

Capitolo 2

Teoria delle funzioni di variabile complessa

2.1. Funzioni complesse

Assegnato un sottoinsieme Ω dell'insieme dei numeri complessi, se ad ogni elemento z di Ω corrisponde uno o più valori di una variabile complessa w si dice che w è una funzione della variabile complessa z e si scrive

$$w = f(z).$$

Una funzione di variabile complessa si dice *ad un solo valore* se ad ogni valore di z corrisponde un solo valore di w ; in caso contrario la funzione si dice *a più valori*. In generale si può scrivere

$$w = f(z) = u(x, y) + \iota v(x, y)$$

dove $u(x, y)$ e $v(x, y)$ descrivono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della funzione.

Esempio 2.1.1

$$w = z^2 = (x + \iota y)^2 = x^2 - y^2 + \iota 2xy$$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Fintanto che non sarà stabilito diversamente intenderemo $f(z)$ sempre ad un solo valore.

2.2. Intorni e insiemi in \mathbb{C}

Definizione 2.2.1 Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $\rho > 0$ si dice intorno di z_0 l'insieme

$$I(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}.$$

Definizione 2.2.2 Un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice aperto se per ogni $z_0 \in A$ esiste un intorno $I(z_0) \subset A$.

Definizione 2.2.3 Un insieme $A \subset \mathbb{C}$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.

Definizione 2.2.4 Fissato $\rho > 0$ si definisce intorno dell'infinito l'insieme

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\}.$$

Definizione 2.2.5 Fissato $A \subseteq \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ allora z_0 si dice punto di accumulazione per A se per ogni intorno $I(z_0)$ esiste un punto $z_1 \in A$, con $z_1 \neq z_0$, tale che $z_1 \in I(z_0)$.

2.3. Limiti e continuità

Le definizioni di limite e di continuità di una funzione di variabile complessa sono formalmente identiche a quelle già note per funzioni di variabile reale. Così, per esempio, diremo che $f(z)$ ha limite $l \in \mathbb{C}$ per z che tende a z_0 e scriveremo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta : |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Diremo che f è continua in z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

2.4. Derivate

Se $f(z)$ in una *regione* del piano è ad un solo valore, la *derivata* di $f(z)$, indicata con $f'(z)$ o con

$$\frac{df(z)}{dz}$$

è definita da

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.1)$$

a condizione che tale limite esista e sia *indipendente* dal modo con cui Δz tende a 0. Se il limite (2.1) esiste per $z = z_0$ si dice che f è *derivabile* in z_0 . Se il limite (2.1) esiste per tutti gli z in un opportuno intorno di z_0 , cioè esiste un $\delta > 0$ tale che il limite esiste per ogni z tale che $|z - z_0| < \delta$, allora si dice che f è *analitica* in z_0 . Se il limite (2.1) esiste per tutti gli z di una regione \mathcal{R} contenuta in \mathbb{C} allora si dice che f è *analitica* in \mathcal{R} .

2.5. Equazioni di Cauchy-Riemann

Condizione necessaria affinché

$$w = f(z) = u(x, y) + \iota v(x, y)$$

sia analitica nella regione $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ è che

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}.$$

Dimostrazione.

Poichè

$$f(z) = f(x + \iota y) = u(x, y) + \iota v(x, y)$$

si ha

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) &= f(x + \Delta x + \iota(y + \Delta y)) = \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) + \iota v(x + \Delta x, y + \Delta y). \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + \iota v(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - \iota v(x, y)}{\Delta x + \iota \Delta y}.$$

In virtù dell'analiticità di f il limite in questione non dipende da come Δz tende a 0. Scegliendo $\Delta y = 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + \iota \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \quad (2.2) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \iota \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Se invece scegliamo $\Delta x = 0$, allora

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\iota \Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = \quad (2.3) \\ &= \frac{1}{\iota} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Poichè (2.2) e (2.3) coincidono risulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \iota \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\iota} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\iota \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

da cui le equazioni di Cauchy-Riemann. \square

Osservazione. Da (2.2) e (2.3) è anche evidente che

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \iota \frac{\partial v}{\partial x} = -\iota \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Viceversa si può dimostrare che se le derivate parziali prime di u e v rispetto a x e y sono continue nella regione \mathcal{R} allora le equazioni di

Cauchy-Riemann sono anche condizioni sufficienti per l'analiticità di $f(z)$ in \mathcal{R} .

Osservazione. Se le derivate parziali seconde di u e v rispetto a x e y sono continue, derivando le condizioni di Cauchy-Riemann si trova:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Dunque la parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica sulla regione \mathcal{R} soddisfano l'equazione di Laplace bidimensionale. Le funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace sono dette *funzioni armoniche*.

Esempio 2.5.1 *Dimostrare che $\frac{d\bar{z}}{dz}$, dove \bar{z} è il coniugato di z , non esiste in alcun punto.*

Per definizione

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \bar{z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\overline{x + \iota y + \Delta x + \iota \Delta y} - \overline{x + \iota y}}{\Delta x + \iota \Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{x - \iota y + \Delta x - \iota \Delta y - (x - \iota y)}{\Delta x + \iota \Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \iota \Delta y}{\Delta x + \iota \Delta y}. \end{aligned}$$

Affinchè la derivata esista questo limite deve esistere ed essere indipendente dal modo con cui Δz tende a 0; però scegliendo $\Delta x = 0$, abbiamo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\iota \Delta y}{\iota \Delta y} = -1$$

mentre scegliendo $\Delta y = 0$ abbiamo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Questi due possibili percorsi di avvicinamento a zero provano che il limite dipende dal modo con cui Δz tende a 0 per cui la derivata non esiste, cioè \bar{z} non è analitica in alcun punto.

