Elementi di teoria dei gruppi ed applicazioni

Indice

1 Gruppi **1**

2 Gruppi di Lie ed algebre di Lie **8**

3 Rappresentazioni **13**

4 Il Gruppo di Lorentz, il Gruppo di Poincaré e le loro Algebre di Lie **21**

5 Il Gruppo SL(2,C) **25**

1 Gruppi

Un *gruppo* G è un insieme di elementi g con una legge di composizione $m : G \times G \to G$ (moltiplicazione) tale che per ogni due elementi $g_1, g_2 \in G$

$$m(g_1, g_2) \equiv g_1 g_2 \in G \tag{1.1}$$

Le seguenti proprietà devono esser soddisfatte:

i) la moltiplicazione è associativa

$$g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3, \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in \ G \tag{1.2}$$

ii) esiste l'elemento identità e

$$e g_1 = g_1 e = g_1 \quad \forall g \in \ G \tag{1.3}$$

iii) esiste l'inverso g^{-1}

$$g^{-1} g = g g^{-1} = e \tag{1.4}$$

Un gruppo G è detto *commutativo* o *abeliano* se $\forall g_1, g_2$

$$g_1 g_2 = g_2 g_1 \tag{1.5}$$

E' facile vedere che l'elemento identità e è unico. Un sottoinsieme $H \subset G$ è detto *sottogruppo* se l'insieme dei suoi elementi è un gruppo sotto la legge di moltiplicazione di G.

L'*ordine* di un gruppo è il numero di elementi. Se l'ordine è finito il gruppo si dice *finito*.

Il sottogruppo $H \subset G$ è *sottogruppo normale* o *invariante* se

$$g h g^{-1} \in H \quad \forall g \in G,\ h \in H \tag{1.6}$$

Una applicazione $\phi : G_1 \to G_2$ (G_1 e G_2 gruppi) è chiamato *omomorfismo* se

$$g_1 \to \phi(g_1) \quad g_2 \to \phi(g_2) \quad \forall g_1,\ g_2 \in G_1 \tag{1.7}$$

implica

$$g_1 g_2 \to \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \tag{1.8}$$

Se prendiamo in particolare $g_1 = e_1$ si ha $\phi(e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1)$ e quindi $\phi(e_1) = e_2$ è l'elemento identità di G_2.

Prendendo $g_2 = g_1^{-1}$ si ottiene

$$\phi(g_1^{-1}) = (\phi(g_1))^{-1} \tag{1.9}$$

Se l'omomorfismo di gruppo è uno a uno si dice *isomorfismo*. L'insieme K_ϕ degli elementi che sono trasformati in e_2 è il *kernel* di ϕ

$$K_\phi = \phi^{-1}(e_2) \tag{1.10}$$

Se $G_2 = G_1$ omomorfismo diventa *endomorfismo* ed isomorfismo *automorfismo*.

Sia H sottogruppo di G e g un elemento fisso di G. L' insieme di tutti i prodotti gh (hg) per ogni $h \in H$ è chiamato il *left H coset* (*right H coset*), indicato nel seguito come gH (Hg).

Se due coset hanno due elementi in comune sono coincidenti.

Infatti se $g \in g_1H$ e $g \in g_2H$

$$g = g_1h_1 = g_2h_2 \tag{1.11}$$

allora $g_2^{-1}g_1 = h_2h_1^{-1} = h' \in H$. Pertanto $g_1 = g_2h'$ e $g_1H = g_2h'H = g_2H$.

Pertanto il gruppo G si decompone in left (right) H cosets disgiunti.

Se H è un sottogruppo normale, allora $\forall g$

$$gH = Hg \tag{1.12}$$

Infatti l'elemento generale di gH è gh con $h \in H$ e $g \in G$. Ma

$$ghg^{-1} = h',\ h' \in H \tag{1.13}$$

e quindi

$$gh = h'g \tag{1.14}$$

cioè ogni elemento in gH è in Hg. In altre parole left e right cosets sono coincidenti.

Sia allora H un sottogruppo normale di G e indichiamo con G/H l'insieme di tutti i cosets distinti di H in G. L'inseme G/H equipaggiato con la legge di moltiplicazione

$$(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H \quad g_1, g_2 \in G \tag{1.15}$$

è un gruppo chiamato *gruppo fattore* di G rispetto a H. E' facile verificare che la legge di moltiplicazione soddisfa gli assiomi del gruppo. L'elemento unità di G/H è eH.

Dato un omomorfismo $\phi : G_1 \to G_2$ possiamo formare il gruppo fattore G_1/K_ϕ essendo K_ϕ un sottogruppo normale di G_1. E' facile mostrare che K_ϕ è un sottogruppo, ed inoltre da $\phi(ghg^{-1}) = e_2$ segue che K_ϕ è un sottogruppo normale.

E' possibile allora costruire un isomorfismo $\bar{\phi} : G_1/K_\phi \to G_2$. Infatti se a e b appartengono allo stesso K_ϕ coset

$$\phi(a) = \phi(b) \tag{1.16}$$

Infatti $a = bk$ con $\phi(k) = e_2$ e quindi vale la (1.16).

Viceversa se $\phi(a) = \phi(b)$ a e b appartengono allo stesso coset. Infatti se vale la (1.16), se e_2 è l'elemento identità di G_2, si ha

$$e_2 = \phi(a)\phi(b)^{-1} = \phi(ab^{-1}) \tag{1.17}$$

cioè $ab^{-1} \in K_\phi$. Quindi esiste un $h \in K_\phi$ tale che $a = hb$ cioè

$$a \in K_\phi b = bK_\phi \tag{1.18}$$

Quindi a e b appartengono allo stesso coset.

Possiamo pertanto definire una applicazione $\bar{\phi} : G_1/K_\phi \to G_2$ che è un isomorfismo:

$$\bar{\phi}(aK_\phi) = \bar{\phi}(b) \quad b \in aK_\phi \tag{1.19}$$

Il *centro* di un gruppo è costituito dagli elementi di G che commutano con tutti gli elementi di G.

A partire da due gruppi G_1 e G_2 è possibile definire il *prodotto diretto* $G_1 \times G_2$ come l'insieme degli elementi (g_1, g_2), $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ con la seguente legge di moltiplicazione

$$(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2') \tag{1.20}$$

Esempio 1. Gruppo delle permutazioni di tre oggetti S_3.

Gli elementi di G sono i sei modi in cui si possono permutare tre oggetti:

$$\begin{aligned}
&(a, b, c)\\
&(b, a, c)\\
&(a, c, b)\\
&(c, b, a) && (1.21)\\
&(c, a, b)\\
&(b, c, a) && (1.22)
\end{aligned}$$

che corrispondono alle operazioni

$$\begin{aligned}
(\ \ ) &\quad non\ far\ niente\\
(1,2) &\quad \textit{permutare gli oggetti nella posizione } 1,2\\
(2,3) &\quad \textit{permutare gli oggetti nella posizione } 2,3\\
(1,3) &\quad \textit{permutare gli oggetti nella posizione } 1,3\\
(1,2,3) &\quad \textit{permutazione ciclica}\\
(3,2,1) &\quad \textit{permutazione anticiclica} && (1.23)
\end{aligned}$$

C'è una legge di moltiplicazione naturale

$$(2, 3)(1, 2) = (3, 2, 1) \tag{1.24}$$

Infatti

$$\begin{aligned} (1,2) \quad (a,b,c) \quad &\to (b,a,c) \\ (2,3) \quad (b,a,c) \quad &\to (b,c,a) \end{aligned} \tag{1.25}$$

E' chiaro che esistono l'elemento identità e l'inverso. L'associatività segue dal fatto che a ciascun passo del prodotto c'è uno stato definito.

Il gruppo delle permutazioni di n oggetti è S_n con ordine $n!$.

Esempio 2. La collezione delle rotazioni del cerchio di multipli di $2\pi/n$ radianti. E' un gruppo finito di n elementi.

Esempio 3. $GL(n, \mathbf{R})$. L'insieme delle matrici $n \times n$ non singolari forma un gruppo sotto la moltiplicazione righe per colonne, chiamato *gruppo lineare generale*,

$$GL(n, \mathbf{R}) = \{A \in M(n, \mathbf{R}) | \det A \neq 0\} \tag{1.26}$$

Analogamente si definisce un $GL(n, \mathbf{C})$. Il sottoinsieme di $GL(n, \mathbf{R})$ costituito dalle matrici A con $\det A = 1$ forma un sottogruppo denotato con $SL(n, \mathbf{R})$. L'insieme delle matrici unitarie forma un altro gruppo (*gruppo unitario*)

$$U(n) = \{A \in M(n, \mathbf{C}) | AA^\dagger = A^\dagger A = I\} \tag{1.27}$$

Analogamente si definisce il gruppo speciale unitario $SU(n)$.

Esempio 4. Il gruppo delle rotazioni nello spazio euclideo $E_3 = (\mathbf{R}^3, d_2)$.

Consideriamo l'insieme $O(3)$ (*gruppo ortogonale*) delle trasformazioni di E_3 in se stesso che preservano le distanze e lasciano l'origine inalterata. Dati $R_1, R_2 \in O(3)$, definiamo

$$(R_1 R_2)x = R_1(R_2(x)) \tag{1.28}$$

con $x \in E_3$. La trasformazione identica esiste ($x \to x$). Tutte le trasformazioni sono uno a uno e quindi per ognuna di esse esiste l'inversa. Per definizione questa regola di moltiplicazione è associativa.

