Capitolo 5

Appendice e Serie di Potenze

5.1. Funzioni analitiche e serie di potenze

Richiamiamo che una serie reale è una somma formale di infiniti termini

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \qquad u_k \in \mathbb{R}$$

tale serie è anche denotata con

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{5.1}$$

o più semplicemente $\sum_k u_k$. Diremo che la serie ora definita *converge a* $u \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = u.$$

Il numero

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

si chiama *Somma parziale n-esima.* In altri termini la serie converge a u se e solo se la successione $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente ed ha limite u.

5.2. Criterio di convergenza di Cauchy

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) La serie reale (5.1) è convergente;

b)

$$\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni' \quad \forall n > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=1}^{p} u_{n+i} \right| < \varepsilon.$$

5.3. Serie di numeri complessi

Diamo adesso una definizione di convergenza e stabiliamo un criterio di Cauchy per la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \tag{5.2}$$

dove i b_k sono numeri complessi. Tenuto conto che b_k può essere decomposto in una parte reale ed una immaginaria, cioè

$$b_k = u_k + \iota v_k$$

possiamo anche scrivere

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \iota \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Diremo che la serie (5.2) converge alla somma b e scriveremo

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$$

se e solo se $b = u + \iota v$ dove u, v soddisfano:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u \qquad \sum_{k=0}^{\infty} v_k = v.$$

È banale osservare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$$

nel senso ora dato se e solo se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = b$$

dove il limite complesso ha la definizione standard già vista.

5.4. Criterio di convergenza di Cauchy complesso

La serie complessa (5.2) è convergente se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni' \quad \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=1}^{p} b_{n+j} \right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$) Poichè $\sum_k b_k$ è convergente allora sono convergenti anche le serie $\sum_k u_k$ e $\sum_k v_k$. Applicando il criterio di Cauchy ad entrambe le serie, abbiamo che fissato $\varepsilon/2 > 0$ esistono $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tali che

$$\forall n > n'_\varepsilon, p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=1}^{p} u_{n+j} \right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n > n''_\varepsilon, p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=1}^{p} v_{n+j} \right| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

in particolare per $n > n_0 = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$:

$$\left| \sum_{j=1}^{p} u_{n+j} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad \left| \sum_{j=1}^{p} v_{n+j} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$ allora

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^{p} b_{n+j} \right| &= \left| \sum_{j=1}^{p} (u_{n+j} + \iota v_{n+j}) \right| = \\
&= \left| \sum_{j=1}^{p} u_{n+j} + \iota \sum_{j=1}^{p} v_{n+j} \right| \leq \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^{p} u_{n+j} \right| + |\iota| \left| \sum_{j=1}^{p} v_{n+j} \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Per dimostrare che $\sum_k b_k$ converge mostriamo attraverso il criterio di Cauchy reale che $\sum_k u_k$ e $\sum_k v_k$ sono convergenti. Sia ε un assegnato numero reale positivo. Per ipotesi esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\left| \sum_{j=1}^{p} b_{n+j} \right| < \varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon, p \in \mathbb{N}$$

ma poichè $\sum_{j=1}^{p} u_{n+j}$ è la parte reale del numero complesso $\sum_{j=1}^{p} b_{n+j}$ e pertanto

$$\left|\sum_{j=1}^{p} u_{n+j}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{p} b_{n+j}\right| < \varepsilon.$$

Analoga considerazione vale per $\sum_{j=1}^{p} v_{n+j}$, quindi il teorema è dimostrato. □

5.5. Convergenza assoluta

Diremo che la serie complessa $\sum_k b_k$ è *assolutamente convergente* se e solo se la serie di numeri reali non negativi $\sum_k |b_k|$ è convergente. È molto facile ottenere la convergenza di una serie piuttosto che la convergenza assoluta, infatti nel secondo caso bisogna sommare infiniti numeri positivi per ottenere una somma finita e non vi è alcuna speranza che un'operazione di sottrazione "aiuti la convergenza".
Per esempio la serie armonica alternata

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

converge a $\log 2$, mentre la serie armonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

è divergente. Il prossimo teorema prova che la proprietà di assoluta convergenza àbbastanza forte da garantire la convergenza in senso ordinario.