Esempio 2.5.2 Verificare che la funzione

$$u(x, y) = xe^{-y} \cos x - ye^{-y} \sin x$$

è armonica e determinare $v(x, y)$ in modo tale che $f = u + iv$ sia analitica.

Calcoliamo le derivate parziali di $u(x, y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \cos x - xe^{-y} \sin x - ye^{-y} \cos x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} &= -e^{-y} \sin x - e^{-y} \sin x - xe^{-y} \cos x + ye^{-y} \sin x = \\ &= (y - 2)e^{-y} \sin x - xe^{-y} \cos x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} \cos x - e^{-y} \sin x + ye^{-y} \sin x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} &= xe^{-y} \cos x + e^{-y} \sin x + e^{-y} \sin x - ye^{-y} \sin x = \\ &= -(y - 2)e^{-y} \sin x + xe^{-y} \cos x. \end{aligned}$$

Dunque

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0.$$

Ora imponendo la prima condizione di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
 v(x, y) &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \\
 &= \int (e^{-y} \cos x - xe^{-y} \sin x - ye^{-y} \cos x) dy = \\
 &= -e^{-y} \cos x + xe^{-y} \sin x + ye^{-y} \cos x + e^{-y} \cos x + F(x) = \\
 &= xe^{-y} \sin x + ye^{-y} \cos x + F(x).
 \end{aligned}$$

Derivando rispetto a x quest'ultima abbiamo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y} \sin x + xe^{-y} \cos x - ye^{-y} \sin x + F'(x).$$

Dalla seconda condizione di Cauchy-Riemann si ricava $F'(x) = 0$ e quindi $F(x) = \text{costante}$. In definitiva

$$v(x, y) = xe^{-y} \sin x + ye^{-y} \cos x + \text{costante}.$$

Osservazione. Le funzioni di variabile complessa a valori reali sono un sottoinsieme delle funzione di variabile complessa a valori complessi. Ci si può chiedere quando funzioni del tipo:

$$f(z) = u(x, y) + i0$$

siano analitiche.

Per le condizioni di Cauchy-Riemann (essendo $v(x, y) = 0$) deve essere

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

cioè $u(x, y) = \text{costante}$. Perciò le funzioni reali di variabile complessa che non sono costanti sono esempi di funzioni non analitiche. Tra queste vi sono per esempio $|z|$, $\arg(z)$, $\Re z$, $\Im z$ e $z\bar{z}$.

Esempio 2.5.3 *Assegnata*

$$w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

determinare $\frac{dw}{dz}$ ed indicare dove w è analitica.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \frac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)} = \\ &= \frac{2}{(1-z)^2}\end{aligned}$$

a condizione che $z \neq 1$ e indipendentemente dal modo con cui Δz tende a 0. La funzione è analitica dappertutto tranne che in $z = 1$, dove la derivata non esiste.

2.6. Regole di derivazione

Le regole di derivazione e le derivate di funzioni elementari sono formalmente identiche a quelle di variabile reale. Infatti siano $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, due funzioni analitiche in Ω e ϕ analitica in un sottoinsieme I di \mathbb{C} tale che $\phi(I) \subset \Omega$. Allora:

$$\frac{d}{dz}(\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$$

$$\frac{d}{dz}f(z)g(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \quad \text{se } g(z) \neq 0$$

$$\frac{d}{dz}f(\phi(z)) = f'(\phi(z))\phi'(z).$$

2.7. Integrali di Linea

Sia Γ una curva regolare¹ del piano (x, y) congiungente i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . L'integrale

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) \quad \text{oppure} \quad \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (Pdx + Qdy)$$

con P e Q funzioni di x e y è detto *integrale di linea lungo la curva Γ* . Se

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

allora

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

Due importanti proprietà degli integrali di linea sono:

1.

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (Pdx + Qdy) = - \int_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} (Pdx + Qdy)$$

2. Se (x_3, y_3) è un qualsiasi punto di Γ , allora

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (Pdx + Qdy) = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_3, y_3)} (Pdx + Qdy) + \int_{(x_3, y_3)}^{(x_2, y_2)} (Pdx + Qdy).$$

Se Γ è una curva semplice e chiusa (cioè non interseca se stessa in alcun punto tranne gli estremi) l'integrale lungo Γ percorso in senso antiorario è indicato con

$$\oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy).$$

Vale il seguente

¹Se la curva

$$\Gamma := \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

e le derivate prime di $x(t)$ e $y(t)$ rispetto a t sono continue allora Γ è detta *curva regolare*.

Teorema 2.7.1 (*di Green nel piano*). Sia Γ una curva semplice e chiusa che delimita la regione \mathcal{R} . Supponiamo che P, Q e le rispettive derivate parziali prime rispetto a x ed y siano continue in \mathcal{R} e su Γ . Allora

$$\oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad \square$$

2.8. Integrali

Se $f(z)$ è definita, ad un sol valore e continua in una regione \mathcal{R} , si definisce l'integrale di $f(z)$ lungo una qualsiasi curva regolare Γ di \mathcal{R} tra il punto z_1 e il punto z_2 , dove $z_1 = x_1 + \iota y_1$ e $z_2 = x_2 + \iota y_2$, il seguente:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (u(x, y) + \iota v(x, y))(dx + \iota dy) = \\ &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + \\ &\quad + \iota \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (v(x, y)dx + u(x, y)dy). \end{aligned}$$

Con questa definizione l'integrale di una funzione di variabile complessa, viene fatto dipendere da un integrale di linea. Le regole di integrazione delle funzioni di variabile complessa sono simili a quelle dell'integrazione di funzioni di variabile reale.