Se fissiamo un sistema di assi ortogonali ad ogni trasformazione $x \to x'$ è associata una matrice 3×3 non singolare R_{ik} tale che

$$x'_i = R_{ik} x_k \tag{1.29}$$

e che soddisfa

$$R^T R = I \tag{1.30}$$

Questa proprietà segue dalla richiesta di lasciare inalterate le distanze.

Per ogni $R \in O(3)$ la corrispondenza $R \to \{R_{ik}\}$ è uno a uno. Dalla (1.30) segue $\det R = \pm 1$. Il sottogruppo di $O(3)$ con $\det R = 1$ (sottogruppo senza inversioni) è detto $SO(3)$ (*gruppo ortogonale speciale*). $SO(3)$ è un sottogruppo invariante di $O(3)$. Infatti

$\det(ghg^{-1}) = \det h = 1$ se $h \in SO(3)$, $g \in O(3)$. Se $g \notin SO(3)$, allora $g = Ph$ dove $P = diag(-1,-1,-1)$.

I corrispondenti gruppi in n dimensioni sono $O(n)$ e $SO(n)$. Questi sono esempi di gruppi continui. Gli elementi sono funzioni continue di un certo insieme di parametri.

Esempio 5. Il gruppo SU(2).

L'insieme delle matrici unitarie 2 x 2 con determinante uguale a uno forma un gruppo rispetto all'usuale moltiplicazione. La forma generale è

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Possiamo esprimere U in termini di matrici di Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

e la matrice identità

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

Ricordiamo che le matrici di Pauli soddisfano $\mathrm{Tr}\tau_i\tau_j = 2\delta_{ij}$ e $\tau_i\tau_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\tau_k$, $(\epsilon_{123} = 1)$. Inoltre le matrici di Pauli sono hermitiane $\tau_i^\dagger = \tau_i$. E'

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_0 + i\alpha_3 & \alpha_2 + i\alpha_1 \\ -\alpha_2 + i\alpha_1 & \alpha_0 - i\alpha_3 \end{pmatrix} = \tau_0\alpha_0 + i\alpha_i\tau_i \tag{1.34}$$

con i numeri reali α_0, α_i $(i = 1,2,3)$ che soddisfano

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \tag{1.35}$$

Se poniamo $\vec{\alpha} = -\lambda\vec{n}$, con $\vec{n}^2 = 1$, $\lambda \geq 0$, abbiamo

$$\alpha_0^2 + \lambda^2 = 1 \tag{1.36}$$

e possiamo porre

$$\alpha_0 = \cos\frac{\theta}{2} \qquad \lambda = \sin\frac{\theta}{2} \tag{1.37}$$

con $0 \leq \theta < 2\pi$ (il motivo di questa parametrizzazione sarà piú chiaro nel seguito). Quindi dalla (1.34) otteniamo

$$U = \cos\frac{\theta}{2} I - i\vec{n}\cdot\vec{\tau}\sin\frac{\theta}{2} = \exp(-i\vec{n}\cdot\vec{\tau}\theta/2) \tag{1.38}$$

Mostriamo che $SU(2)$ è omomorfo al gruppo delle rotazioni proprie di E_3. Per ogni vettore definiamo la matrice

$$\overline{x} = \vec{\tau}\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

Osserviamo che

$$\det \overline{x} = -|\vec{x}|^2 \tag{1.40}$$

Per ogni $U \in SU(2)$ definiamo la trasformazione

$$\overline{x}' = U\overline{x}U^\dagger \tag{1.41}$$

Valgono le seguenti proprietà:

i) $\overline{x}'$ è hermitiano, essendo le matrici di Pauli hermitiane ed U unitaria.

ii) Essendo U unitaria, utilizzando la proprietà $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ si ha $\mathrm{Tr}\overline{x}' = \mathrm{Tr}\overline{x} = 0$. Segue allora $\overline{x}' = \vec{x}' \cdot \vec{\tau}$ (ogni matrice hermitiana 2×2 a traccia nulla è una combinazione lineare di matrici di Pauli con coefficienti reali).

iii) $\det \overline{x}' = \det \overline{x} = -|\vec{x}'|^2 = -|\vec{x}|^2$.

Segue quindi che la trasformazione $\vec{x} \to \vec{x}'$ è un mapping di E_3 in E_3 che preserva la distanza e non cambia l'origine. Quindi è una trasformazione di $O(3)$. Indichiamo con $R(U)$ l'elemento di $O(3)$ che corrisponde alla matrice U ($\vec{x}' = R(U)\vec{x}$).

E' allora

$$\overline{x}' = U\overline{x}U^\dagger = \overline{R(U)\vec{x}} \tag{1.42}$$

Se facciamo due trasformazioni otteniamo

$$\overline{x}' = U_1 U_2 \overline{x} U_2^\dagger U_1^\dagger = U_1 \overline{R(U_2)\vec{x}} U_1^\dagger = \overline{R(U_1)R(U_2)\vec{x}} = \overline{R(U_1 U_2)\vec{x}} \tag{1.43}$$

Pertanto $U \to R(U)$ è un omomorfismo di $SU(2)$ in $O(3)$. Osserviamo che $R(U) = R(-U)$ e quindi alla stessa rotazione corrispondono due matrici di $SU(2)$.

Le sole matrici U tali che $R(U) = I$ sono $U = \pm I$. Quindi il nucleo dell'omomorfismo è $Z_2 = \{+1, -1\}$. Si ha quindi un isomorfismo da $SU(2)/Z_2$ in $O(3)$. In realtà si può dimostrare che l'isomorfismo è su $SO(3)$. Questo segue da

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \times \vec{x}_3 = \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3) = \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}(U\overline{x}_1 U^\dagger U \overline{x}_2 U^\dagger U \overline{x}_3 U^\dagger) = \vec{x}_1' \cdot \vec{x}_2' \times \vec{x}_3' \tag{1.44}$$

dove abbiamo usato la seguente proprietà delle matrici di Pauli

$$\mathrm{Tr}(\tau_i \tau_j \tau_k) = 2i\epsilon_{ijk} \tag{1.45}$$

La (1.44) implica che il triplo prodotto scalare è invariante sotto le trasformazioni indotte dalle U, ovvero $\det R(U) = +1$, dato che il triplo prodotto non è invariante sotto inversioni spaziali ($\det R(U) = -1$).

$SU(2)$ è detto il *gruppo di ricoprimento universale* di $SO(3)$. La (1.39) può essere invertita

$$x_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\tau_i \overline{x}) \tag{1.46}$$

Combinando le (1.41) e (1.38) si trova

$$\vec{x}' = (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n} + \cos\theta[\vec{x} - (\vec{n}\cdot\vec{x})\vec{n}] + \sin\theta(\vec{n}\times\vec{x}) \tag{1.47}$$

e quindi $\vec{x}'$ è ottenuto da $\vec{x}$ con una rotazione di un angolo θ con $0 \leq \theta < 2\pi$ intorno all'asse determinato da $\vec{n}$.

L'espressione esplicita della matrice $R(U)$ è la seguente

$$R(U)_{ij} = \frac{1}{2} Tr(U^\dagger \tau_i U \tau_j) \tag{1.48}$$

Esempio 6. Il gruppo di Lorentz proprio.

L'insieme delle trasformazioni proprie di Lorentz forma un gruppo indicato con L_+ che è isomorfo al gruppo di matrici 4×4 $\Lambda^{\mu}_{\cdot\nu}$ $(\mu = 0,1,2,3)$ tali che

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

con $\det\Lambda = +1$. La matrice g è il tensore metrico dello spazio di Minkowski. Si verifica che se $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L_+$ allora anche la matrice $\Lambda_1\Lambda_2$ soddisfa la eq. (1.49), $\det\Lambda_1\Lambda_2 = 1$.

Diamo anche un esempio di boost lungo l'asse x:

$$\begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi & & \\ -\sinh\chi & \cosh\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

dove $\tanh\chi = \beta = v/c$.

Esempio 7. Il gruppo di Poincaré.

Il gruppo di Poincaré consiste di tutte le trasformazioni di Lorentz e delle traslazioni nello spazio di Minkowski. Un elemento è caratterizzato da (a,Λ) dove a sta per un quadrivettore a^μ e Λ è una trasformazione di Lorentz. Quindi per ogni quadrivettore x

$$(a,\Lambda)x = \Lambda x + a \tag{1.51}$$

La legge di composizione si ottiene facendo due trasformazioni

$$\begin{aligned} (a',\Lambda')(a,\Lambda)x &= (a',\Lambda')(\Lambda x + a) \\ &= \Lambda'(\Lambda x + a) + a' \\ &= (\Lambda' a + a', \Lambda'\Lambda)x \end{aligned} \tag{1.52}$$

ovvero

$$(a',\Lambda')(a,\Lambda) = (a' + \Lambda' a, \Lambda'\Lambda) \tag{1.53}$$

Questa struttura di prodotto è quella del *prodotto semidiretto* di gruppi.

L'identità è $(0, I)$ e l'inverso è

$$(a,\Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}) \tag{1.54}$$

2 Gruppi di Lie ed algebre di Lie

Quando gli elementi di un gruppo non sono numerabili, è utile spesso disporre della nozione di continuità.

Un gruppo è un *gruppo continuo* a n parametri se i suoi elementi possono essere parametrizzati da n variabili reali (continue) e non piú di n parametri sono necessari. Chiamiamo n la *dimensione* di G. Scriviamo $G = \{g(a)\}, a = a_1, ...a_n$. Devono inoltre valere le le seguenti proprietà:

$$g(a)g(b) = g[\phi(a,b)] \tag{2.1}$$

$$g^{-1}(a) = g[\psi(a)] \tag{2.2}$$

con le funzioni ϕ e ψ continue.