Teorema 5.5.1 *Se la serie complessa (5.2) converge assolutamente allora è convergente.*

Dimostrazione. Prima notiamo che

$$\left|\sum_{j=1}^{p} b_{n+j}\right| \leq \sum_{j=1}^{p} |b_{n+j}| = \left|\sum_{j=1}^{p} |b_{n+j}|\right|.$$

Ora se la serie converge assolutamente, dal criterio di Cauchy possiamo affermare che la somma

$$\left|\sum_{j=1}^{p} |b_{n+j}|\right|$$

può essere resa arbitrariamente piccola, purchè n sia sufficientemente grande. Ne consegue che ciò è anche vero per la somma

$$\left|\sum_{j=1}^{p} b_{n+j}\right|$$

e pertanto, sempre in virtù del criterio di Cauchy, la serie converge. □
Se una serie converge ma non converge assolutamente allora si dice che converge *condizionatamente.*

Teorema 5.5.2 *Se la serie complessa (5.2) è convergente, allora*

1. $$\lim_{k\to\infty} b_k = 0$$

2. *i termini* b_k *sono limitati, cioè esiste un* $M > 0$ *tale che* $|b_k| < M$ *per ogni* k*.*

Dimostrazione. 1) È un'immediata conseguenza del criterio di Cauchy prendendo $p = 1$.
2) Avendo provato la 1) possiamo affermare che per $\varepsilon > 0$ esiste un k_ε tale che per ogni $k > k_\varepsilon$ risulta $|b_k| < \varepsilon$. Posto $M = \max(|b_1|, |b_{k_\varepsilon}|, \varepsilon)$ segue la tesi:

$$|b_k| < M. \ \square$$

Utilizzando il criterio di Cauchy non è difficile stabilire il seguente *test di confronto.* Siano $\sum_k u_k$ e $\sum_k v_k$ due serie reali con $0 \leq u_k \leq v_k$. Allora:

1. se $\sum_k v_k$ converge allora $\sum_k u_k$ converge e

$$\sum_k u_k \leq \sum_k v_k.$$

2. se $\sum_k u_k$ diverge allora $\sum_k v_k$ diverge.

5.6. Serie di potenze

Consideriamo l'importante serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

e ci chiediamo per quali valori di z tale serie converge ad un numero complesso finito. Notiamo che $z = 1$ conduce alla divergenza $(1 + 1 + 1 + 1 + \ldots)$. Supponiamo che per un particolare valore z la serie converge alla somma $s(z)$. Questo significa che la successione delle somme parziali converge a $s(z)$, cioè

$$\lim_{n\to\infty}(1 + z + z^2 + \ldots + z^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^i = s(z).$$

Esaminiamo ora il polinomio $1 + z + z^2 + \ldots + z^n$. È noto che questo polinomio può essere scritto come quoziente di semplici polinomi:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Conseguentemente

$$s(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}\Big(1 - \lim_{n\to\infty} z^{n+1}\Big).$$

Per valutare quest'ultimo limite notiamo innanzitutto che

$$\lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} z^{n+1}$$

e anche $|z^n| = |z|^n$. Supponiamo ora $|z| < 1$. Allora

$$|z| > |z|^2 > |z|^3 > \ldots > |z|^n$$

e infatti

$$\lim_{n\to\infty}|z^n| = \lim_{n\to\infty}|z|^n = 0$$

dunque

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

In conclusione

$$s(z) = \lim_{n\to\infty}(1 + z + z^2 + \ldots + z^n) = \sum_{k=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

D'altronde se $|z| \geq 1$ allora $|z^n| \geq 1$. Conseguentemente l'n-esimo termine della serie non tende a zero e quindi per il teorema 5.5.2 la serie è divergente. In sintesi:

1. la serie geometrica
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$
converge per tutti i valori di z del cerchio aperto $C(0; 1)$ centrato nell'origine;

2. per ogni $z \in C(0; 1)$
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z};$$

3. la serie diverge per ogni z tale che $|z| \geq 1$.