Esempio 2.8.1 *Calcolare*

$$\int_{\Gamma_1} \bar{z} dz$$

lungo la curva Γ_1 così definita

$$\Gamma_1 =: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \bar{z} dz &= \int_{\Gamma_1} (x - iy)(dx + i dy) = \\
&= \int_{\Gamma_1} (x dx + y dy + i(x dy - y dx)) = \\
&= \int_{\Gamma_1} (x dx + y dy) + i \int_{\Gamma_1} (x dy - y dx) = \\
&= \int_0^2 (2t)(2) dt + t dt + i \int_0^2 (2t) dt - t(2) dt = \int_0^2 5t dt = 10.
\end{aligned}$$

Esempio 2.8.2 Calcolare l'integrale della funzione precedente lungo la curva $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dove

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &=: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} & t \in [0, 4]; \\
\Gamma_2 &=: \begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} & t \in [0, 2]
\end{aligned}$$

come è mostrato in figura 2.1.

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \bar{z} dz &= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \bar{z} dz = \int_{\Gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\Gamma_2} \bar{z} dz = \\
&= \int_{\Gamma_1} x dx + y dy + i \int_{\Gamma_1} x dy - y dx + \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} x dx + y dy + i \int_{\Gamma_2} x dy - y dx = \\
&= \int_0^4 t dt + \int_0^2 t dt + i \int_0^2 4 dt = 10 + i8.
\end{aligned}$$

Esempio 2.8.3 Calcolare:

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$$

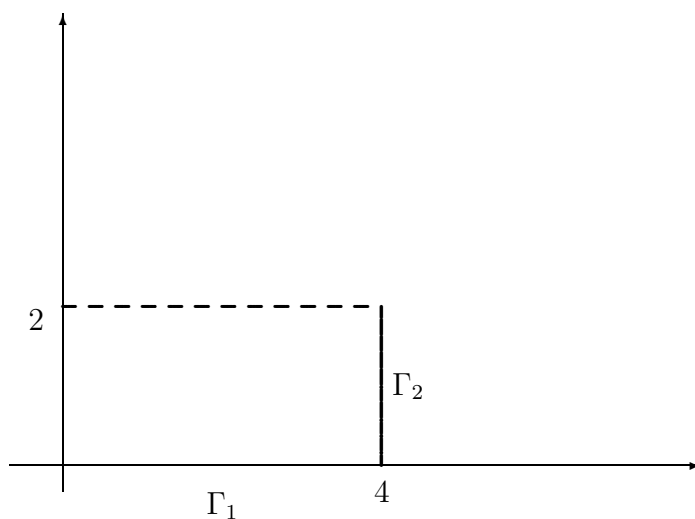


Figura 2.1:

- a) lungo la parabola $x = t$, $y = t^2$, con $1 \leq t \leq 2$;
- b) lungo il segmento di retta tra $1 + \iota$ e $2 + 4\iota$;
- c) lungo i segmenti di retta tra $1 + \iota$ e $2 + \iota$ e tra questo e $2 + 4\iota$.

Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{1+\iota}^{2+4\iota} z^2 dz &= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x + \iota y)^2 (dx + \iota dy) = \\
 &= \int_{(1,1)}^{(2,4)} \left[(x^2 + y^2) dx - 2xy \, dy \right] + \\
 &\quad + \iota \int_{(1,1)}^{(2,4)} \left[2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy \right].
 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
\int_{1+\iota}^{2+4\iota} z^2 dz &= \int_{t=1}^2 \left[(t^2 - t^4) dt - 2t(t^2) 2t dt \right] + \\
&\quad + \iota \int_{t=1}^2 \left[2t(t^2) dt + (t^2 - t^4) 2t dt \right] = \\
&= -\frac{86}{3} - 6\iota.
\end{aligned}$$

b) la retta passante per $(1, 1)$ e $(2, 4)$ ha equazione

$$y - 1 = 3x - 3.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{1+\iota}^{2+4\iota} z^2 dz &= \int_{x=1}^2 \left\{ \left[x^3 - (3x - 3) \right] dx - 2x(3x - 3) dx \right\} + \\
&\quad + \iota \int_{x=1}^2 \left\{ 2x(3x - 3) dx + \left[x^2(3x - 3)^2 \right] 3 dx \right\} = \\
&= -\frac{86}{3} - 6\iota.
\end{aligned}$$

c) Tra i punti $1 + \iota$ e $2 + \iota$ (ossia i punti $(1, 1)$ e $(2, 1)$) si ha $y = 1$ e $dy = 0$ e quindi:

$$\int_{x=1}^2 (x^2 - 1) dx + \iota \int_{x=1}^2 2x dx = \frac{4}{3} + 3\iota.$$

Tra i punti $2 + \iota$ e $2 + 4\iota$ (ossia i punti $(2, 1)$ e $(2, 4)$) si ha $x = 2$ e $dx = 0$ e quindi:

$$\int_{y=1}^4 (-4y) dy + \iota \int_{y=1}^4 (4 - y^2) dy = -30 - 9\iota.$$

Sommando

$$\frac{4}{3} + 3\iota + (-30 - 9\iota) = -\frac{86}{3} - 6\iota.$$

Osservazione. Gli esempi visti mostrano che vi sono funzioni (come $f(z) = \bar{z}$) per le quali cambiando il cammino di integrazione che congiunge due assegnati punti in \mathbb{C} cambia il valore dell'integrale, mentre vi sono funzioni (come per esempio $f(z) = z^2$) per le quali sembra che il valore dell'integrale sia indipendente dal cammino di integrazione ma dipende esclusivamente dal punto di partenza e da quello di arrivo del cammino.

