orario. Percorrendo questi circuiti consideriamo le cadute di tensione positive quando si va contro corrente. Un aumento di tensione è considerato come una caduta di tensione negativa. Se I è la corrente nel circuito $NPJKN$ questa si divide, nel nodo K, in I_1 e I_2 in modo tale che $I =$

$I_1 + I_2$ (prima legge di Kirchhoff). Applichiamo ora la seconda legge di Kirchhoff ai circuiti $KLMNK$ e $JKNPJ$, ottenendo rispettivamente:

$$\begin{cases} -10I_1 - 2\dfrac{dI_1}{dt} + 4\dfrac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0 \\ \\ 30I - 110 + 2\dfrac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -5I_1 - \dfrac{dI_1}{dt} + 2\dfrac{dI_2}{dt} + 10I_2 = 0 \\ \\ \dfrac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 = 55 \end{cases}$$

con condizioni iniziali $I_1(0) = I_2(0) = 0$. Passando alle trasformate di Laplace e usando le condizioni iniziali segue:

$$-5i_1 - (si_1 - I_1(0)) + 2(si_2 - I_2(0)) + 10i_2 = 0$$

$$(si_1 - I_1(0)) + 20i_1 + 15i_2 = \frac{55}{s}$$

meglio

$$(s+5)i_1 - (2s+10)i_2 = 0$$

$$(s+20)i_1 + 15i_2 = \frac{55}{s}$$

da cui

$$\begin{aligned} i_1 &= 2i_2 \\ i_2 &= \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55} \end{aligned} \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 1 - e^{-55t/2} \\ I_1 &= 2 - 2e^{-55t/2} \\ I &= I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}. \end{aligned}$$

Equazioni differenziali alle derivate parziali

Assegnata la funzione $U(x,t)$, $a \le x \le b$, $t > 0$, deriviamo preliminarmente le trasformate di Laplace delle derivate parziali di U rispetto a t e x (ovviamente assumiamo implicitamente che U soddisfa le necessarie condizioni che garantiscono l'esistenza delle trasformate di Laplace).

$$\begin{aligned}
\underline{L\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right]} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)dt = \\
&= \lim_{p\to+\infty}\int_0^p e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}(x,t)dt = \\
&= \lim_{p\to+\infty}\left(\left[e^{-st}U(x,t)\ \right]_0^p + s\int_0^p e^{-st}U(x,t)dt\right) = \\
&= s\int_0^{+\infty} e^{-st}U(x,t)dt - U(x,0) = \\
&= su(x,s) - U(x,0) = \ \underline{su - U(x,0)}
\end{aligned}$$

dove si è posto

$$u = u(x,s) = L[U(x,t)].$$

In definitiva

$$\boxed{L\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] = sL[U(x,t)] - U(x,0).}$$

Ora

$$\begin{aligned}
\underline{L\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]} &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}(x,t)dt = \\
&= \frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-st}U(x,t)dt = \\
&= \underline{\frac{d}{dx}L[U(x,t)]}.
\end{aligned}$$

Dalle formule viste sopra è facile ricavare le trasformate di Laplace per le derivate seconde. Infatti posto

$$V = \frac{\partial U}{\partial t}$$

si ha

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right] &= L\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right] = sL[V] - V(x,0) = \\ &= sL\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] - \frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \\ &= s\left\{sL[U(x,t)] - U(x,0)\right\} - \frac{\partial U}{\partial t}(x,t)\Big|_{t=0} = \\ &= s^2 L[U(x,t)] - sU(x,0) - \frac{\partial U}{\partial t}(x,0). \end{aligned}$$

Dunque

$$\boxed{L\left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right] = s^2 L[U(x,t)] - sU(x,0) - \frac{\partial U}{\partial t}(x,0).}$$

In modo più semplice si trova invece

$$\boxed{L\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] = \frac{d^2}{dx^2} L[U(x,t)].}$$

Esempio 3.19.13 *Risolvere la seguente equazione*

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

con le seguenti condizioni iniziali

$$U(0,t) = 0 \qquad\qquad U(5,t) = 0$$

$$U(x,0) = 10\sin 4\pi x, \qquad 0 \le x \le 5.$$

Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione data

$$L\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] = 2L\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right].$$