Il resto di questa sezione è dedicato a stabilire analoghi risultati per un'arbitraria serie di potenze. Vedremo che essa converge all'interno di un opportuno cerchio (con raggio possibilmente zero o infinito) e che essa rappresenta una funzione analitica in quel cerchio. Notiamo esplicitamente che la serie $1 + z + z^2 + \ldots$ converge solamente se $|z| < 1$ mentre la funzione $f(z) = 1/(1 - z)$ è definita nell'intero piano complesso eccetto per $z = 1$. La rappresentazione in serie di potenze è dunque un fatto locale.

5.7. Il cerchio di convergenza

Discuteremo ora serie di potenze della forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

che possono essere scritte nella forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k; \tag{5.3}$$

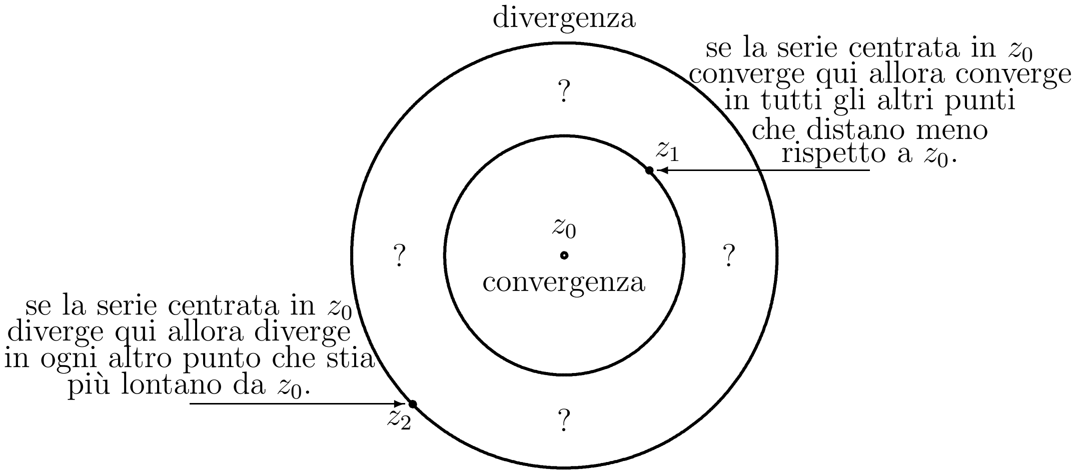

Figura 5.1:

in questo caso z_0 è il centro, per questo si dice che la serie è *centrata* in z_0 o che è *espansa* in potenze di $z - z_0$. Il seguente è un risultato molto importante.

Lemma 5.7.1 *Se la serie (5.3) converge per $z = z_1 \neq z_0$, allora converge assolutamente per tutti i punti z tali che*

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Dimostrazione. Poichè la serie di numeri complessi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_1 - z_0)^k$$

converge, in virtù del teorema 5.5.2 sappiamo che tutti i termini sono limitati:

$$|a_k(z_1 - z_0)^k| < M$$

per qualche $M > 0$ e $k = 0, 1, 2, \ldots$. Adesso notiamo che

$$\begin{aligned} |a_k(z-z_0)^k| &= \left| a_k(z_1-z_0)^k \left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^k \right| < \\ &< M \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^k = Mr^k \end{aligned}$$

avendo posto

$$r = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|.$$

Se $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ allora $r < 1$ e quindi la serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge. In virtù del test di confronto convergerà anche la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z-z_0)^k|. \;\Box$$

Descriviamo ora la regione di convergenza di una serie di potenze.

Teorema 5.7.1 *Assegnata la serie di potenze (5.3) centrata in z_0 esiste un valore R soddisfacente la condizione $0 \le R \le \infty$, tale che*

1. *la serie converge assolutamente per tutti i valori di z nel cerchio aperto $C(z_0; R)$ se $R > 0$ oppure nel punto $z = z_0$ se e solo se $R = 0$;*

2. *la serie diverge in tutti i punti z all'esterno cel cerchio chiuso $\overline{C}(z_0; R)$, cioè per $|z-z_0| > R$.*[1]