Teorema 2.8.1 (*di Cauchy*). Sia $f(z)$ analitica nella regione \mathcal{R} interna ad una curva semplice e chiusa, ed analitica su C . Allora:

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \oint_C (u + \iota v)(dx + \iota dy) = \\ &= \oint_C (udx - vdy) + \iota \oint_C (vdx + udy). \end{aligned}$$

Per il teorema di Green

$$\begin{aligned} \oint_C (udx - vdy) &= \int \int_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \\ \iota \oint_C (vdx + udy) &= \iota \int \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Per l'analiticità di f nella regione \mathcal{R} delimitata da C

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pertanto gli integrali (2.4) sono nulli². \square

²Si è fatta l'ipotesi che $f'(z)$ e le derivate parziali prime siano continue. In verità questa restrizione può essere eliminata.

Teorema 2.8.2 (*Indipendenza dal cammino*). Sia $f(z)$ analitica nella regione \mathcal{R} interna alla curva semplice e chiusa \mathcal{C} ed analitica su \mathcal{C} . Allora per ogni $P_1, P_2 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ l'integrale

$$\int_{P_1}^{P_2} f(z) dz$$

è indipendente dal percorso che unisce P_1 e P_2 .

Dimostrazione. Siano P_1AP_2 e P_1BP_2 due qualsiasi percorsi congiungenti P_1 e P_2 (come mostrato in figura 2.2). Per il teorema di Cauchy

$$\oint_{P_1AP_2BP_1} f(z) dz = 0$$

ovvero

$$\begin{aligned} \int_{P_1AP_2} f(z) dz + \int_{P_2BP_1} f(z) dz &= 0 \\ \int_{P_1AP_2} f(z) dz &= - \int_{P_2BP_1} f(z) dz = \int_{P_1BP_2} f(z) dz. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione. Questo risultato spiega perchè l'integrale calcolato nell'esempio 2.8.3 fornisce lo stesso risultato in tutti i tre casi.

Corollario 2.8.1 Se $f(z)$ è analitica all'interno e sul contorno di una regione delimitata da due linee chiuse C_1 e C_2 allora

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz^3$$

Dimostrazione. Consideriamo due punti qualsiasi su C_2 e C_1 , ed indichiamoli con A e B (come mostrato in figura 2.3), e consideriamo il segmento congiungente questi due punti (il segmento AB viene detto *taglio trasversale*). In virtù del teorema di Cauchy (f è analitica nella regione compresa tra le due curve):

$$\oint_{APQABTSRBA} f(z) dz = 0.$$

Allora

$$\oint_{APQA} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \oint_{BTSRB} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0. \quad (2.5)$$

³Si può notare che non è richiesto che $f(z)$ sia analitica nell'interno di C_1 .

Figura 2.2:

Figura 2.3:

Ma

$$\int_{AB} f(z)dz = - \int_{BA} f(z)dz.$$

Quindi da (2.5):

$$-\oint_{APQA} f(z)dz = \oint_{AQPA} f(z)dz = \oint_{BTSRB} f(z)dz.$$

Cioè:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz. \quad \square$$

Teorema 2.8.3 (*Disuguaglianza ML*).

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)||dz| \leq M \int_{\Gamma} ds = ML$$

dove M è una limitazione superiore di $|f(z)|$ su Γ , cioè $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \Gamma$, ed L è la lunghezza del percorso.

Esempio 2.8.4 a) *Dimostrare che*

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

dove C è una curva semplice chiusa che delimita una regione che ha $z = a$ come punto interno.

b) *Valutare l'integrale per $n = 0, -1, -2, \dots$*

a) *Sia C_1 un cerchio di raggio ε centrato in $z = a$ (vedere figura 2.4). Poichè la funzione*

$$\frac{1}{(z-a)^n}$$

è analitica all'interno e sul contorno della regione delimitata da C e C_1 risulta, applicando il corollario al teorema di Cauchy:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

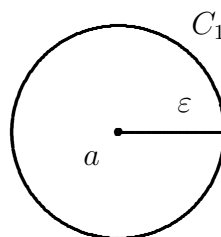


Figura 2.4:

Per calcolare quest'ultimo integrale poniamo

$$z - a = \varepsilon e^{i\theta}$$

da cui $dz = \varepsilon i e^{i\theta} d\theta$. L'integrale vale allora:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^n e^{i\theta n}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta &= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = \\ &= \left[\frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{se } n \neq 1. \end{aligned}$$

Se $n = 1$ l'integrale vale

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

- b) Per $n = 0, -1, -2, \dots$ la funzione integranda è rispettivamente $1, (z - a), (z - a)^2, \dots$, funzioni che risultano analitiche ovunque all'interno di C_1 compreso $z = a$. Quindi per il teorema di Cauchy l'integrale è nullo.

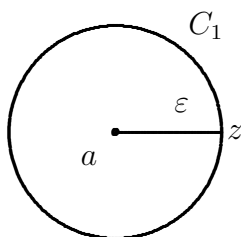


Figura 2.5:

Teorema 2.8.4 (*Formule integrali di Cauchy*). Se $f(z)$ è analitica all'interno e sulla linea semplice e chiusa C (qualunque essa sia) ed a è un qualsiasi punto interno a C , allora

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\iota} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

dove C è percorsa in senso antiorario. Inoltre la derivata n -esima di $f(z)$ valutata in $z = a$ è data da

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\iota} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Dimostrazione. Sia C_1 un cerchio di raggio ε e centro $z = a$ interno a C . Per l'analiticità di f nella regione compresa tra C e C_1 risulta:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Posto $z - a = \varepsilon e^{\iota\theta}$, l'integrale a secondo membro diventa

$$\iota \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{\iota\theta}) d\theta.$$

Poichè f è analitica allora è anche continua perciò

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iota \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \iota \int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi \iota f(a).$$

Da cui la prima formula integrale. La dimostrazione della seconda formula viene qui omessa. \square

Osservazione. Le formule integrali di Cauchy sono notevoli perchè affermano che se una funzione $f(z)$ è nota sulla linea chiusa \mathcal{C} , allora essa è nota anche all'interno di \mathcal{C} ed è possibile calcolare anche le derivate di ogni ordine di f in \mathcal{C} . Dunque se una funzione di variabile complessa ammette una derivata prima allora essa ammette derivate di qualunque ordine; ciò non è necessariamente vero per funzioni di variabile reale.