Poniamo $u(x,s) = L[U(x,t)]$ *e poichè abbiamo visto*

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial U}{\partial t}\right] &= su(x,s) - U(x,0) \\ L\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right] &= \frac{d^2}{dx^2}u(x,s) \end{aligned}$$

l'equazione diventa

$$su(x,s) - 10\sin 4\pi x = 2\frac{d^2}{dx^2}u(x,s)$$

cioè

$$2u'' - su = -10\sin 4\pi x.$$

Calcoliamo ora la soluzione di tale equazione differenziale ordinaria del secondo ordine considerando prima il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata.

$$2\lambda^2 - s = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm\sqrt{s/2}$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Visto il termine noto dell'equazione allora cerchiamo una soluzione del tipo

$$v(x) = A\sin 4\pi x$$

con A *costante da determinare. Imponiamo quindi che* $v(x)$ *sia soluzione dell'equazione completa*

$$\begin{aligned} v(x) &= A\sin 4\pi x \\ v'(x) &= 4\pi A\cos 4\pi x \\ v''(x) &= -16\pi^2 A\sin 4\pi x. \end{aligned}$$

Deve essere

$$-32\pi^2 A \sin 4\pi x - sA \sin 4\pi x = -10 \sin 4\pi x$$

da cui ricaviamo

$$A = \frac{10}{s + 32\pi^2}.$$

La soluzione dell'equazione differenziale è

$$u(x,s) = c_1 e^{+\sqrt{s/2x}} + c_2 e^{-\sqrt{s/2x}} + \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2}$$

Determiniamo ora le costanti c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali del problema

$$\begin{aligned} u(0,s) &= L[U(0,t)] = 0 \\ u(5,s) &= L[U(5,t)] = 0. \end{aligned}$$

Deve essere quindi $u(0,s) = u(5,s) = 0$ per ogni s.

$$\begin{aligned} u(0,s) &= c_1 + c_2 = 0 \\ u(5,s) &= c_1 e^{+\sqrt{s/2}5} + c_2 e^{-\sqrt{s/2}5} = 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava facilmente che entrambe le costanti sono nulle. Quindi

$$u(x,s) = \frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2}.$$

Calcoliamo l'antitrasformata di Laplace di $u(x,s)$:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= L^{-1}[u(x,s)] = L^{-1}\left[\frac{10 \sin 4\pi x}{s + 32\pi^2}\right] = \\ &= 10 \sin 4\pi x L^{-1}\left[\frac{1}{s + 32\pi^2}\right] \end{aligned}$$

da cui

$$U(x,t) = 10 \sin 4\pi x e^{-32\pi^2 t.}$$

3.20. Esercizi svolti

Nel seguito sono riportati alcuni esercizi svolti relativi agli argomenti trattati nei primi tre capitoli con l'avviso che molti noiosi (e/o semplici) calcoli sono stati omessi per motivi di brevità (e per non togliere agli studenti la soddisfazione di rifarli per scoprire i non infrequenti errori).

Esercizio 3.20.1 *Calcolare il seguente integrale:*

$$\oint_C \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}\, dz,$$

dove C *denota la circonferenza* $\{x+\iota y; x^2+y^2-4x+3=0\}$ *positivamente orientata.*

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che la circonferenza C ha centro nel punto di coordinate $(2,0)$ e raggio pari a 1. La funzione

$$f(z) = \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}$$

ha un unico polo doppio in $z=2$ che è interno a C, quindi l'integrale dell'esercizio è uguale a $2\pi\iota R(f,2)$. Calcoliamo quindi il residuo di $f(z)$ in $z=2$.

$$\begin{aligned} R(f(z),2) &= \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left((z-2)^2\, \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}\right) = \\ &= \lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(z^2(2z-1)^2\right) = \\ &= \lim_{z\to 2}\Big[\, 2z(2z-1)^2 + 4z^2(2z-1)\Big] = 84. \end{aligned}$$

Quindi

$$\oint_C \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}\, dz = 168\pi\iota.$$

Esercizio 3.20.2 *Calcolare il seguente integrale:*

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$$

dove $\mathcal{C}$ è la curva:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z-(1+\iota)|^2 = 2 \right\}$$

positivamente orientata.