Dimostrazione. Se la serie converge solo per $z = z_0$ poniamo $R = 0$ e non c'è altro da provare. Se d'altronde la serie converge in un punto z_1 diverso da z_0 allora il lemma 5.7.1 assicura che essa converge in un disco aperto di raggio, almeno, $|z_1 - z_0|$. Formiamo adesso l'unione di tutti i cerchi aperti centrati in z_0 nei quali la serie converge. Questa unione è ancora un cerchio aperto centrato in z_0 e come tale ha raggio R (possibilmente infinito) sicchè il cerchio di convergenza è l'intero piano. Se d'altro canto $|z-z_0| = R_1 > R$ allora la serie deve divergere per tali z, infatti in caso contrario, sempre in virtù del lemma 5.7.1 convergerebbe

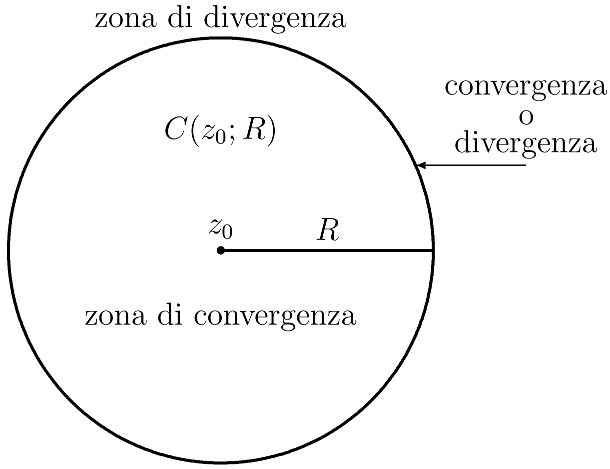

Figura 5.2: Cerchio di convergenza.

nel cerchio aperto $C(z_0; R_1)$, il quale contiene strettamente $C(z_0; R)$ e ciò contraddice la costruzione di R. $\square$

Il numero R, la cui esistenza è provata nel precedente teorema, si chiama *raggio di convergenza della serie.* Per esempio per la serie geometrica vista all'inizio il raggio di convergenza è $R = 1$. Supposto che il raggio di convergenza della serie (5.3) è R, $0 < R < \infty$, la serie converge in tutti i punti del cerchio aperto $C(z_0; R)$ e anche eventualmente sulla frontiera del cerchio. Usualmente però si è interessati al comportamento della funzione definita attraverso la serie sul cerchio aperto $C(z_0; R)$ piuttosto che sulla frontiera, perciò risulta utile chiamare $C(z_0; R)$ *cerchio di convergenza della serie.*

5.8. Come calcolare il raggio di convergenza

Occasionalmente risulta utile saper calcolare esplicitamente il raggio di convergenza R per una data serie di potenze. Qui presentiamo un metodo che molto spesso fornisce la risposta e che si basa essenzialmente sul *criterio di convergenza del rapporto* che enunciamo senza

[1]La serie può o no divergere in un punto sulla circonferenza $|z - z_0| = R$.

dimostrare.
Sia $\sum_k b_k$ una serie reale con $b_k > 0$ e supponiamo che esista il limite dei seguenti rapporti:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lambda.$$

Allora

1. se $\lambda < 1$ la serie converge;
2. se $\lambda > 1$ la serie diverge;
3. se $\lambda = 1$ il test è inconcludente.

Possiamo adesso ottenere il raggio di convergenza dal seguente risultato.

Teorema 5.8.1 *Assegnata la serie di potenze (5.3), se*

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

allora la serie ha raggio di convergenza $R = 1/L$, se $L \neq 0$, e $R = \infty$ se $L = 0$. Se il limite è infinito allora $R = 0$.

Dimostrazione. Formiamo il rapporto

$$\left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |z-z_0|.$$

Sia

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k(z-z_0)^k}\right| = L|z-z_0|.$$

Il λ del test del rapporto esiste se e solo se esiste L. Ora $\lambda < 1$ se e solo se $|z-z_0| < 1/L$, cosicchè $R = 1/L$ è il raggio di convergenza. □

Esempio 5.8.1 *Consideriamo la serie*

$$1 - (z-1) + (z-1)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k.$$

Allora $a_k = (-1)^k$ e

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L = 1$$

e quindi il raggio di convergenza è 1.