Esempio 2.8.5 *Calcolare*

a)

$$\oint_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz;$$

b)

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz;$$

dove C è il cerchio $|z - 1| = 3$.

a) Poichè $z = \pi$ è interno al cerchio C è

$$\cos \pi = \frac{1}{2\pi \iota} \oint_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz = -1$$

e pertanto

$$\oint_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz = -2\pi \iota.$$

b) Notiamo innanzitutto che i punti $z = 0$ e $z = -1$ sono interni al cerchio C . Allora

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz &= \oint_C e^z \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right] dz = \\ &= \oint_C \frac{e^z}{z} dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1} dz = \\ &= 2\pi \iota e^0 - 2\pi \iota e^{-1} = 2\pi \iota (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

Esempio 2.8.6 *Calcolare*

$$\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

dove C è una qualunque curva semplice chiusa che racchiude $z = 1$.
Per la formula integrale di Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Per $n = 2$, $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, $f''(1) = 10$, abbiamo

$$10 = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

ovvero

$$\oint_C \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz = 10\pi i.$$

2.9. Serie di Taylor

Sia $f(z)$ analitica all'interno e su una circonferenza di centro $z = a$. Allora per ogni z interno alla circonferenza vale la seguente rappresentazione (serie di Taylor):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}.$$

Dimostrazione. Sia C la circonferenza di centro a e raggio R e sia $a+h$ un punto interno a C (vedere figura 2.6).

In virtù della prima formula integrale di Cauchy:

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a-h} dz \quad (2.6)$$

Ricordiamo ora che per ogni numero complesso x risulta

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}. \quad (2.7)$$

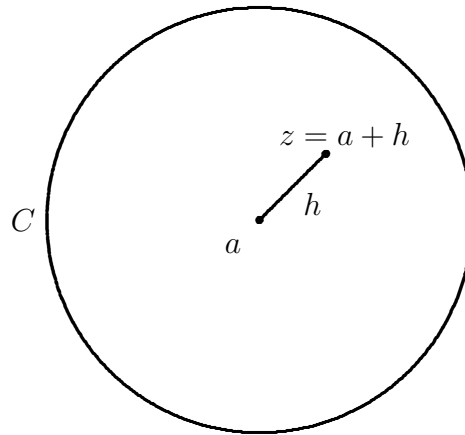


Figura 2.6:

Ora

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z - a - h} &= \frac{1}{(z - a) \left[1 - \frac{h}{z - a} \right]} = \\
 &= \frac{1}{z - a} \left[1 + \frac{h}{z - a} + \dots + \frac{h^n}{(z - a)^n} + \frac{h^{n+1}}{(z - a)^n(z - a - h)} \right].
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sostituendo (2.8) in (2.6) e applicando la formula integrale di Cauchy

per le derivate, abbiamo

$$\begin{aligned}
 f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \left[\sum_{k=0}^n \frac{h^k}{(z-a)^k} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)} \right] dz = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz + \\
 &\quad + \frac{h^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} dz = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{f(a)^{(k)}}{k!} h^k + R_n
 \end{aligned}$$

dove

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} dz.$$

Ora quando z si trova su C

$$\left| \frac{f(z)}{z-a-h} \right| \leq M$$

per il teorema di Weierstrass, e $|z-a| = R$, quindi in virtù della disuguaglianza ML si ha

$$|R_n| \leq \frac{|h|^{n+1} M}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R = RM \left(\frac{|h|}{R} \right)^{n+1}.$$

Quando n tende ad infinito allora $|R_n|$ tende a zero, perciò

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(a)^{(k)}}{k!} h^k.$$

Posto infine $a+h=z$ risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(a)^{(k)} \frac{(z-a)^k}{k!}. \quad \square$$

2.10. Punti singolari

Un punto singolare di una funzione $f(z)$ è un valore di z per il quale f non è analitica. Se $f(z)$ è analitica in tutta una regione tranne che in un suo punto interno $z = a$ allora si dice che $z = a$ è una *singolarità isolata* di $f(z)$.

Poli

Se

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z-a)^n}, \quad \Phi(a) \neq 0$$

dove $\Phi(z)$ è analitica in una regione che contiene $z = a$ ed n è un intero positivo, allora $f(z)$ ha in $z = a$ una singolarità isolata detta *polo di ordine n* . Se $n = 1$ il polo si dice *semplice*, se $n = 2$ si dice *doppio* e così via. In altri termini a è un polo se

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty.$$

Esempio 2.10.1 *La funzione*

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^3(z+1)}$$

ha due singolarità: $z = 3$, polo triplo, e $z = -1$, polo semplice.

Esempio 2.10.2 *La funzione*

$$f(z) = \frac{9z+4}{z^2+4} = \frac{9z+4}{(z-2i)(z+2i)}$$

ha due singolarità: $z = 2i$ e $z = -2i$, entrambe poli semplici.

Definizione 2.10.1 *Se z_0 è una singolarità per $f(z)$ ma*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

esiste ed è finito allora z_0 si dice singolarità eliminabile.