Un gruppo è detto *gruppo di Lie* se ϕ e ψ sono funzioni analitiche (infinitamente differenziabili) di a e b.

Sono esempi di gruppi di Lie $GL(n,\mathbf{R})$ ($dim = n^2$), $GL(n,\mathbf{C})$ ($dim = 2n^2$), $O(n)$ ($dim = n(n-1)/2$), $U(n)$ ($dim = n^2$) etc. Molti di questi gruppi lasciano invariate delle forme quadratiche. Per esempio $U(n)$ lascia invariato il prodotto scalare

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \tag{2.3}$$

mentre $O(n)$ lascia invariato

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.4}$$

Non tutti i gruppi sono gruppi di matrici. Per esempio il gruppo delle trasformazioni canoniche in meccanica classica o il gruppo delle trasformazioni delle coordinate in Relatività Generale. Un elemento di questi gruppi non può esser determinato da un numero finito di parametri, ma piuttosto da una funzione o piú funzioni.

Una applicazione da $\mathbf{R}$ in G,

$$t \to g[a(t)] \quad \equiv g(t) \quad t \in \mathbf{R} \tag{2.5}$$

con $a(t)$ continuo, è chiamata un *cammino (curva)* in G. Due elementi g_1 e g_2 sono *connessi* se essi possono essere congiunti da un cammino cioè se esiste un $g(t)$ tale che $g(0) = g_1$ e $g(1) = g_2$.

Un gruppo è detto *connesso* se per ogni coppia di elementi c'è un cammino che gli unisce.

Componente connessa di un gruppo è l'insieme degli elementi di un gruppo che sono connessi tra di loro.

Per esempio il gruppo $SO(n)$ è connesso mentre il gruppo $O(n)$ non lo è (non è possibile passare con continuità da matrici con det $= +1$ a matrici con det $= -1$).

La componente di un gruppo contenente l'identità è chiamata *componente identità* . Per esempio il gruppo $O(n)$ consiste di due componenti connesse (matrici con det $= +1$ e matrici con det $= -1$). $SO(n)$ è la componente identità.

Sottogruppi ad un parametro. Sono costituiti dall'insieme degli elementi (2.5) tali che $g(s)g(t) = g(s+t) \quad - s, t \in \mathbf{R}$.

Uno spazio vettoriale V su $\mathbf{K}$ insieme con una operazione bilineare da $V \times V \rightarrow V$, chiamata *parentesi di Lie*, $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$ è chiamato *algebra di Lie* se

$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z] \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \quad \forall X, Y, Z \in V \tag{2.6}$$

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad \forall X, Y \in V \tag{2.7}$$

e vale l'identità di Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in V \tag{2.8}$$

Studiamo adesso le proprietà infinitesime dei gruppi di Lie, ovvero le proprietà del gruppo nell'intorno dell'elemento identità. Questo porta in modo naturale ai concetti di generatori ed algebra di Lie. Per esempio la struttura locale del gruppo delle rotazioni $SO(3)$, gruppo di Lie i cui parametri sono gli angoli di Eulero, è completamente determinata dall'algebra di Lie ben nota del momento angolare in tre dimensioni $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3$.

Assumiamo che il gruppo sia un gruppo di Lie. A partire dalla funzione ϕ della eq. (2.1) è possibile definire i *generatori* del gruppo di Lie:

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i(a, b)}{\partial b_k}\Big|_{b=0} \frac{\partial}{\partial a_i} \quad (k = 1...n) \tag{2.9}$$

Essi spannano uno spazio vettoriale n-dimensionale ($\sum_{k=1}^{n} c_k X_k$) e soddisfano l'algebra di Lie seguente [1]

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = C_{ij}^k X_k \tag{2.10}$$

dove le C_{ij}^k sono le *costanti di struttura.*

Le costanti di struttura soddisfano le proprietà

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \tag{2.11}$$

$$C_{ij}^k C_{kn}^l + C_{jn}^k C_{ki}^l + C_{ni}^k C_{kj}^l = 0 \tag{2.12}$$

Nel caso di gruppi di matrici l'algebra di Lie dei generatori può essere ottenuta a partire dai generatori infinitesimi dei sottogruppi ad un parametro ($dg_k/dt|_{t=0} = X_k,\ k = 1, \cdots, n$).

Osserviamo che un gruppo di Lie abeliano ha costanti di struttura nulle.

Una sottoalgebra A_1 di un' algebra A è un sottospazio di V che è chiuso rispetto alla parentesi di Lie:

$$[X, Y] = Z, \quad X, Y, Z \in A_1 \tag{2.13}$$

o simbolicamente $[A_1, A_1] \subset A_1$.

Una algebra di Lie A è decomponibile nella *somma diretta* di sottoalgebre

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_q \tag{2.14}$$

se per ogni coppia di sottoalgebre A_α, A_β abbiamo $A_\alpha \cap A_\beta = 0$.

Una sottoalgebra A_1 di un' algebra A, $A_1 \subset A$, è detta *invariante* se $[A_1, A] \subseteq A_1$.

L'algebra di Lie è *semisemplice* se non contiene sottoalgebre abeliane invarianti .

Data un' algebra di Lie è conveniente definire il tensore simmetrico

$$g_{ij} = g_{ji} = C^k_{il} C^l_{jk} \tag{2.15}$$

che è noto come *metrica (forma) di Killing*. Vale il seguente teorema: l'algebra di Lie è semisemplice se e solo se $\det g \neq 0$.

L'operatore

$$C = g^{ij} X_i X_j \tag{2.16}$$

dove g^{ij} è il tensore metrico inverso, è detto *operatore di Casimir* (1931) (del secondo ordine) e commuta con tutti i generatori dell' algebra (semisemplice).

Racah (1951) ha generalizzato l'operatore di Casimir, considerando combinazioni multilineari dei generatori. In totale il numero degli operatori di Casimir, ovvero degli operatori C che soddisfano

$$[C, X_i] = 0 \tag{2.17}$$

è pari al rango dell'algebra. Il *rango* corrisponde al numero massimo di generatori commutanti tra loro.

Esempio 1 Algebre di Lie di $SU(2)$ e $SO(3)$.

$SU(2)/Z_2$ ed $SO(3)$, essendo isomorfi, hanno le stesse costanti di struttura. Infatti se indichiamo i generatori con J_i, $i = 1, 2, 3$ è

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \tag{2.18}$$

Per quanto riguarda $SU(2)$, basta considerare i sottogruppi ad un parametro

$$\exp(-i\tau_i \frac{\theta}{2}) \;\; i = 1, 2, 3 \tag{2.19}$$

per ottenere i generatori

$$J_i = i\frac{d}{d\theta}\exp(-i\tau_i\frac{\theta}{2})\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{2}\tau_i \quad i=1,2,3 \tag{2.20}$$

Per quanto riguarda $SO(3)$, scriviamo l'espressione delle tre rotazioni intorno agli assi:

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \quad R_2(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

dove $s_\theta = \sin\theta$. Prendendo il parametro θ infinitesimo si ha $R_i(\epsilon) = I_3 - i\epsilon X_i$ con

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Gli X_i soddisfano le stesse relazioni di commutazione dei J_i.

Notiamo che in entrambi i casi abbiamo ridefinito i generatori con un fattore i, in modo tale che le corrispondenti matrici risultano hermitiane.

L'operatore di Casimir è $\frac{1}{2}J^2 = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$ (vedi le (2.16) e (2.15)). Infatti dalle costanti di struttura segue

$$g_{ij} = -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{ij} \tag{2.23}$$

Più frequentemente la normalizzazione usata per l'operatore di Casimir è $C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. Questo operatore è invariante sotto l'azione dei J_i, ovvero $[J^2, J_i] = 0$. Il rango di $SU(2)(SU(n))$ è 1 $(n-1)$.

Il generico elemento di $SU(2)$ si scrive quindi nella forma

$$g = e^{i\beta_i J_i} \tag{2.24}$$

con β_i parametri reali e i generatori J_i hermitiani. ■

Possiamo caratterizzare la connettività di un gruppo considerando tutti gli insiemi di curve chiuse del gruppo. Esse possono essere decomposte in classi di equivalenza C_i in modo che:

i) ogni due curve in C_i possono essere deformate con continuità l'una nell'altra (le due curve sono *omotope*).

ii) nessuna curva in C_i può essere deformata in una curva di C_j se $j \neq i$.

Il numero di tali classi è la *connettività*. Per esempio un gruppo è detto *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa può esser deformata in un punto.

Vale il seguente risultato: per ogni gruppo di Lie G c'è un unico (a meno di isomorfismi) *gruppo di ricoprimento universale* $\tilde{G}$ (semplicemente connesso) ovvero G è omomorfo a $\tilde{G}$ e l'algebra di Lie di G è isomorfa a quella di $\tilde{G}$. Il numero di volte che $\tilde{G}$ copre G è

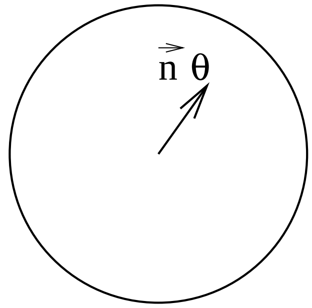

Figura 1: La sfera di raggio π

pari alla connettività di G. G è isomorfo a $\tilde{G}/K$ dove K è un sottogruppo invariante del centro di G.

Un gruppo di Lie è *compatto* se la sua parametrizzazione consiste di un numero finito di parametri che variano in insiemi chiusi e limitati.

Esempio 2.