Svolgimento. La curva $\mathcal{C}$ è la circonferenza di centro nel punto $1+\iota$ e raggio $\sqrt{2}$. I poli della funzione integranda sono

$$\begin{array}{ll} z = 1 & \text{polo doppio interno a } \mathcal{C} \\ z = \iota & \text{polo semplice interno a } \mathcal{C} \\ z = -\iota & \text{polo semplice esterno a } \mathcal{C}. \end{array}$$

Pertanto

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi\iota[R(f,\iota) + R(f,1)].$$

$$\begin{aligned} R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota}(z-\iota)\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \\ &= \lim_{z\to\iota}\frac{1}{(z+\iota)(z-1)^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f,1) &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

In definitiva

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi\iota\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = -\frac{\pi\iota}{2}.$$

Esercizio 3.20.3 *Calcolare il seguente integrale*

$$\oint_C (\overline{z}-a)^{-1}(b-\overline{z})^{-1}(z^2+z^{-2})dz$$

dove C è la circonferenza che ha centro nell'origine e raggio r, con

$$0 < |a| < r < |b|.$$

Svolgimento. Poichè la curva C è una circonferenza di centro nell'origine e raggio r allora se $z \in C$ si ha che $z\overline{z} = r^2$ quindi l'integrale da calcolare può essere riscritto nel seguente modo:

$$\oint_C \frac{z^4+1}{(z\overline{z}-za)(bz-z\overline{z})}dz = \oint_C \frac{z^4+1}{(r^2-za)(bz-r^2)}dz.$$

Quest'ultimo integrale può essere calcolato utilizzando il teorema dei residui. La funzione integranda ha come poli i punti r^2/a e r^2/b. Si può agevolmente verificare che solo il secondo polo è interno alla circonferenza C (infatti ha modulo minore di r), quindi

$$\oint_C \frac{z^4+1}{(r^2-za)(bz-r^2)}dz = 2\pi\iota R(f, r^2/b).$$

$$\begin{aligned} R(f, r^2/b) &= \lim_{z \to r^2/b} \frac{z^4+1}{r^2-za} = \\ &= \frac{r^8+b^4}{b^2r^2(b-a)}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.20.4 *Dimostrare che*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{12};$$

Svolgimento. Se $z = e^{i\theta}$ allora

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \cos 3\theta &= \frac{e^{3\iota\theta}+e^{-3\iota\theta}}{2} = \frac{z^3+z^{-3}}{2}. \end{aligned}$$

Inoltre $dz = \iota z d\theta$. Sostituendo nell'integrale della traccia si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta &= \oint_C \frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-2(z+z^{-1})}\frac{dz}{\iota z} = \\ &= -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz \end{aligned}$$

dove C è il cerchio che ha centro nell'origine e raggio 1. La funzione integranda ha un polo di ordine 3 in $z = 0$ e un polo semplice in $z = \frac{1}{2}$ interni a C.
Il residuo in $z = 0$ è:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3 \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = \frac{21}{8}.$$

Il residuo in $z = \frac{1}{2}$ è

$$\lim_{z\to 1/2} \left\{\left(z-\frac{1}{2}\right) \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\right\} = -\frac{65}{24}.$$

Allora

$$-\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}dz = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8}-\frac{65}{24}\right\} = \frac{\pi}{12}.$$

Esercizio 3.20.5 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Svolgimento. La funzione integranda è pari, quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Consideriamo quindi la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

e, applicando il teorema dei residui risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi\iota \sum R(f, z_k)$$

dove z_k indica i poli della funzione $f(z)$ che si trovano nel semipiano avente parte immaginaria positiva. I poli di $f(z)$ sono le radici quarte di -1:

$$z_0 = e^{\iota\pi/4} \qquad z_1 = e^{3\iota\pi/4}$$

$$z_2 = e^{5\iota\pi/4} \qquad z_3 = e^{7\iota\pi/4}.$$

Solo z_0 e z_1 hanno parte immaginaria positiva.

$$\begin{aligned} R(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{1}{z^4+1} = \\ &= \frac{1}{4z_0^3} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+\iota) \\ R(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\frac{1}{z^4+1} = \\ &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1+\iota) \end{aligned}$$