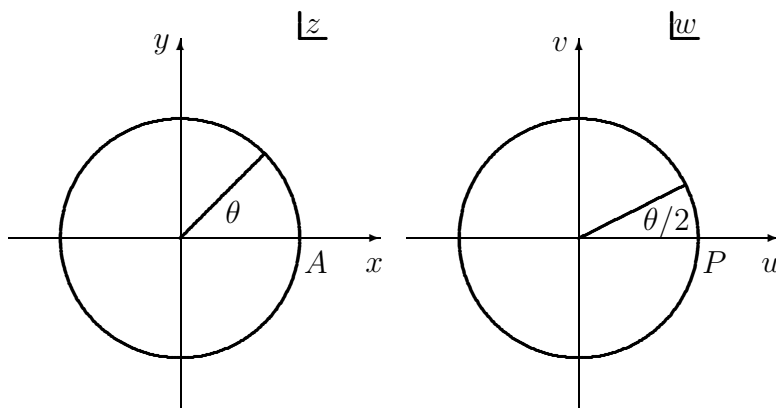


Figura 2.7: Sistemi di riferimento.

Singularità essenziale

Un punto isolato è detto *singularità essenziale* se non è una singolarità eliminabile nè un polo di ordine n (finito).

Esempio 2.10.3 *La funzione*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

ha in $z = 0$ una singolarità essenziale. Infatti se calcoliamo il limite per z che tende a 0 lungo l'asse delle x positive abbiamo:

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Dunque $z = 0$ non può essere una singolarità eliminabile. Facciamo vedere che non può nemmeno essere un polo calcolando il limite per z che tende a 0 lungo l'asse delle x negative. Infatti

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0.$$

Punti di diramazione

Vediamo ora un altro tipo di singolarità. Consideriamo il seguente esempio, schematizzato anche in figura 2.7. Supponiamo che $w = \sqrt{z}$

definisca una trasformazione del piano z nel piano w . Consideriamo ora un punto che si sposta in senso antiorario lungo la circonferenza $|z| = 1$. Vogliamo dimostrare che quando esso ritorna per la prima volta nella posizione di partenza il suo punto immagine non vi è ancora tornato; ma che quando esso vi ritorna per la seconda volta allora il punto immagine vi arriva per la prima volta. A tal fine sia $z = e^{i\theta}$ allora

$$w = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}.$$

Supponiamo che $\theta = 0$ corrisponda alla posizione di partenza. Allora $z = 1$ e $w = 1$ (punti corrispondenti A e P). Quando nel piano z si è fatta una rotazione completa, $\theta = 2\pi$, $z = 1$ ma

$$w = e^{i\theta/2} = e^{i\pi} = -1$$

per cui il punto immagine non è ancora tornato nella posizione di partenza. Tuttavia dopo due rotazioni in z , $\theta = 4\pi$, $z = 1$ e

$$w = e^{i\theta/2} = e^{i2\pi} = 1$$

per cui il punto immagine è tornato per la prima volta nella posizione di partenza. Ciò vuol dire che w non è una funzione ad un sol valore ma a due valori. Se si vuole una funzione ad un sol valore si deve restringere l'intervallo di θ ; imponendo per esempio $0 \leq \theta < 2\pi$. Questo rappresenta un ramo della funzione a due valori $w = \sqrt{z}$. Se si prosegue oltre questo intervallo si salta sul secondo ramo e così via.

Il punto $z = 0$ attorno al quale avviene la rotazione è detto *punto di diramazione*. Ci si può assicurare che $f(z) = \sqrt{z}$ sia ad un sol valore vincolandosi a non attraversare la semiretta $0x$ detta *retta di diramazione*.

2.11. Serie di Laurent

Siano C_1 e C_2 due cerchi concentrici con centro in a e raggi r_1 ed r_2 rispettivamente, con $r_1 < r_2$. Se $a+h$ è un qualsiasi punto nella regione anulare delimitata da C_1 e C_2 ed $f(z)$ è analitica in detta regione allora si ha

$$f(a+h) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h^n \quad \Leftrightarrow \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

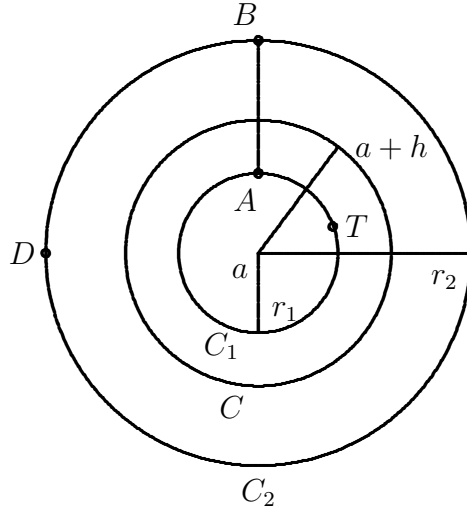


Figura 2.8:

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

dove C è una qualunque circonferenza centrata in a e contenuta nella corona circolare.

Dimostrazione. Siano A e B due generici punti rispettivamente su C_1 e C_2 . Consideriamo quindi il taglio trasversale AB (come è riportato in figura 2.8).