Esempio 5.8.2 *Data la serie*

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

abbiamo $a_k = 1/k!$ *e*

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0 = L$$

dunque il raggio di convergenza è $R = \infty$*.*

5.9. Uniforme convergenza di serie di potenze

Una serie di potenze può essere pensata come limite di un'infinita sequenza di polinomi. In quest'ottica dunque noi abbiamo studiato una successione di polinomi ed i loro limiti. Possiamo generalizzare questo discorso studiando una successione di funzioni e i loro limiti. A tal fine sia $f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z), \ldots$ una successione di funzioni complesse ciascuna definita per tutti gli z di un certo dominio Ω. Denoteremo tale successione con $\{f_n(z)\}$. Per il momento non richiederemo che le funzioni siano analitiche o anche solo continue. Definiamo la funzione

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

dicendo cos'è $f(z_1)$ per ciascun $z_1 \in \Omega$. Nominalmente

$$f(z_1) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_1).$$

Notiamo che $\{f_n(z_1)\}$ è una successione di numeri complessi.
Se $\lim_n f_n(z_1)$ esiste per ciascun fissato $z_1 \in \Omega$, allora la funzione limite è definita su tutto Ω.
Per esempio, sia $f_n(z) = 1+z+\ldots+z^n$. Se Ω è il cerchio aperto $C(0;1)$ allora, come sappiamo

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Si noti che è essenziale restringere il suddetto cerchio altrimenti l'affermazione appena fatta non è vera. La definizione

$$f(z_1) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_1)$$

coinvolge separati processi di limite in ciascun $z = z_1$. Diremo che $\{f_n(z_1)\}$ *converge uniformemente* su un sottoinsieme S di Ω se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni' \ \forall n \in \mathbb{N}, n > n_\varepsilon : \ |f(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \ \forall z \in S.$$

Qui la questione cruciale è che l'indice n_ε dipende dalla data sequenza f_n a da ε ma non da z. Lo stesso n_ε va bene per tutti gli $z \in S$. In questa situazione diciamo che f è il *limite uniforme per* $\{f_n\}$, oppure che f è *uniformemente approssimata* da f_n.

Teorema 5.9.1 *Il limite uniforme di funzioni continue (tutte definite nello stesso insieme S) è una funzione continua.*

Dimostrazione. Sia $\lim_n f_n = f$ uniformemente su S. Per mostrare che f è continua in $z_1 \in S$ supponiamo ε assegnato. Quello che vogliamo concludere è che

$$|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$$

per certi z. Allora

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_1)| &= |f(z) + f_n(z) - f_n(z) + f_n(z_1) - f_n(z_1) - f(z_1)| \leq \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f(z_1)|. \end{aligned}$$

Considerato $\varepsilon/3$ l'uniforme convergenza assicura che esiste un indice n^* tale che per $n > n^*$:

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{e} \qquad |f_n(z_1) - f(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Avendo scelto $n > n^*$ usiamo la continuità di f_n per selezionare $\delta > 0$ con la proprietà che

$$|f_n(z) - f_n(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \forall z \ni' |z - z_1| < \delta.$$

In definitiva abbiamo provato che, fissato $\varepsilon > 0$:

$$\exists \delta > 0 \ni' \ \text{per } |z - z_1| < \delta : \ |f(z) - f(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ovvero che

$$\lim_{z \to z_1} f(z) = f(z_1)$$

cosicchè f è continua in z_1. $\square$
Useremo questo risultato per provare la continuità di funzioni definite da serie di potenze. Vedremo inoltre come l'uniforme convergenza permetta di scambiare due tipici processi al limite dell'analisi, nominalmente la convergenza di successioni e l'integrale curvilineo.