Il risultato è quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \pi\iota\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-\iota+1-\iota) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Esercizio 3.20.6 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx.$$

Svolgimento. Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)}.$$

I poli di tale funzione sono:

$$\begin{aligned} &z_1 = \iota && \text{di molteplicità } 2 \\ &z_2 = -\iota && \text{di molteplicità } 2 \\ &z_3 = 2\iota && \text{di molteplicità } 1 \\ &z_4 = -2\iota && \text{di molteplicità } 1. \end{aligned}$$

L'integrale da calcolare è uguale a $2\pi\iota$ per la somma dei residui dei poli della funzione $f(z)$ aventi parte immaginaria positiva. In questo caso solo z_1 e z_3 hanno parte immaginaria positiva.

$$\begin{aligned} R(f,\iota) &= \lim_{z\to\iota}\frac{d}{dz}\left[(z-\iota)^2\frac{z^2}{(z+\iota)^2(z-\iota)^2(z^2+4)}\right] = \\ &= \lim_{z\to\iota}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+\iota)^2(z^2+4)}\right] = \\ &= \lim_{z\to\iota}\frac{2z(z+\iota)(z^2+4)-z^2[2(z+\iota)(z^2+4)+2z(z+\iota)^2]}{(z+\iota)^4(z^2+4)^2} = \\ &= \lim_{z\to\iota}\frac{2z(z^2+4)-z^2[2(z^2+4)+2z(z+\iota)]}{(z+\iota)^3(z^2+4)^2} = \frac{5}{36\iota}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(f,2\iota) &= \lim_{z\to 2\iota}\left[(z-2\iota)\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+2\iota)(z-2\iota)}\right] = \\ &= \lim_{z\to 2\iota}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+2\iota)}\right] = -\frac{1}{9\iota}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\mathrm{dx} &= 2\pi\iota\,[R(f,\iota)+R(f,2\iota)] = \\ &= 2\pi\iota\Big[\frac{5}{36\iota}-\frac{1}{9\iota}\Big] = \frac{\pi}{18}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.20.7 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t)-3Y'(t)+2Y(t)=4t+12e^{-t}, \qquad Y(0)=0, \qquad Y'(0)=6.$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)]-3L[Y'(t)]+2L[Y(t)]=4L[t]+12L[e^{-t}],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$\begin{aligned} s^2 y(s) - 6 - 3sy(s) + 2y(s) &= \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1}, \\ y(s)(s^2 - 3s + 2) &= 6 + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s+1} = \\ &= \frac{6s^3 + 18s^2 + 4s + 4}{s^2(s+1)}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} y(s) &= 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s^2 - 3s + 2)} = \\ &= 2\frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^2(s+1)(s-1)(s-2)}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ha un polo doppio e tre poli semplici quindi ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$\frac{y(s)}{2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= R(y(s), 0) \\ B &= R(sy(s), 0) \\ C &= R(y(s), -1) \\ D &= R(y(s), 1) \\ E &= R(y(s), 2) \end{aligned}$$

Effettuando i calcoli

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{s^3 - 2s^2 - s + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$B = \lim_{s \to 0} \frac{3s^3 + 9s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = 1$$

$$C = \lim_{s\to -1} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s-1)(s-2)} = 1$$

$$D = \lim_{s\to 1} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s+1)(s-2)} = -8$$

$$E = \lim_{s\to 2} \frac{3s^3+9s^2+2s+2}{s^2(s+1)(s-1)} = \frac{11}{2}.$$

Quindi

$$y(s) == \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{16}{s-1} + \frac{11}{s-2}$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$Y(t) = 1 + 2t + 2e^{-t} - 16e^{t} + 11e^{2t}.$$

Esercizio 3.20.8 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione differenziale*

$$Y''(t) - 4Y'(t) + 3Y(t) = F(t), \qquad Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = 0,$$

dove $F(t)$ è una funzione che ammette trasformata di Laplace.