Consideriamo il gruppo $SO(2)$. E' un gruppo ad un parametro. E' possibile identificare ciascun elemento di questo gruppo con un punto di un cerchio di raggio unitario. Ad una rotazione di un angolo θ associamo un punto di ascissa curvilinea θ. Questa corrispondenza è biiettiva e rispetta la topologia del gruppo, nel senso che due rotazioni vicine sono rappresentate da due punti vicini sul cerchio. $SO(2)$ è connesso, in quanto posso passare con continuità da un elemento all'altro. Inoltre il gruppo è compatto, in quanto lo spazio dei parametri é finito ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

Il gruppo $O(2)$ invece è non connesso, in quanto non é possibile passare con continuità da una rotazione ad una inversione spaziale. Quindi il gruppo $O(2)$ si decompone in due componenti e solo quella contenente l'identità è un sottogruppo.

Esempio 3. Consideriamo il gruppo delle rotazioni nello spazio tridimensionale.

Abbiamo identificato ogni rotazione dando il vettore unitario $\vec{n}$ che caratterizza l'asse di rotazione e l'angolo θ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Il problema è che

$$R(\theta, \vec{n}) = R(2\pi - \theta, -\vec{n}) \tag{2.25}$$

come si può verificare esplicitamente con la eq. (1.47). La struttura dello spazio dei parametri del gruppo può essere visualizzata associando a ciascuna rotazione un vettore $\theta\vec{n}$

$$R(\theta, \vec{n}) \to \theta\vec{n} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \tag{2.26}$$

I punti finali di questi vettori descrivono una sfera di raggio π (vedi Fig. 1) e a punti diametralmente opposti sulla sfera corrisponde la stessa rotazione. Quindi per aver una corrispondenza uno a uno è necessario identificare punti diametralmente opposti.

L'insieme dei parametri è chiuso e limitato (e connesso), quindi R_3 è un gruppo compatto e connesso. Non è però semplicemente connesso. Infatti una curva che connette

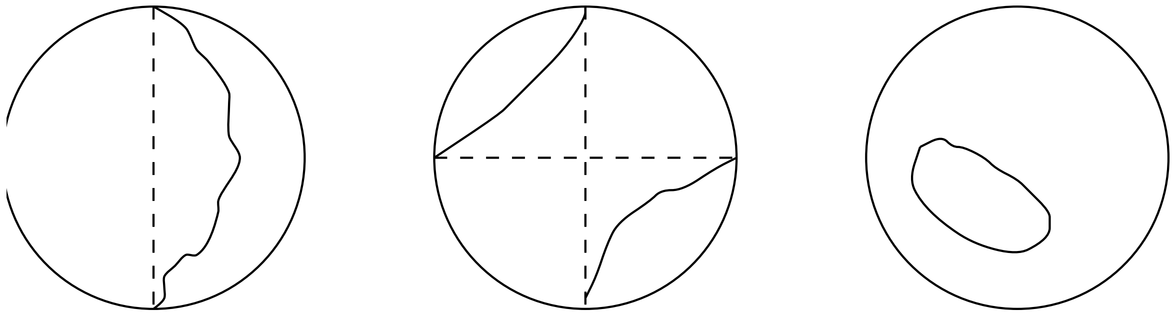

Figura 2: Esempi di curve chiuse nello spazio dei parametri del gruppo $SO(3)$

due punti diametralmente opposti è chiusa, in quanto i due elementi sono identificati, ma non è riducibile ad un punto. Ci sono quindi due classi di curve omotope: quelle con un numero pari di salti e quelle con un numero dispari di salti (vedi Fig. 2).

Il gruppo $SO(3)$ è quindi doppiamente connesso. In generale tutti i gruppi $SO(n)$ con $n > 2$ sono doppiamente connessi.

D'altra parte è possibile riscrivere la rotazione come (vedi eq. (1.37))

$$U = \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) = \cos\alpha - i\frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}}{\alpha} \sin\alpha \quad U \in SU(2) \tag{2.27}$$

con $\vec{\alpha} = \theta/2\vec{n}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Quindi è possibile costruire una corrispondenza tra gli elementi di $SU(2)$ e i punti della sfera di raggio π. Questa corrispondenza è uno a uno se si identificano tutti i punti della superficie ($\alpha = \pi$) con l'elemento -1. Per questo fatto $SU(2)$ non solo è compatto e connesso ma anche semplicemente connesso. Tutti i gruppi $SU(n)$ sono semplicemente connessi.

3 Rappresentazioni

Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale. Una *rappresentazione* di G è un omomorfismo di G nel gruppo $GL(V)$ degli operatori lineari invertibili limitati su V, cioè una applicazione

$$T : G \to GL(V) \tag{3.1}$$

tale che

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2) \;\; \forall g_1, g_2 \in G \tag{3.2}$$

Segue $T(e) = I$, $T(g^{-1}) = (T(g))^{-1}$ (da $e^2 = e$, e da $T(gg^{-1}) = I$)).

Lo spazio V è chiamato *spazio della rappresentazione* e la dimensione di V è la *dimensione* della rappresentazione.

La rappresentazione è detta *fedele* se l'applicazione è un isomorfismo.

Una rappresentazione *unitaria* è una rappresentazione T in uno spazio di Hilbert complesso V tale che $\forall g \in G$ $T(g)$ è un operatore unitario. Sia T una rappresentazione del gruppo G in V. Un sottospazio M di V è detto essere *invariante* per T se

$$T(g)x \in M \quad \forall g \in G \quad \forall x \in M \tag{3.3}$$

cioè se $\forall g \in G$ $T(g)$ trasforma M in se stesso.

Una trasformazione che ammette sottospazi invarianti non banali, diversi da $\{0\}, V$ è detta *riducibile*. Una rappresentazione che non è riducibile è detta *irriducibile*.

Una rappresentazione è detta *completamente riducibile* se il complemento ortogonale di ogni sottospazio invariante è invariante.

Un esempio di rappresentazione riducibile è

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

dove $A(g)$, $B(g)$, $C(g)$ sono matrici.

Un esempio di rappresentazione completamente riducibile è

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Si scrive anche $D = D^{(1)} \oplus D^{(2)}$ ovvero in generale

$$D = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus ... \oplus D^{(p)} \tag{3.6}$$

Si dice anche che D è *somma diretta* delle rappresentazioni $D^{(1)}$, $D^{(2)}$,...$D^{(p)}$.

Date due rappresentazioni $D^{(1)}$ e $D^{(2)}$ sugli spazi vettoriali V_1, V_2, esse sono *equivalenti* se esiste un operatore uno a uno lineare S tale che

$$SD^{(1)}(g)S^{-1} = D^{(2)}(g) \tag{3.7}$$

Se gli spazi delle rappresentazioni sono spazi di Hilbert, e S è unitaria le rappresentazioni sono dette *unitariamente equivalenti*.

Diamo l'enunciato del Lemma di Schur [2].

a) Siano T, T' due rappresentazioni irriducibili di un gruppo G negli spazi V, V' e $A \in L(V, V')$ un operatore tale che

$$AT(g) = T'(g)A \quad \forall g \in G \tag{3.8}$$

allora $A = 0$ o le rappresentazioni sono equivalenti.

b) Sia T una rappresentazione irriducibile del gruppo G sullo spazio V e $A \in L(V, V)$ un operatore tale che

$$T(g)A = AT(g) \quad \forall g \in G \tag{3.9}$$

allora A è multiplo della matrice identica, $A = \lambda I$. ■

Nel caso delle rappresentazioni di gruppi compatti (come $SU(2)$ o $SO(3)$) e finiti valgono alcuni risultati che ricordiamo senza dimostrare [1]:

i) ogni rappresentazione di un gruppo di Lie compatto è equivalente ad una rappresentazione unitaria

ii) ogni rappresentazione irriducibile è finito dimensionale

iii) ogni rappresentazione unitaria è completamente riducibile. ■

Una rappresentazione dell'algebra di Lie $LieG$ è un omomorfismo dall'algebra di Lie $LieG$ nello spazio degli operatori lineari $L(V)$, ovvero una applicazione $T\colon LieG \to L(V)$ tale che

$$T([X,Y]) = [T(X), T(Y)] \quad \forall X, Y \in LieG \tag{3.10}$$

In generale una volta costruita la rappresentazione dell'algebra di Lie, la rappresentazione di un gruppo si ottiene esponenziando quella dell'algebra corrispondente

$$T(\exp(X)) = \exp(T(X)) \quad X \in LieG \tag{3.11}$$

La procedura da seguire per costruire le rappresentazioni di un gruppo di Lie G è quella di studiare le rappresentazioni dell'algebra di Lie del suo gruppo di ricoprimento universale e quindi esponenziarle.

Esempio. Rappresentazioni unitarie irriducibili di $SU(2)$.

Studiamo le rappresentazioni dell'algebra di Lie $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. Indichiamo gli operatori della rappresentazione $T(J_i)$ con lo stesso simbolo J_i. Essendo $SU(2)$ compatto il teorema generale sopra citato assicura che le sue rappresentazioni irriducibili sono finite dimensionali.

Poichè abbiamo definito i generatori dell'algebra di Lie di $SU(2)$ fattorizzando una i, la rappresentazione del gruppo si otterrà come $U = \exp(i\beta_i J_i)$ con i parametri β_i reali. L'unitarietà di questa implica $U^\dagger U = 1$ e questa condizione sarà soddisfatta se gli operatori J_i sono hermitiani.

Sia V lo spazio vettoriale su cui la rappresentazione è realizzata. Poichè J_3 è hermitiano, J_3 può esser trasformato, con una trasformazione di similitudine, nella forma diagonale

$$J_3|m\rangle = m|m\rangle \tag{3.12}$$

dove m denota l'autovalore reale e $|m\rangle$ il corrispondente autovettore (utilizziamo per i vettori e per i prodotti scalari la notazione di Dirac). Gli autovettori sono ortonormali $\langle m'|m\rangle = \delta_{mm'}$.