Teorema 5.9.2 *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni continue su una curva* Γ *e supponiamo che*

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

uniformemente su Γ. *Allora*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = \int_\Gamma \lim_{n \to \infty} f_n(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz.$$

Dimostrazione. Allo scopo è sufficiente provare che

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_\Gamma (f_n(z) - f(z))dz \right| = 0.$$

Applicando la disuguaglianza ML possiamo scrivere

$$\left| \int_\Gamma (f_n(z) - f(z))dz \right| < ML$$

dove L è la lunghezza di Γ ed $M > |f_n(z) - f(z)|$ per ogni $z \in \Gamma$. Ora in virtù dell'uniforme convergenza possiamo scegliere M arbitrariamente piccolo pur di prendere n sufficientemente grande e tutto ciò implica che l'integrale ha limite nullo. $\square$
Vediamo ora come la discussione appena fatta può essere applicata alle serie di potenze. Supponiamo che la serie (5.3) converga nel cerchio aperto $C(z_0; R)$, dove, come al solito, assumiamo che R possa assumere valore infinito. Perciò la serie di potenze definisce una funzione di variabile complessa in $C(z_0; R)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Come al solito definiamo la somma parziale n-esima

$$s_n(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n.$$

La successione di polinomi $\{s_n(z)\}$ converge alla funzione $f(z)$ nel cerchio aperto $C(z_0; R)$. Adesso possiamo chiederci se questa convergenza è uniforme. La risposta, molto importante, è la seguente:

Teorema 5.9.3 *Sia*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

in $C(z_0; R)$. Allora su ciascun cerchio $\overline{C}(z_0; \rho)$, con $\rho < R$ la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali converge uniformemente alla funzione f.

Dimostrazione. Al fine di provare questo teorema enunciamo innanzitutto un utile risultato preliminare:

Lemma 5.9.1 *(M-test di Weiestrass). Sia $f_0(z) + f_1(z) + \ldots$ una serie i ciu termini sono maggiorabili da una quantità r_k, cioè $|f_k(z)| \leq r_k$, per ogni k. Allora se la serie $\sum_k r_k$ converge anche la serie converge uniformemente alla funzione f.*

Scegliamo z_1 un punto che si trova all'interno del cerchio più grande ma all'esterno del più piccolo, cioè:

$$\rho < |z_1 - z_0| < R.$$

Poichè la serie converge in $z = z_1$ tutti i suoi termini sono limitati da una costante M (teorema 5.5.2). Adesso sia z nel cerchio chiuso $|z - z_0| \leq \rho$. Abbiamo

$$|a_k(z - z_0)^k| = \left| a_k(z_1 - z_0)^k \right| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k < M r^k,$$

dove si è posto $r = \rho / |z_1 - z_0|$. Perciò $r < 1$ e poichè la serie $M \sum_k r^k$ è convergente applicando l'M-test di Weierstrass segue l'uniforme convergenza. $\square$

Corollario 5.9.1 *Sia*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

una funzione data dalla serie di potenze convergente nel cerchio $C(z_0; R)$. *Allora* f *è continua in ciascun punto di* $C(z_0; R)$.

Dimostrazione. È una conseguenza dei teoremi 5.9.2 e 5.9.3 e del fatto che le somme parziali della serie sono polinomi e come tali funzioni continue. □

5.10. Convergenza uniforme e analiticità

Abbiamo già stabilito che una serie di potenze è il limite uniforme di una successione di polinomi, nominalmente le sue somme parziali. Questi polinomi sono ognuno una funzione analitica. Il prossimo risultato, che enunciamo senza dimostrare, mostra che la funzione definita attraverso le serie di potenze è analitica.

Teorema 5.10.1 *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni analitiche definite su un dominio* Ω. *Sia*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)dz$$

uniformemente su Ω. *Allora* f *è analitica su* Ω. □

Corollario 5.10.1 *Una serie di potenze definisce una funzione analitica in ciascun punto all'interno del suo cerchio (aperto) di convergenza.* □

Osservazione. La serie di potenze può convergere in qualche punto sulla frontiera del suo cerchio di convergenza. Non sempre segue comunque che la funzione rappresentata attraverso la serie convergente è analitica in questo punto sulla frontiera. I punti sulla frontiera devono essere trattati separatamente.