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] - 4L[Y'(t)] + 3L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e $f(s) = L[F(t)]$, e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2y(s) - s - 4sy(s) + 4 + 3y(s) = f(s)$$

$$(s^2 - 4s + 3)y(s) = s - 4 + f(s)$$

quindi

$$y(s) = \frac{s-4}{s^2-4s+3} + \frac{f(s)}{s^2-4s+3}.$$

Osserviamo che possiamo trasformare in fratti semplici il primo addendo a secondo membro, in quanto è indipendente da $F(t)$, per il secondo addendo possiamo scomporre in fratti la funzione che non dipende da $f(s)$ e per antitrasformare il risultato applichiamo il teorema di convoluzione. Quindi

$$y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} + f(s)\left[\frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-1}\right].$$

Calcoliamo i coefficienti A, B, C, e D:

$$A = \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{s-4}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{s-4}{(s-1)(s-3)} = \frac{3}{2}$$

$$C = \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{1}{(s-1)(s-3)} = \frac{1}{2}$$

$$D = \lim_{s\to 1}(s-1)\frac{1}{(s-1)(s-3)} = -\frac{1}{2}$$

Quindi

$$y(s) = -\frac{1}{2(s-3)} + \frac{3}{2(s-1)} + f(s)\left[\frac{1}{2(s-3)} - \frac{1}{2(s-1)}\right].$$

Antitrasformando $y(s)$ si ottiene la soluzione dell'equazione differenziale di partenza

$$\begin{aligned} Y(t) &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + F(t) * e^{3t} + F(t)e^t = \\ &= -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{3e^t}{2} + \int_0^t F(u) * e^{3(t-u)}du + \int_0^t F(u)e^{t-u}du. \end{aligned}$$

Esercizio 3.20.9 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} X'(t) - Z(t) = e^{-t} \\ Y'(t) + Z'(t) = 1 \\ -X(t) + Y'(t) = 0 \\ X(0) = -2 \qquad Y(0) = Z(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema ponendo $x(s) = L[X(t)]$, $y(s) = L[Y(t)]$ e $z(s) = L[Z(t)]$:

$$\begin{cases} L[X'(t)] - L[Z(t)] = L[e^{-t}] \\ L[Y'(t)] + L[Z'(t)] = L[1] \\ -L[X(t)] + L[Y'(t)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) - z(s) = \frac{1}{s+1} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) = \frac{1}{s} \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) + 2 - z(s) = \frac{1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \frac{1}{s} \\ sy(s) - x(s) = 0. \end{cases}$$

Ricaviamo $x(s)$ dalla terza equazione e sostituiamo la sua espressione nelle altre due:

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ s^2y(s) - z(s) = \frac{1}{s+1} - 2 = -\frac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + sz(s) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(s) = sy(s) \\ z(s) = s^2y(s) + \frac{2s+1}{s+1} \\ sy(s) + s^3y(s) + \frac{2s^2+s}{s+1} = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Ora consideriamo solo la terza equazione.

$$s(s^2+1)y(s) = -\frac{2s^2+s}{s+1} + \frac{1}{s} = \frac{1+s-s^2-2s^3}{s(s+1)}$$

Da cui
$$y(s) = \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{s^2(s^2+1)(s+1)}$$
quindi i poli di $y(s)$ sono 0 (polo doppio), -1 e $\pm\iota$ pertanto ammette la seguente scomposizione in fratti semplici
$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{2D(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2E\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$
dove
$$\begin{array}{ll} A & = R(y(s), 0) \\ B & = R(sy(s), 0) \\ C & = R(y(s), -1) \\ D + \iota E & = R(y(s), \iota) \end{array}$$
e inoltre $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Calcoliamo tali coefficienti
$$A = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{(s^2+1)(s+1)} = 0$$
$$B = \lim_{s\to 0} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{(s^2+1)(s+1)} = 1$$
In modo analogo risulta $C = -1/2$, mentre
$$\begin{aligned} D + \iota E \ &= \lim_{s\to\iota} \frac{1 + s - s^2 - 2s^3}{s^2(s+\iota)(s+1)} = \\ &= \frac{1 + \iota + 1 + 2\iota}{-2\iota(\iota+1)} = \\ &= -\frac{3\iota + 2}{2(\iota - 1)} = \frac{1}{4}(-1 + 5\iota). \end{aligned}$$
Quindi $D = -1/4$ ed $E = 5/4$, cosicchè risulta
$$y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)} - \frac{5}{2(s^2+1)}.$$
Pertanto
$$Y(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{5}{2}\sin t.$$