Definiamo poi $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$. Abbiamo allora le seguenti relazioni di commutazione

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \quad [J_+, J_-] = 2J_3 \tag{3.13}$$

Usando queste relazioni si ha

$$J_3 J_\pm |m\rangle = (m \pm 1) J_\pm |m\rangle \tag{3.14}$$

e quindi concludiamo

$$\begin{aligned} J_+|m\rangle &= A_m|m+1\rangle \\ J_-|m\rangle &= B_m|m-1\rangle \end{aligned} \tag{3.15}$$

Poichè la dimensione di V è finita deve esistere uno stato $|j\rangle$, tale che $J_3|j\rangle = j|j\rangle$ ma

$$J_+|j\rangle = 0 \tag{3.16}$$

e quindi $A_j = 0$.

Analogamente dovrà esistere un intero n_0 tale che $(J_-)^{n_0}|j\rangle \propto |j-n_0\rangle$ e $J_-|j-n_0\rangle = 0$. Quindi $B_{j-n_0} = 0$.

D'altra parte usando le relazioni

$$\langle m|[J_+, J_-]|m\rangle = 2m \tag{3.17}$$

e

$$\overline{\langle m|J_+|n\rangle} = \langle J_+ n|m\rangle = \langle n|J_+^\dagger m\rangle = \langle n|J_-|m\rangle \tag{3.18}$$

si ricava

$$\begin{aligned} A_{m-1}B_m - A_m B_{m+1} &= 2m \\ \overline{A}_{m-1} &= B_m \end{aligned} \tag{3.19}$$

Combinandole si ottiene

$$|A_{m-1}|^2 - |A_m|^2 = 2m \tag{3.20}$$

Per esempio per $m = j$ si ha

$$|A_{j-1}|^2 = 2j \tag{3.21}$$

Inoltre

$$|A_{j-2}|^2 = 2(j-1) + 2j \tag{3.22}$$

In generale

$$\begin{aligned} |A_{j-m}|^2 &= 2(j-(m-1)) + \ldots + 2j \\ &= 2mj - \frac{2m(m-1)}{2} \\ &= m(2j - m + 1) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Quindi possiamo ricavare

$$\begin{aligned} |A_m|^2 &= (j-m)(j+m+1) \\ |B_m|^2 &= (j+m)(j-m+1) \end{aligned} \tag{3.24}$$

La condizione $B_{j-n_0} = 0$ implica
$$n_0 = 2j \tag{3.25}$$
ovvero
$$j = \frac{n_0}{2}, \quad n_0 = 0, 1, 2... \tag{3.26}$$
In conclusione ad ogni intero o semiintero j è associata una rappresentazione irriducibile dell'algebra $SU(2)$, di dimensione $2j+1$, specificata dalla base ortonormale:
$$|m\rangle, \; m = -j, -j+1, ..., j-1, j \tag{3.27}$$
Su questa base vale la (3.12) e inoltre
$$\begin{aligned} J_+|m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}|m+1\rangle \\ J_-|m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|m-1\rangle \end{aligned} \tag{3.28}$$

Su queste rappresentazioni l'operatore $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, per il lemma di Schur, é multiplo dell'identitá e vale $j(j+1)$. Per verificare questa proprietá basta riscrivere $J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2$ e calcolare $J^2|m\rangle$, utilizzando le (3.28) (o più semplicemente valutare $J^2|j\rangle$).

E' possibile poi ricavare le espressioni esplicite degli elementi di matrice di J_1 e J_2 in questa rappresentazione, utilizzando le (3.28) e
$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \tag{3.29}$$
ottenendo
$$\langle m'|J_1|m\rangle = \frac{1}{2}\left[\delta_{m',m+1}\sqrt{(j-m)(j+m+1)} + \delta_{m',m-1}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\right] \tag{3.30}$$
$$\langle m'|J_2|m\rangle = \frac{1}{2i}\left[\delta_{m',m+1}\sqrt{(j-m)(j+m+1)} - \delta_{m',m-1}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\right] \tag{3.31}$$

Le rappresentazioni del gruppo $SU(2)$ si ottengono esponenziando quelle dell'algebra di Lie $LieSU(2)$, ovvero
$$e^{i\beta_i J_i} \tag{3.32}$$
con $\vec{\beta} = \theta\vec{n}$.

Nella rappresentazione bidimensionale ($D^{\frac{1}{2}}$), $J_i = \tau_i/2$, e questi generatori agiscono su spinori a due componenti
$$\zeta^\alpha = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2 \tag{3.33}$$
I due vettori della base sono $| +1/2 >= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $| -1/2 >= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La rappresentazione generica con peso massimo j (D^j) è $2j+1$ dimensionale. Questa è detta anche rappresentazione di spin j perchè è la rappresentazione irriducibile con cui è possibile descrivere gli stati di una particella con spin j.

Allo scopo di definire il prodotto di rappresentazioni definiamo prima il prodotto tensoriale di spazi vettoriali.

Siano V e V' due spazi vettoriali, di dimensione n e n'. Consideriamo l'insieme $V \otimes V'$ dei vettori

$$x = \sum_{m}^{n} \sum_{\alpha}^{n'} c_{m\alpha} e_m \otimes e'_\alpha \quad m = 1, \cdots n, \ \alpha = 1, \cdots n' \tag{3.34}$$

dove e_m (e'_α) è una base in V (V') e $c_{ml} \in \mathbf{C}$. Possiamo definire combinazioni lineari di elementi di $V \otimes V'$, che acquista la struttura di spazio vettoriale ed è chiamato *prodotto tensoriale o di Kronecker* di V per V'.

Possiamo poi definire un prodotto scalare come

$$(y, x) = \sum_{m,\alpha} b^*_{m\alpha} c_{m\alpha} \tag{3.35}$$

se $x = \sum_{m,\alpha,} c_{m\alpha} e_m \otimes e'_\alpha$ e $y = \sum_{m,\alpha} b_{m\alpha} e_m \otimes e'_\alpha$ sono elementi di $V \otimes V'$. Consideriamo poi due rappresentazioni $D(g)$ e $D'(g)$ dello stesso gruppo G agenti rispettivamente su V e V'. E' possibile costruire una nuova rappresentazione dello stesso gruppo G su $V \otimes V'$ definita come segue

$$g \to D(g) \otimes D'(g) \tag{3.36}$$

dove

$$(D(g) \otimes D'(g))(e_m \otimes e'_\alpha) = D(g) e_m \otimes D'(g) e'_\alpha \tag{3.37}$$

La nuova rappresentazione è detta *prodotto diretto*.

Se $D(g)$ e $D'(g)$ sono unitarie anche il prodotto lo é. Comunque se $D(g)$ e $D'(g)$ sono irriducibili in generale il prodotto non lo è. Comunque essendo $D \otimes D'$ unitaria, é completamente riducibile. Quindi lo spazio $V \otimes V'$ si decompone come somma di sottospazi invarianti U_A ($A = 1, \cdots q$) che si trasformano sotto la rappresentazione irriducibile D_A:

$$V \otimes V' = \oplus_{A=1}^{q} U_A \quad D \otimes D' = \oplus_{A=1}^{q} D_A \tag{3.38}$$

In ciascuno degli spazi U_A scegliamo una base u_r^A con $r = 1 ... dim\ U_A$. L'insieme di questi $\sum_{A=1}^{q} dim\ U_A$ vettori fornisce una base per $V \otimes V'$. Abbiamo quindi

$$e_m \otimes e'_\alpha = \sum_{A,r} C(m, \alpha, A, r) u_r^A \tag{3.39}$$

dove i coefficienti complessi $C(m, \alpha, A, r)$ sono chiamati *coefficienti di Clebsch-Gordan.*

Nota: Nella rappresentazione prodotto diretto i generatori sono la somma dei generatori delle rappresentazioni costituenti.

Osserviamo infine che se $D^{1(2)}$ è una rappresentazione di $G_{1(2)}$ allora $D^1 \otimes D^2$ è una rappresentazione del prodotto diretto $G_1 \times G_2$.

Un altro modo per ottenere le rappresentazioni irriducibili del gruppo $SU(2)$ è di partire dalla rappresentazione $D^{\frac{1}{2}}$ e farne il prodotto diretto, considerando come spazio della rappresentazione il prodotto tensoriale simmetrico $\mathbf{C^2} \otimes \mathbf{C^2}$.

Infatti se consideriamo per esempio un tensore del secondo ordine con due indici spinoriali $T_{\alpha\beta}$, questo può esser decomposto nella parte antisimmetrica e in quella simmetrica. La parte antisimmetrica è proporzionale al tensore

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

che è invariante sotto rotazioni spinoriali ($U^T \epsilon U = \epsilon$, come segue dalla (1.31)). La parte simmetrica ha $2 \times 2 - 1 = 3$ componenti indipendenti che si trasformano come la rappresentazione $j = 1$. Questa costruzione si generalizza a j generico. Lo spazio dei tensori simmetrici di rango $2j$

$$T_{\alpha_1 ... \alpha_{2j}} \quad \alpha_1, ... \alpha_{2j} = 1, 2 \tag{3.41}$$

è lo spazio della rappresentazione D^j.

Come abbiamo già osservato, due gruppi $SO(3)$ e $SU(2)$ hanno algebre di Lie isomorfe ma i gruppi non sono isomorfi.