Essendo f analitica nella corona circolare risulta, per la formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2 \cup BA \cup (-C_1) \cup AB} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz. \end{aligned}$$

Consideriamo ora $z-(a+h)$ con $z \in C_1$.

$$z-(a+h) = (z-a) - h = -h \left[1 - \frac{z-a}{h} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-a-h} &= -\frac{1}{h} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{h}} = \\
&= -\frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{h^k} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{h}} \right] = \\
&= -\frac{1}{h} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{h^k} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h-z+a} \frac{1}{h^n} \right].
\end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'integrale su C_1 abbiamo

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a-h} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z) \left[\sum_{k=0}^n \frac{(z-a)^k}{h^{k+1}} + \frac{(z-a)^{n+1}}{h-z+a} \frac{1}{h^{n+1}} \right] dz = \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \right) \frac{1}{h^{k+1}} + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z) \frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}} \frac{1}{h-z+a} dz = \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \right) \frac{1}{h^{k+1}} + R_n
\end{aligned}$$

dove

$$R_n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{h} \right)^{n+1} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz.$$

Su C_1 si ha

$$\left| \frac{f(z)}{z-(a+h)} \right| \leq M; \quad \left| \frac{z-a}{h} \right| = \rho < 1.$$

Per la disuguaglianza ML:

$$|R_n| \leq M \rho^{n+1} r_1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

Conseguentemente

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \frac{1}{h^{k+1}}$$

quindi posto $n = -(k + 1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} f(z)(z-a)^k dz \frac{1}{h^{k+1}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz h^n.$$

Si noti che poichè la funzione

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

è analitica in tutta la regione anulare compresa tra C_1 e C e sopra queste l'integrale su C_1 è lo stesso che su C . Per l'integrale su C_2 si procede in modo perfettamente analogo. \square

La parte

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n h^n$$

della serie di Laurent si chiama *parte principale* o *parte polare* mentre la parte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

si chiama *parte analitica*.

Nelle pagine precedenti abbiamo caratterizzato i diversi tipi di singolarità di una funzione attraverso la nozione di limite. È possibile stabilire il tipo di singolarità osservando la parte principale dello sviluppo di Laurent di una funzione. In pratica vale il seguente teorema.

Teorema 2.11.1 (Enunciato). *Sia z_0 una singolarità isolata per una funzione analitica $f(z)$ e sia $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ la parte principale della serie di Laurent per $f(z)$. Allora*

1. z_0 è una singolarità eliminabile se e solo se $a_{-m} = 0$ per ogni m ;
2. z_0 è un polo di ordine $n > 0$ se e solo se la parte principale è la somma finita:

$$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0};$$

3. z_0 è una singolarità essenziale se e solo se la parte principale ha infiniti termini non nulli. \square

2.12. Residui e Teorema dei Residui

Se $f(z)$ è analitica ovunque all'interno di una curva C_1 semplice e chiusa ad eccezione di $z = a$ che è un polo di ordine n allora f ha la rappresentazione:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k \quad (2.9)$$

con $a_{-n} \neq 0$. Proviamo allora che

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \quad (2.10)$$

dove

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \quad (2.11)$$

e C è una qualunque circonferenza centrata in a e contenuta nella regione delimitata da C_1 . Inoltre a_{-1} è detto *residuo di $f(z)$ nel polo $z = a$* e si indica con $R(f, a)$.

Diamo qui un cenno della dimostrazione della (2.10). Integrando (2.9) su C segue:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} dz + \dots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a} dz + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \oint_C (z-a)^k dz.$$

Il risultato è immediata conseguenza dell'esempio 2.8.4.

Moltiplicando i membri di (2.9) per $(z-a)^n$ abbiamo

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \dots$$

Prendendo la derivata $(n-1)$ -esima di ambo i membri e passando al limite per $z \rightarrow a$ segue:

$$(n-1)! a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}.$$

Teorema 2.12.1 (dei Residui). *Se $f(z)$ è analitica all'interno e su una curva chiusa e semplice \mathcal{C} ad eccezione di un numero finito di poli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ allora*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^m R(f, \alpha_i)$$

dove $R(f, \alpha_i)$ è il residuo di f in α_i .

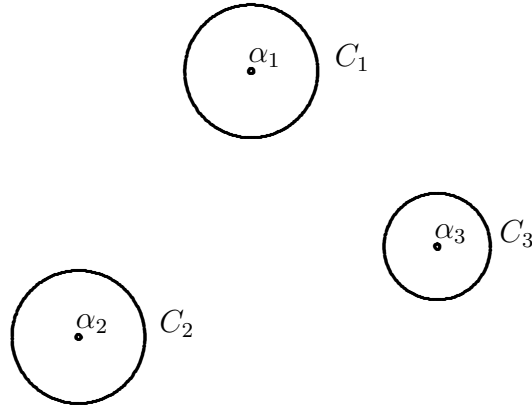


Figura 2.9:

Dimostrazione. Per $i = 1, \dots, n$, sia C_i una circonferenza di centro α_i e raggio r_i (parametrizzate al solito in senso antiorario), ognuna delle quali contenuta in C (vedere figura 2.9).

Considerando dei tagli trasversali tra C e ognuna delle C_i e tendendo conto del teorema di Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

dove

$$\begin{aligned} \Gamma = & \Gamma_1 + B_2 A_2 - C_2 - A_2 B_2 + \Gamma_2 + B_3 A_3 - C_3 - A_3 B_3 + \\ & + \Gamma_3 + B_1 A_1 - C_1 - A_1 B_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z) dz.$$

Poichè per il polo α_i si ha

$$f(z) = \frac{a_{-m_i}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha_i} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,i} (z - \alpha_i)^k$$

Applicando la formula (2.10) segue:

$$\oint_{C_i} f(z)dz = 2\pi\iota R(f, \alpha_i)$$

e pertanto

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi\iota \sum_{i=1}^m R(f, \alpha_i). \quad \square$$

2.13. Calcolo di integrali definiti

Il calcolo di diversi tipi di integrali definiti può spesso prendere vantaggio dall'applicazione del teorema dei residui oppure scegliendo un opportuno cammino di integrazione. Vediamo ora gli integrali che ricorrono più spesso nella pratica. Il primo tipo è il seguente

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

con $f(x)$ funzione pari.