5.11. Serie di potenze e derivate

La nostra definizione originale di funzione analitica coinvolge esistenza e continuità delle derivate. Perciò siamo portati a chiederci cosa si può dire circa la derivata di una serie di potenze. Data la serie

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \tag{5.4}$$

possiamo derivarla termine a termine in modo formale ottenendo la serie di potenze:

$$a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \dots \tag{5.5}$$

Adesso ci chiediamo: se la serie (5.4) converge per $z = z_1$, per tale valore di z converge anche la serie (5.5)?
Prima di rispondere a questa domanda consideriamo il seguente teorema di carattere generale.

Teorema 5.11.1 *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni analitiche sul dominio Ω, convergente uniformemente su ciascun cerchio chiuso contenuto in Ω alla funzione analitica f. Allora la successione $\{f_n'\}$ di derivate converge uniformemente su ciascun cerchio chiuso di Ω alla derivata f'.*

Dimostrazione. Sia $\overline{C}$ un cerchio chiuso in Ω. Dobbiamo dimostrare che per $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε tale che e $n > n_\varepsilon$ allora:

$$|f'(\xi) - f_n(\xi)| < \varepsilon \qquad \forall \xi \in \overline{C}.$$

Utilizzando la formula integrale di Cauchy possiamo scrivere

$$f'(\xi) - f_n'(\xi) = \frac{1}{2\pi\iota} \int_\Gamma \frac{f(z) - f_n(z)}{(z - \xi)^2} dz$$

la quale immediatamente conduce alla stima standard

$$|f'(\xi) - f_n(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi} \max_\Gamma \frac{|f(z) - f_n(z)|}{|z - \xi|^2} \cdot (\text{lunghezza di } \Gamma)$$

dove Γ è una circonferenza centrata come C ma con raggio maggiore di quello di C. Sia ora

$$d = \text{raggio di } \Gamma\text{-raggio di } C > 0$$

e poniamo
$$\varepsilon^* = \frac{2\pi\varepsilon d^2}{\text{lunghezza di } \Gamma}.$$
Poichè $\{f_n\}$ converge uniformemente su Γ al suo limite f sappiamo che esiste un indice n^* tale che per $n > n^*$
$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon^* \qquad \forall z \in \Gamma.$$
Perciò la stima standard data assicura che se $n > n^*$ allora
$$|f'(\xi) - f_n(\xi)| < \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon^*}{d^2} \cdot (\text{lunghezza di } \Gamma) = \varepsilon \qquad \forall \xi \in \overline{C}.$$
In definitiva se definiamo n_ε come n^* abbiamo soddisfatto la richiesta per l'uniforme convergenza su $\overline{C}$. □
Adesso siamo in grado di rispondere alla questione circa la derivabilità termine a termine delle serie di potenze.

Corollario 5.11.1 *Sia*
$$f(z) = \sum_k a_k(z - z_0)^k$$
e supponiamo che la serie di potenze abbia cerchio di convergenza $C(z_0; R)$*. Allora la serie di potenze derivata*
$$\sum_k ka_k(z - z_0)^{k-1}$$
converge alla derivata $f'(z)$ *ed ha lo stesso cerchio di convergenza.*

Dimostrazione. Poichè $f(z)$ è analitica $f'(z)$ è sicuramente definita su $C(z_0; R)$ (dalla definizione di funzione analitica). Consideriamo ora la somma parziale
$$a_1 + 2a_2(z - z_0) + \ldots + na_n(z - z_0)^{n-1};$$
queste sono le derivate delle somme parziali della serie che definisce f. Per il teorema 5.11.1 queste derivate convergono a $f'(z)$ su $\Omega = C(z_0; R)$. D'altronde le derivate chiaramente tendono alla serie $\sum_k a_k(z-z_0)^{k-1}$ la quale coincide con $f'(z)$ e converge in $C(z_0; R)$. Per vedere

che la serie derivata non converge in nessun disco aperto più grande di $C(z_0; R)$, sia z_1 un punto tale che $|z_1 - z_0| > R$. Adesso sia k un intero maggiore di $|z - z_0|$. Abbiamo

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k(z_1 - z_0)(z_1 - z_0)^{k-1}| < |ka_k(z_1 - z_0)^{k-1}|.$$

Poichè la serie ottenuta dal termine a sinistra diverge stessa sorte subisce la serie ottenuta dal termine a destra. □

Comunque il più importante risultato stabilito in queste pagine è che le serie di potenze conducono a funzioni analitiche.