La corrispondenza tra i due gruppi è ottenuta considerando la rappresentazione bidimensionale per una rotazione:

$$U(\vec{n}, \theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}\vec{n} \cdot \vec{\tau}) = \cos\frac{\theta}{2} I - i\vec{n} \cdot \vec{\tau} \sin\frac{\theta}{2} \tag{3.42}$$

ovvero l'eq. (1.38). Il cambiamento $\theta \to \theta + 2\pi$ non altera la rotazione tridimensionale ma trasforma una rappresentazione spinoriale nella sua opposta ($U \to -U$). Quindi le rappresentazioni di $SU(2)$ con $j = 1/2$ (in generale con j semintero) sono rappresentazioni a due valori del gruppo delle rotazioni. Pertanto solo le rappresentazioni di $SU(2)$ con spin intero sono vere rappresentazioni di $SO(3)$. ■

Consideriamo adesso due rappresentazioni di $SU(2)$, D^{j_1} e D^{j_2}, operanti sugli spazi V_{j_1} e V_{j_2}. Allora vale [2]

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = \oplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^j \tag{3.43}$$

dove j varia a passi di uno tra $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$.

Verifichiamo che la dimensionalità dello spazio somma diretta dei sottospazi invarianti è $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ (supponiamo per semplicità j_1 e j_2 interi con $j_1 > j_2$):

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) &= 2(\sum_{j=0}^{j_1+j_2} j) - 2(\sum_{j=0}^{j_1-j_2-1} j) + j_1 + j_2 - (j_1 - j_2) + 1 \\ &= 2\frac{(j_1+j_2+1)(j_1+j_2)}{2} - 2\frac{(j_1-j_2)(j_1-j_2-1)}{2} + 2j_2 + 1 \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1) \end{aligned} \tag{3.44}$$

dove abbiamo usato $\sum_{j=0}^{n} j = n(n+1)/2$.

Una base per D^j è $|jm\rangle$, $m = -j, ..., j$ con

$$|jm\rangle = \sum_{m=m_1+m_2} \bar{C}(j, m, m_1, m_2)|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \tag{3.45}$$

I $C(j, m, m_1, m_2)$ sono i coefficienti di Clebsch-Gordan.

Nelle applicazioni alla meccanica quantistica V_{j_1} e V_{j_2} sono gli spazi dei vettori di stato delle particelle con spin $\vec{J}^{(1)}$ e $\vec{J}^{(2)}$ rispettivamente. Il prodotto delle rappresentazioni é generalmente riducibile rispetto al gruppo $SU(2)$ generato da $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} \otimes I + I \otimes \vec{J}^{(2)}$.

Esempio

$$D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}} = D^0 \oplus D^1 \tag{3.46}$$

Date due rappresentazioni $D^{\frac{1}{2}}$ consideriamo il prodotto diretto $D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}}$ che agisce sullo spazio $|m_1 > \otimes |m_2 >$ con $m_1 = \pm 1/2$ ed $m_2 = \pm 1/2$, con dimensione uguale a quattro.

I generatori nelle due rappresentazioni sono $\vec{J}^{(1)}$ e $\vec{J}^{(2)}$ e soddisfano le algebre di Lie:

$$[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(1)} \quad [J_i^{(2)}, J_j^{(2)}] = i\epsilon_{ijk} J_k^{(2)} \tag{3.47}$$

Denotiamo i quattro vettori $|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle$ con $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$.

Il risultato generale visto prima assicura che $D^{\frac{1}{2}} \otimes D^{\frac{1}{2}} = D^0 \oplus D^1$. Quindi lo spazio prodotto tensoriale si decompone come somma diretta dei due sottospazi corrispondenti alle rappresentazioni con $j = 0$ e $j = 1$.

Indichiamo i vettori base dei due sottospazi con $|00\rangle$ e $|1\,-1\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. Questi soddisfano

$$\vec{J}^2 |jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle \quad J_3|jm\rangle = m|jm\rangle \tag{3.48}$$

con $m = -j, -j+1 \cdots, j-1, j$.

I generatori della rappresentazione prodotto diretto corrispondono alla somma dei generatori delle singole rappresentazioni

$$\vec{J} = \vec{J}^{(1)} \otimes I + I \otimes \vec{J}^{(2)} \equiv \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)} \tag{3.49}$$

Pertanto $m = m_1 + m_2$. Cominciamo con lo studiare i coefficienti di Clebsch Gordan per il sottospazio $j = 1$. Il vettore che corrisponde a $m = 1$ può esser ottenuto come $m_1 + m_2$ solo con $m_1 = m_2 = 1/2$, quindi a meno di una scelta della fase

$$|11\rangle = |++\rangle \tag{3.50}$$

Operando poi con $J^- = J^{(1)-} + J^{(2)-}$ e ricordando che

$$J^-|jm\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|jm-1\rangle \tag{3.51}$$

si ottiene

$$J^-|11\rangle = \sqrt{2}|10\rangle = (J^{(1)-} + J^{(2)-})|++\rangle = |+-\rangle + |-+\rangle \tag{3.52}$$

da cui

$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \tag{3.53}$$

Operando ancora con J^- si ottiene

$$|1-1\rangle = |--\rangle \tag{3.54}$$

Abbiamo quindi trovato i coefficienti di Clebsch Gordan per il sottospazio $j=1$.

$|00\rangle$ sarà una combinazione di $|-+\rangle$ e $|+-\rangle$ ortogonale alle precedenti quindi

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \tag{3.55}$$

4 Il Gruppo di Lorentz, il Gruppo di Poincaré e le loro Algebre di Lie

Scriviamo la generica trasformazione di Lorentz nella forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \quad (\mu = 0,1,2,3) \tag{4.1}$$

Ricordiamo che le trasformazioni di Lorentz lasciano invariata la forma

$$(y-x)^2 = g_{\mu\nu}(y-x)^{\mu}(y-x)^{\nu} \tag{4.2}$$

In conseguenza di ciò la matrice Λ soddisfa l'equazione

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (\Lambda^{\mu}{}_{\rho} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma}) \tag{4.3}$$

dove $g = diag(1,-1,-1,-1)$ è il tensore metrico e $(\Lambda^T)_{\mu}{}^{\rho} = \Lambda^{\rho}{}_{\mu}$. Dalla (4.3) segue

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{4.4}$$

mentre dalla componente 00 della stessa equazione segue

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda^i{}_0)^2 \tag{4.5}$$

da cui segue

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1 \tag{4.6}$$

Analogamente per la trasformazione inversa vale

$$(\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = g \tag{4.7}$$

ovvero moltiplicando per $g\Lambda^T$

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g \tag{4.8}$$

o in componenti

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\rho}(\Lambda^T)_{\rho}{}^{\sigma} g_{\sigma\nu} = g^{\mu\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\rho} g_{\sigma\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} \tag{4.9}$$

Dalla componente 00 della (4.7) segue quindi

$$(\Lambda_0{}^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda_0{}^i)^2 = (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}(\Lambda^i{}_0)^2 \tag{4.10}$$

Pertanto il gruppo di Lorentz non è connesso ma è invece composto da quattro componenti che corrispondono alle quattro possibilità date dalle (4.4),(4.6). Indicheremo le quattro componenti con $L_+^\uparrow$ $(\det\Lambda = 1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1)$, $L_+^\downarrow$, $(\det\Lambda = 1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1)$, $L_-^\uparrow(\det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1)$, $L_-^\downarrow(\det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1)$. Le trasformazioni si dicono *proprie* (*improprie*) se $\det\Lambda = 1$ (-1), *ortocrone* (*anticrone*) se $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ (≤ -1).

Il gruppo di Lorentz è isomorfo al gruppo delle matrici pseudo ortogonali $O(1,3)$. Le rotazioni tridimensionali sono particolari trasformazioni appartenenti al gruppo di Lorentz.

Ricordiamo che un vettore si dice tipo tempo, spazio e luce se rispettivamente $x^2 > 0,\ x^2 < 0,\ x^2 = 0$.

Poiché l'identità del gruppo ha $\det\Lambda = 1$, $\Lambda^0{}_0 = 1$ $I \in L_+^\uparrow$. Pertanto $L_+^\uparrow$ è l'unica componente connessa con l'identità. Il nome ortocrone sta ad indicare che il segno della parte temporale di un vettore time-like o light-like rimane invariato.

Infatti se x^μ è un quadrivettore di tipo tempo $(x^2 = a^2 > 0)$ e supponiamo $x^0 > 0$, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}
(\Lambda x)^0 &= \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_i x^i = \sqrt{1 + \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0}\,x^0 + \Lambda^0{}_i x^i \\
&\geq \sqrt{1 + \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i}\sqrt{a^2 + x^i x^i} - |\Lambda^0{}_i||x^i| \\
&= \sqrt{1 + \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i}\sqrt{a^2 + x^i x^i} - \sqrt{\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i}\sqrt{x^i x^i} > 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dove abbiamo fatto uso della (4.10).

In modo analogo si dimostra che se $(\Lambda_1)^0{}_0 \geq 1$ e $(\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$ si ottiene $(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0 \geq 1$.

Data una trasformazione di $L_+^\uparrow$, si possono ottenere le trasformazioni appartenenti alle altre componenti tramite le trasformazioni

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Si ha chiaramente

$$SL_+^\uparrow = L_-^\uparrow \quad TL_+^\uparrow = L_-^\downarrow \quad STL_+^\uparrow = L_+^\downarrow \tag{4.13}$$

Dato che solo $L_+^\uparrow$ è connessa con l'identità $L_+^\uparrow$ è un sottogruppo, detto *gruppo proprio ortocrono* di Lorentz. L_+ è isomorfo a $SO(1,3)$, mentre $L_+^\uparrow$ è isomorfo a $SO_0(1,3)$ (la componente di $SO(1,3)$ connessa con l'identità).