Per calcolare $X(t)$ potremmo ripetere un procedimento analogo (lo studente può farlo per esecizio verificando alla fine che il risultato è lo stesso) oppure ricavare $X(t)$ dalla terza equazione del sistema di partenza poichè

$$X(t) = Y'(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{5}{2}\cos t$$

e quindi calcolare $Z(t)$ dalla prima equazione

$$Z(t) = X'(t) - e^{-t} = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{5}{2}\sin t.$$

Esercizio 3.20.10 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, il seguente sistema di equazioni differenziali*

$$\begin{cases} X'(t) + 2Y(t) = 2X(t) + e^t \\ \\ Y'(t) - X(t) = -Y(t) - e^t \\ \\ X(0) = -1 \qquad Y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace al sistema ponendo $x(s) = L[X(t)]$, $y(s) = L[Y(t)]$ e $z(s) = L[Z(t)]$:

$$\begin{cases} L[X'(t)] + 2L[Y(t)] = 2L[X(t)] + L[e^t] \\ \\ L[Y'(t)] - L[X(t)] = -L[Y(t)] - L[e^t]. \end{cases}$$

Poniamo, come al solito, $x(s) = L[X(t)]$ e $y(s) = L[Y(t)]$:

$$\begin{cases} sx(s) - X(0) + 2y(s) = 2x(s) + \frac{1}{s-1} \\ \\ sy(s) - Y(0) - x(s) = -y(s) - \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)x(s) + 2y(s) = -1 + \frac{1}{s-1} = \frac{2-s}{s-1} \\ \\ -x(s) + (s+1)y(s) = 1 - \frac{1}{s-1} = \frac{s-2}{s-1} \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema lineare decidiamo di utilizzare la regola di Cramer. Calcoliamo prima il determinante della matrice dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} s-2 & 2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s-2)(s+1)+2 = s^2 - s = s(s-1)$$

quindi

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{2-s}{s-1} & 2 \\ & \\ \frac{s-2}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}}{s(s-1)} = \\ &= \frac{(s+1)(2-s)-2(s-2)}{s(s-1)^2} = \frac{6-s-s^2}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $x(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$x(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{6-s-s^2}{(s-1)^2)} = 6$$

$$B = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds} \frac{6-s-s^2}{s} = -7$$

$$C = \lim_{s\to 1} \frac{6-s-s^2}{s} = 4.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{7}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per $y(s)$:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{\begin{vmatrix} s-2 & \frac{2-s}{s-1} \\ & \\ -1 & \frac{s-2}{s-1} \end{vmatrix}}{s(s-1)} = \\ &= \frac{(s-2)^2+(2-s)}{s(s-1)^2} = \frac{s^2-5s+6}{s(s-1)^2}. \end{aligned}$$

La funzione $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

dove

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{s^2 - 5s + 6}{(s-1)^2)} = 6$$

$$B = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\frac{s^2 - 5s + 6}{s} = -5$$

$$C = \lim_{s\to 1} \frac{s^2 - 5s + 6}{s} = 2.$$

Pertanto

$$x(s) = \frac{6}{s} - \frac{5}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

la soluzione del sistema di equazioni differenziali è

$$X(t) \quad = 6 - 7e^t + 4te^t$$

$$Y(t) \quad = 6 - 5e^t + 2te^t.$$

Esercizio 3.20.11 *Utilizzare le trasformate di Laplace per risolvere la seguente equazione differenziale:*

$$Y''(t) + 4Y(t) = F(t), \qquad Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1$$

dove

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione da risolvere:

$$L[Y''(t)] + 4L[Y(t)] = L[F(t)],$$

da cui, posto $y(s) = L[Y(t)]$ e sostituendo le condizioni iniziali in 0, si ha

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + 4y(s) = L[F(t)]$$

$$s^2 y(s) - 1 + 4y(s) = L[F(t)]$$

A questo punto si può calcolare la trasformata di Laplace della funzione $F(t)$ applicando direttamente la definizione:

$$\begin{aligned} L[F(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}F(t)dt = \\ &= \int_0^1 e^{-st}dt = \frac{1-e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