5.12. Alcune considerazioni sul teorema 4.10.1

Tralasciando la dimostrazione del teorema, osserviamo che l'ipotesi del teorema si realizza senz'altro se $f(s) = P(s)/Q(s)$, con P e Q polinomi tali che $\mathrm{grad}(P(s)) < \mathrm{grad}(Q(s))$. Infatti sia

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{l=0}^{m} a_l s^{m-l}, \qquad a_0 \neq 0 \\ Q(s) &= \sum_{l=0}^{n} b_l s^{n-l}, \qquad b_0 \neq 0, \end{aligned}$$

e $0 \leq m < n$. Allora se $s = Re^{\iota\theta}$ si ha

$$
\begin{aligned}
|f(s)| &= \left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right| = \left|\frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m} a_l s^{m-l}}{\displaystyle\sum_{l=0}^{n} b_l s^{n-l}}\right| = \\
&= \left|\frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m} a_l e^{(m-l)\iota\theta} R^{m-l}}{\displaystyle\sum_{l=0}^{n} b_l e^{(n-l)\iota\theta} R^{n-l}}\right| = \left|\frac{R^m e^{m\iota\theta} \displaystyle\sum_{l=0}^{m} a_l e^{-l\iota\theta} R^{-l}}{R^n e^{n\iota\theta} \displaystyle\sum_{l=0}^{n} b_l e^{-l\iota\theta} R^{-l}}\right| = \\
&= \frac{1}{R^{n-m}} \left|\frac{\displaystyle\sum_{l=0}^{m} a_l \left(\frac{e^{-\iota\theta}}{R}\right)^l}{\displaystyle\sum_{l=0}^{n} b_l \left(\frac{e^{-\iota\theta}}{R}\right)^l}\right| = \\
&= \frac{1}{R^{n-m}} \left|\frac{a_0\left(1 + \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{e^{-\iota\theta}}{R}\right)^l \frac{a_l}{a_0}\right)}{b_0\left(1 + \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{e^{-\iota\theta}}{R}\right)^l \frac{b_l}{b_0}\right)}\right| =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{R^{n-m}} \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \left| \frac{1 + \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{e^{-\iota\theta}}{R} \right)^l \frac{a_l}{a_0}}{1 + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{e^{-\iota\theta}}{R} \right)^l \frac{b_l}{b_0}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{R^{n-m}} \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \frac{1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{R^l} \max_l \left| \frac{a_l}{a_0} \right|}{1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{R^l} \max_l \left| \frac{b_l}{b_0} \right|} =$$

$$= \frac{1}{R^{n-m}} \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \frac{1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{A}{R^l}}{1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{B}{R^l}} =$$

$$= \frac{1}{R^{n-m}} \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \frac{1 + \frac{A}{R} \left(1 + R^{-1} + R^{-2} + \dots \right)}{1 - \frac{B}{R} \left(1 + R^{-1} + R^{-2} + \dots \right)} \leq$$

$$\leq \frac{1 + \frac{A}{R-1}}{1 - \frac{B}{R} \left(1 + R^{-1} + R^{-2} + \dots \right)} <$$

$$< \frac{2}{1 - \frac{B}{R} \left(1 + R^{-1} + R^{-2} + \dots \right)}$$

per $R > A + 1$ e avendo posto

$$A = \max_l \left| \frac{a_l}{a_0} \right|, \qquad B = \max_l \left| \frac{b_l}{b_0} \right|.$$

Ancora poichè

$$1 - \frac{B}{R} \left(1 + R^{-1} + R^{-2} + \dots \right) \geq 1 - \frac{B}{R-1} \geq \frac{1}{2}$$

per $R \geq 2B + 1$, abbiamo in definitiva che per

$$R \geq \max(A + 1, 2B + 1)$$

abbiamo

$$|f(s)| \leq \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \frac{1}{R^{n-m}} \frac{1}{1/2} \leq \frac{M}{R^k}$$

con $k = n - m \geq 1$ e

$$M \geq 2\left|\frac{a_0}{b_0}\right|.$$