In realtà in generale nel passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro possiamo fare in aggiunta alla trasformazione di Lorentz una traslazione

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{4.14}$$

con a^{μ} quadrivettore costante. Sotto queste trasformazioni continua a rimanere invariata la (4.2).

Facendo due trasformazioni successive si ricava la legge di composizione

$$(a', \Lambda')(a, \Lambda) = (a' + \Lambda' a, \Lambda' \Lambda) \tag{4.15}$$

Si vede quindi che la struttura della moltiplicazione è quella del *prodotto semidiretto*. Saremo pertanto interessati al prodotto semidiretto $T_4 \otimes_s SO_0(1,3)$ dove T_4 è il gruppo delle traslazioni nello spazio tempo.

Consideriamo una rappresentazione $U(a, \Lambda)$ di $T_4 \otimes_s SO_0(1,3)$. Dovrà essere allora

$$U(a', \Lambda')U(a, \Lambda) = U(a' + \Lambda' a, \Lambda' \Lambda) \tag{4.16}$$

Consideriamo una trasformazione infinitesima

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu} + \alpha^{\mu} \tag{4.17}$$

Utilizzando la (4.3) segue

$$g_{\nu\lambda} \simeq (g^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}) g_{\mu\rho} (g^{\rho}{}_{\lambda} + \epsilon^{\rho}{}_{\lambda}) \simeq g_{\nu\lambda} + \epsilon_{\lambda\nu} + \epsilon_{\nu\lambda} \tag{4.18}$$

Segue quindi

$$\epsilon_{\lambda\nu} = -\epsilon_{\nu\lambda} \tag{4.19}$$

Per una tale trasformazione possiamo scrivere

$$U(\alpha, 1 + \epsilon) \simeq 1 + i\alpha_{\mu} P^{\mu} + \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \tag{4.20}$$

con $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ data l'antisimmetria di $\epsilon_{\mu\nu}$. La rappresentazione U sarà unitaria se P^{μ} e $M^{\mu\nu}$ sono operatori autoaggiunti.

Per calcolare i commutatori di questi operatori consideriamo la seguente trasformazione

$$U(0, \Lambda^{-1})U(a', \Lambda')U(0, \Lambda) = U(\Lambda^{-1}a', \Lambda^{-1}\Lambda')U(0, \Lambda) = U(\Lambda^{-1}a', \Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) \tag{4.21}$$

Posto $\Lambda' = 1$, $a'_{\mu} = \alpha_{\mu}$ infinitesimo si ha

$$U(0, \Lambda^{-1})\,(1 + i\alpha_{\mu} P^{\mu})\,U(0, \Lambda) = U(\Lambda^{-1}\alpha, 1) \simeq 1 + i(\Lambda^{-1}\alpha)_{\mu} P^{\mu} \tag{4.22}$$

Dalla (4.9), definendo $(\Lambda^{-1})_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\cdot\nu}$ segue

$$(\Lambda^{-1})_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \Lambda_{\nu}^{\cdot\rho} = \Lambda_{\nu\mu} \tag{4.23}$$

e quindi

$$U(0,\Lambda^{-1})\alpha_\mu P^\mu U(0,\Lambda) = \Lambda^{-1}_{\mu\nu}\alpha^\nu P^\mu = \alpha^\nu \Lambda_{\nu\mu} P^\mu \tag{4.24}$$

Se ne deduce perciò

$$U(0,\Lambda^{-1})P^\mu U(0,\Lambda) = \Lambda^\mu_{\cdot\nu} P^\nu \tag{4.25}$$

Posto poi $\Lambda = 1+\epsilon$ si ha

$$(1-\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}M^{\rho\lambda})P^\mu(1+\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}M^{\rho\lambda}) = P^\mu + \epsilon^\mu_{\cdot\nu}P^\nu \tag{4.26}$$

da cui

$$-\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}\left[M^{\rho\lambda}, P^\mu\right] = \epsilon^\mu_{\cdot\lambda}P^\lambda \tag{4.27}$$

Tenendo conto dell'antisimmetria di $\epsilon_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}\left[M^{\rho\lambda}, P^\mu\right] &= \epsilon^\mu_{\cdot\lambda}P^\lambda \\ &= g^{\mu\rho}\epsilon_{\rho\lambda}P^\lambda \\ &= \frac{1}{2}(g^{\mu\rho}P^\lambda - g^{\mu\lambda}P^\rho)\epsilon_{\rho\lambda} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Pertanto

$$\left[M^{\rho\lambda}, P^\mu\right] = i(g^{\mu\rho}P^\lambda - g^{\mu\lambda}P^\rho) \tag{4.29}$$

Poniamo poi nella (4.21) $a' = 0$ $\Lambda' = 1+\epsilon'$. Si ottiene

$$\begin{aligned} U(0,\Lambda^{-1})(1+\frac{i}{2}\epsilon'_{\mu\nu}M^{\mu\nu})U(0,\Lambda) &= U(0,\Lambda^{-1}(1+\epsilon')\Lambda) \\ &= 1+\frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\epsilon'\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \\ &= 1+\frac{i}{2}(\Lambda^{-1})_{\mu\rho}(\epsilon')^{\rho\lambda}\Lambda_{\lambda\nu}M^{\mu\nu} \\ &= 1+\frac{i}{2}(\epsilon')^{\rho\lambda}\Lambda_{\rho\mu}\Lambda_{\lambda\nu}M^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Cioè abbiamo

$$U(0,\Lambda^{-1})M^{\mu\nu}U(0,\Lambda) = \Lambda^\mu_{\cdot\rho}\Lambda^\nu_{\cdot\sigma}M^{\rho\sigma} \tag{4.31}$$

Sostituendo nell'ultima equazione $\Lambda = 1+\epsilon$ si ottiene

$$\begin{aligned} \left[1-\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}M^{\rho\lambda}\right]M^{\mu\nu}\left[1+\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}M^{\rho\lambda}\right] &= \Lambda^\mu_{\cdot\sigma}\Lambda^\nu_{\cdot\tau}M^{\sigma\tau} \\ &= M^{\mu\nu} + \epsilon^\mu_{\cdot\sigma}M^{\sigma\nu} + \epsilon^\nu_{\cdot\tau}M^{\mu\tau} \end{aligned} \tag{4.32}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}\epsilon_{\rho\lambda}\left[M^{\rho\lambda}, M^{\mu\nu}\right] &= \epsilon_{\rho\lambda}(g^{\rho\mu}M^{\lambda\nu} + g^{\rho\nu}M^{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\lambda}(g^{\rho\mu}M^{\lambda\nu} + g^{\rho\nu}M^{\mu\lambda} - g^{\lambda\mu}M^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu}M^{\mu\rho}) \end{aligned} \tag{4.33}$$

e quindi

$$\left[M^{\rho\lambda}, M^{\mu\nu}\right] = i(M^{\rho\mu}g^{\lambda\nu} - M^{\lambda\mu}g^{\rho\nu} + M^{\lambda\nu}g^{\mu\rho} - M^{\rho\nu}g^{\mu\lambda}) \tag{4.34}$$

Ovviamente i generatori delle traslazioni commutano:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{4.35}$$

Infatti dalla legge di composizione (4.16) segue

$$U(a, I)U(a', I)U(-a, I) = U(a', I) \tag{4.36}$$

Scegliendo $a'_\mu = \epsilon'_\mu$ infinitesimo nella precedente e scrivendo $U(a', I) = I + i\epsilon_\mu P^\mu$ si ricava

$$U(a, I)P^\mu U(-a, I) = P^\mu \tag{4.37}$$

e ponendo analogamente $a_\mu = \epsilon_\mu$, segue la (4.35).

Ci siamo pertanto ricavata l'algebra di Lie associata ad $T_4 \otimes_s SO_0(1, 3)$, ovvero le eq. (4.29), (4.34) e (4.35).

Per quanto riguarda l'algebra di Lie del gruppo $SO_0(1, 3)$, eq. (4.34), è conveniente considerare i seguenti operatori

$$J_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{klm}M_{lm} \quad N_k = M_{k0} \tag{4.38}$$

per i quali valgono le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [J_l, J_m] &= -[N_l, N_m] = i\epsilon_{lmk}J_k \\ [J_l, N_m] &= [N_l, J_m] = i\epsilon_{lmk}N_k \end{aligned} \tag{4.39}$$

Quindi $\vec{J}$ genera il sottogruppo $SO(3)$ (le rotazioni spaziali) e $\vec{N}$ genera i boost di Lorentz.

Ci sono due operatori di Casimir $P^\mu P_\mu$ e $W^\mu W_\mu$ con

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} \tag{4.40}$$

Le rappresentazioni unitarie irriducibili saranno caratterizzate dal valore dei due Casimir che sono associati rispettivamente alla massa e allo spin della particella (l'elicità nel caso di massa nulla). Per esempio se indichiamo l'autovalore dell'operatore $P^\mu P_\mu$ con $p^\mu p_\mu$, ci sono quattro classi di rappresentazioni definite da $p^\mu p_\mu > 0,\ p^\mu p_\mu = 0,\ p^\mu p_\mu < 0,\ p^\mu = 0$. Le particelle osservate in fisica sono associate alle prime due rappresentazioni.

5 Il Gruppo SL(2,C)

Vediamo di dimostrare che il gruppo di ricoprimento universale di $SO_0(1, 3)$ è $SL(2, C)$, ovvero il gruppo delle matrici complesse 2×2 con determinante uguale a uno.