L'equazione algebrica diventa

$$(s^2+4)y(s) = 1 + \frac{1-e^{-s}}{s} = \frac{s+1-e^{-s}}{s}.$$

da cui

$$y(s) = \frac{s+1-e^{-s}}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{s(s^2+4)}.$$

Poniamo per comodità

$$g(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$$

e scomponiamo in fratti semplici $g(s)$, funzione che ammette un polo semplice $s = 0$ e due poli complessi coniugati $s = \pm 2\iota$:

$$g(s) = \frac{A}{s} + \frac{2B(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2} - \frac{2C\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

dove

$$A = R(g(s), 0) = \frac{1}{4}$$

$\alpha = 0$, $\beta = 2$ e inoltre

$$B + \iota C = R(g(s), 2\iota) = \lim_{s\to 2\iota} \frac{1}{s(s+2\iota)} = -\frac{1}{8}.$$

In definitiva

$$g(s) = \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)}$$

e quindi

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)} - \frac{e^{-s}}{4s}\frac{se^{-s}}{4(s^2+4)}.$$

L'antitrasformata delle due funzioni dove compare il fattore e^{-s} è data dalle seguenti funzioni a tratti:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{4s}\right] = \begin{cases} \frac{1}{4} & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$$

e

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{4(s^2+4)}\right] = \begin{cases} \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ 0 & 0 < t < 1. \end{cases}$$

La soluzione $Y(t)$ è quindi:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4} & 0 < t < 1 \end{cases}$$

da cui semplificando ulteriormente:

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos 2(t-1) & t \geq 1 \\ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4} & 0 < t < 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.20.12 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integrale*

$$Y(t) = \cosh 2t + \int_0^t (t-u)Y(u)du.$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione integrale ponendo $y(s) = L[Y(t)]$.

$$L[Y(t)] = L[\cosh 2t] + L\left[\int_0^t (t-u)Y(u)du\right]$$

Applicando il teorema di convoluzione abbiamo che il secondo addendo a secondo membro è proprio la convoluzione tra le funzioni $G(t) = t$ e $F(t) = Y(t)$ pertanto la trasformata di Laplace è il prodotto delle trasformate di Laplace delle funzioni t e $Y(t)$:

$$y(s) = \frac{s}{s^2-4} + \frac{y(s)}{s^2}$$

quindi

$$y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{s}{s^2-4}$$

da cui

$$y(s) = \frac{s^3}{(s^2-1)(s^2-4)}.$$

I poli di $y(s)$ sono ± 1 e ± 2 pertnato $y(s)$ ammette la seguente scomposizione in fratti semplici

$$y(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+2}.$$

Calcoliamo i coefficienti della scomposizione:

$$A = \lim_{s\to 1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$B = \lim_{s\to -1} \frac{s^3}{(s+1)(s^2-4)} = -\frac{1}{6}$$

$$C = \lim_{s\to 2} \frac{s^3}{(s+2)(s^2-1)} = \frac{2}{3}.$$

Si può infine agevolmente verificare che $D = C$ quindi

$$y(s) = -\frac{1}{6(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)} + \frac{2}{3(s-2)} + \frac{2}{3(s+2)}.$$

Quindi

$$Y(t) = L^{-1}[y(s)] = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{t} + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{2t}.$$

Esercizio 3.20.13 *Risolvere, utilizzando le trasformate di Laplace, la seguente equazione integro-differenziale*

$$Y'(t) = \int_0^t \cos(t-u)Y(u)du$$

con condizione iniziale $Y(0) = 1$.

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione assegnata ponendo $y(s) = L[Y(t)]$

$$L[Y'(t)] = L\left[\int_0^t \cos(t-u)Y(u)du\right]$$

da cui, applicando il teorema di convoluzione:

$$sy(s) - 1 = \frac{sy(s)}{s^2+1}$$

$$sy(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = 1$$

$$y(s) = \frac{s^2+1}{s^3}.$$

In questo caso la scomposizione in fratti semplici è immediata

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}.$$

e anche la soluzione si trova semplicemente

$$Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2.$$