Consideriamo le matrici σ_μ , $\tilde{\sigma}_\mu$ ($\mu = 0,1,2,3$) definite da

$$\sigma_\mu \equiv (I, -\tau_i) \qquad \tilde{\sigma}_\mu \equiv (I, \tau_i) \tag{5.1}$$

dove le τ_i ($i = 1,2,3$) sono le matrici di Pauli. Possiamo porre in corrispondenza i quadrivettori x^μ con le matrici hermitiane 2×2:

$$\hat{x} = x^\mu \tilde{\sigma}_\mu = x^0 + \vec{x} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

E'

$$x_\mu = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\hat{x} \sigma_\mu) \tag{5.3}$$

come si verifica utilizzando

$$\mathrm{Tr} \sigma_\mu \tilde{\sigma}_\nu = 2 g_{\mu\nu} \tag{5.4}$$

Osserviamo poi che $\det \hat{x} = x^2 = x_\mu x^\mu$ ed inoltre $x^0 = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \hat{x}$. Definiamo nello spazio delle $\hat{x}$ la trasformazione lineare

$$\hat{x}' = U \hat{x} U^\dagger \quad \forall U \in SL(2,C) \tag{5.5}$$

La trasformazione definita dalla (5.5) soddisfa $\det \hat{x}' = \det \hat{x}$ dato che $\det U = 1$ e quindi induce una trasformazione $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ con $(x')^2 = x^2$. Pertanto $\Lambda \in O(1,3)$. Invertendo la (5.5) si può anche ricavare la forma esplicita di Λ:

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\sigma_\mu U \tilde{\sigma}_\nu U^\dagger) \tag{5.6}$$

In realtà si riesce a dimostrare che $\Lambda \in SO_0(1,3)$.

Inoltre ad ogni U corrisponde un solo Λ mentre ad ogni Λ corrispondono $\pm U$. Questa corrispondenza conserva il prodotto (è un omomorfismo). Il nucleo dell'omomorfismo è Z_2 e quindi c'è un isomorfismo

$$\frac{SL(2,C)}{Z_2} \to SO_0(1,3) \tag{5.7}$$

$SL(2,C)$ è semplicemente connesso ed è quindi il gruppo di ricoprimento universale di $SO_0(1,3)$. Per studiare le rappresentazioni di $SO_0(1,3)$ dovremo studiare quelle di $SL(2,C)$.

Nell'ambito di questo corso costruiremo solo le rappresentazioni di $SL(2,C)$. Definendo

$$J_k^{(1)} = \frac{1}{2}(J_k - iN_k) \qquad J_k^{(2)} = \frac{1}{2}(J_k + iN_k) \tag{5.8}$$

e facendo uso delle (4.38), otteniamo la seguente algebra

$$\begin{aligned} \left[J_i^{(1)}, J_j^{(1)}\right] &= i\epsilon_{ijk} J_k^{(1)} \\ \left[J_i^{(1)}, J_j^{(2)}\right] &= 0 \\ \left[J_i^{(2)}, J_j^{(2)}\right] &= i\epsilon_{ijk} J_k^{(2)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

La struttura di questa algebra è quella che corrisponde all'algebra di Lie del gruppo prodotto diretto $SU(2)\times SU(2)$. D'altra parte il problema di determinare le rappresentazioni irriducibili unitarie di $SU(2) \times SU(2)$ è del tutto banale. Queste sono date dal prodotto diretto $D^{j_1} \otimes D^{j_2} \equiv (j_1, j_2)$, dove D^j è la rappresentazione di spin (peso massimo) j del gruppo $SU(2)$. Quindi

$$(\vec{J}^{(i)})^2|j_i, m_i >= j_i(j_i + 1)|j_i, m_i > \qquad i = 1, 2 \tag{5.10}$$

Possiamo ora facilmente vedere il contenuto di una rappresentazione rispetto al sottogruppo $SU(2)$ di $SL(2, C)$ generato da $\vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$. Poichè $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$ il contenuto di spin sarà

$$|j_1 - j_2|, ..., j_1 + j_2 \tag{5.11}$$

La rappresentazione $(0, 0)$ è la rappresentazione scalare. Le rappresentazioni di dimensione piú bassa, dopo la scalare, sono le rappresentazioni spinoriali $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$. Queste hanno gli operatori $\vec{J}^{(1)}$ e $\vec{J}^{(2)}$ rappresentati come $\frac{1}{2}\vec{\tau}$ e 0 per la $(\frac{1}{2}, 0)$ e viceversa per la $(0, \frac{1}{2})$. Equivalentemente gli operatori $\vec{J}$ e $\vec{N}$ delle (4.38) sono rappresentati da $\frac{1}{2}\vec{\tau}$ e $\frac{i}{2}\vec{\tau}$ nella rappresentazione $(\frac{1}{2}, 0)$ e da $\frac{1}{2}\vec{\tau}$ e $-\frac{i}{2}\vec{\tau}$ nella $(0, \frac{1}{2})$.

Osserviamo che la rappresentazione (j_1, j_2) può esser decomposta nel prodotto diretto

$$(j_1, j_2) = (j_1, 0) \otimes (0, j_2) \tag{5.12}$$

e che ogni rappresentazione $(l, 0)$ può esser decomposta nel prodotto diretto di $2l$ fattori $(\frac{1}{2}, 0)$ (prodotto tensoriale e simmetrizzazione).

Le rappresentazioni del gruppo $SL(2, C)$ sono rappresentazioni a due valori del gruppo di Lorentz. In generale solo le rappresentazioni di $SL(2, C)$ con $j_1 + j_2$ intero sono vere rappresentazioni del gruppo di Lorentz.

I vettori degli spazi delle due rappresentazioni $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ sono spinori a due componenti detti *spinori* e *spinori coniugati.*

Su questi spazi il generico elemento di $SO_0(1, 3)$

$$U = \exp(\frac{i}{2}\alpha_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) = \exp(i\alpha_{0i}N_i + \frac{i}{2}\alpha_{ij}\epsilon_{ijk}J_k) \tag{5.13}$$

dopo aver posto

$$\chi_i = \alpha_{0i} \qquad \alpha_k = \frac{1}{2}\alpha_{ij}\epsilon_{ijk} \tag{5.14}$$

diventa

$$U = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{J} + i\vec{\chi} \cdot \vec{N}) \tag{5.15}$$

Per esempio per la rappresentazione $(\frac{1}{2}, 0)$ si ha

$$U = \exp \frac{i}{2}(\vec{\alpha} + i\vec{\chi}) \cdot \vec{\tau} \tag{5.16}$$

Lo spazio su cui operano tali matrici è lo spazio degli spinori (undotted) $\psi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2$. Analogamente per la rappresentazione $(0, \frac{1}{2})$ si ha

$$U = \exp \frac{i}{2}(\vec{\alpha} - i\vec{\chi}) \cdot \vec{\tau} \tag{5.17}$$

e lo spazio è quello degli spinori (dotted) $\psi_{\dot{\alpha}}$. Gli spinori di Dirac sono ottenuti facendo la somma diretta di spinori $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Risulta pertanto evidente la non unitarietà delle rappresentazioni. Le rappresentazioni unitarie del gruppo di Poincaré saranno infinito dimensionali. Come si vede la rappresentazione 2×2 di $SL(2, C)$ non è unitaria; infatti i generatori dei boosts sono antihermitiani. Come vedremo questo sarà vero per tutte le rappresentazioni finito dimensionali di $SL(2, C)$ ed è dovuto alla non compattezza del gruppo ($\tanh \chi = v/c$ e quindi il range χ è $-\infty \leq \chi \leq \infty$). Si può dimostrare che per un gruppo di Lie non compatto le rappresentazioni unitarie sono infinito dimensionali. Tutte queste affermazioni sono vere a causa dell'isomorfismo anche per $T_4 \otimes_s SO_0(1, 3)$.

La variabile χ con cui i boost sono rappresentati è la cosiddetta *rapidità*. Per esempio nel caso di un boost lungo la direzione x, la (5.17) diventa $\exp(-\chi\tau_1/2)$, dove

$$\chi = \log \gamma(1 + \beta) = \log \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \tag{5.18}$$

e $\beta = v/c$. In particolare in boost successivi lungo lo stesso asse le rapidità si sommano.

Come abbiamo visto le rappresentazioni spinoriali sono rappresentazioni a due valori del gruppo delle rotazioni. Pertanto quando facciamo una rotazione di 2π intorno all'asse z su uno spinore $|\psi\rangle = \psi^1|+\rangle + \psi^2|-\rangle$ con $\tau_3|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$ otteniamo

$$|\psi\rangle \to \exp\left(\frac{i}{2}\tau_3 2\pi\right)|\psi\rangle = -|\psi\rangle \tag{5.19}$$

Quindi per riottenere lo stato $|\psi\rangle$ dobbiamo fare una rotazione di 4π. Un esperimento di interferometria neutronica ha confermato questa proprietà delle particelle di spin 1/2. Un fascio di neutroni viene separato in due fasci che seguono due cammini diversi e vengono poi fatti interferire. Un fascio passa attraverso un percorso privo di campo magnetico e l'altro in un campo magnetico che ne altera la fase, in modo equivalente ad una rotazione. La distanza tra i picchi delle figure di interferenza mostra che ci vuole una rotazione di 4π per riottenere lo spinore $|\psi\rangle$ (Rauch et al, Phys. Lett. **54A** (1975) 425, Werner et al, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 1053).

Riferimenti bibliografici

[1] L. O'Raifeartaigh, Group Structure of Gauge Theories, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[2] Wu-Ki Tung, Group Theory in Physics, World Scientific, Singapore, 1985.

[3] J. F. Cornwell, Group Theory in Physics, Academic Press, London, 1984.

[4] L. S. Pontryagin, Topological Groups, Gordon and Breach, New York, 1966.