L'idea è quella di considerare

$$\oint_\Gamma f(z)dz$$

lungo un contorno Γ costituito da un segmento sull'asse x tra $-R$ e $+R$ e dal semicerchio sopra l'asse x avente come diametro il suddetto segmento, quindi far tendere R ad infinito. Il seguente risultato serve a precisare il metodo di risoluzione.

Sia C la semicirconferenza disegnata in figura 2.10 e

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \quad \forall z \in C$$

dove M e k sono opportune costanti con $k > 1$, allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z)dz = 0.$$

Dimostrazione.

In virtù della disuguaglianza ML:

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}.$$

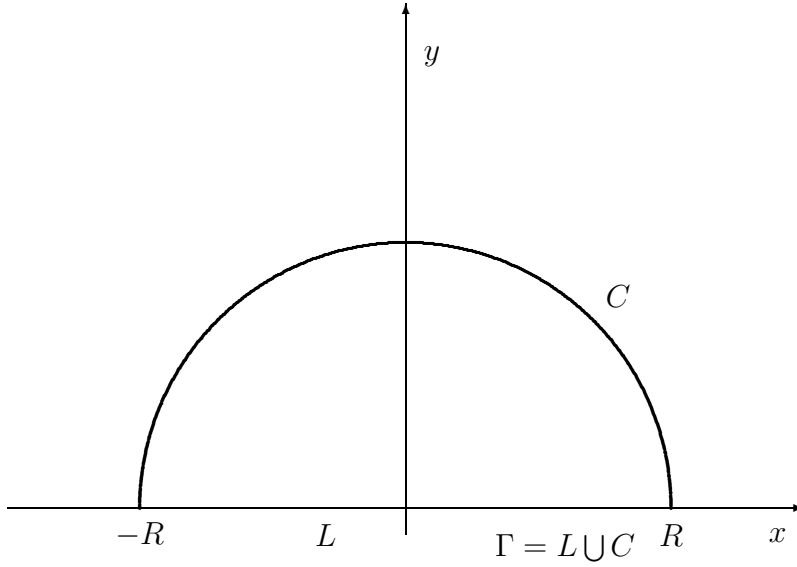


Figura 2.10:

Allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \pi M \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{k-1}} = 0.$$

Perciò, tenuto conto che

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{-R}^R f(z) dz + \int_C f(z) dz = \\ &= \int_{-R}^R f(x) dx + \int_C f(z) dz, \end{aligned}$$

segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \oint_{\Gamma(R \rightarrow \infty, 0)} f(z) dz.$$

E quest'ultimo integrale, per il teorema dei residui, è uguale a $2\pi\iota$ per la somma di tutti i residui situati nel semipiano positivo $y > 0$. \square

Si noti che nella dimostrazione dell'ultimo risultato non si richiede che la funzione sia pari. Pertanto lo stesso risultato può essere applicato al calcolo di

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f(x) dx = \pi\iota \sum R(f, \alpha_i)$$

dove α_i sono le singolarità di f nel semipiano strettamente positivo.

Esempio 2.13.1 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

I poli della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 2z + 2)}$$

sono:

$z = \iota$	<i>polo di ordine 2</i>
$z = -\iota$	<i>polo di ordine 2</i>
$z = -1 + \iota$	<i>polo semplice</i>
$z = -1 - \iota$	<i>polo semplice.</i>

I poli del semipiano strettamente positivo sono $z = \iota$ e $z = -1 + \iota$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx = 2\pi\iota [R(f, \iota) + R(f, -1 + \iota)].$$

Il residuo in ι è

$$\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{d}{dz} \left\{ (z - \iota)^2 \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 2z + 2)} \right\} = \frac{9\iota - 12}{100}.$$

Il residuo in $-1 + \iota$ è

$$\lim_{z \rightarrow -1 + \iota} \left\{ (z + 1 - \iota) \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2(z + \iota - 1)(z + 1 - \iota)} \right\} = \frac{3 - 4\iota}{25}.$$

L'integrale richiesto vale quindi $\frac{7}{50}\pi$.

Esempio 2.13.2 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}.$$

Posto

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

con $z = Re^{i\theta}$ proviamo innanzitutto che

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k} \quad k > 1.$$

Infatti

$$\left| \frac{1}{1+z^4} \right| = \frac{1}{|1+R^4 e^{i4\theta}|} \leq \frac{1}{R^4 |e^{i4\theta}| - 1} = \frac{1}{R^4 - 1} \leq \frac{2}{R^4}$$

per R sufficientemente grande (per esempio $R \geq 2$).⁴

$$z^4 + 1 = 0 \quad \text{per } z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

che sono tutti poli semplici di $f(z)$. I poli $e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ sono gli unici che cadono nel semipiano positivo. Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \pi i \left[R(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + R(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right].$$

$$R(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \left[(z - e^{i\frac{\pi}{4}}) \frac{1}{1+z^4} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$R(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left[(z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \frac{1}{1+z^4} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}}.$$

In definitiva

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi.$$

⁴Per il caso generale si vedano le pagine 19–21 del paragrafo sulle trasformate di Fourier.

Esempio 2.13.3 *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

I poli della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)}$$

sono:

$z = \iota$	<i>polo doppio</i>
$z = -\iota$	<i>polo doppio</i>
$z = 2\iota$	<i>polo semplice</i>
$z = -2\iota$	<i>polo semplice.</i>

I poli del semipiano strettamente positivo sono $z = \iota$ e $z = 2\iota$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} = 2\pi\iota [R(f, \iota) + R(f, 2\iota)].$$

Il residuo in ι è

$$\begin{aligned} R(f, \iota) &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{d}{dz} \left[(z - \iota)^2 \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z + \iota)^2(z^2 + 4)} \right] = \\ &= -\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{2(z + \iota)(z^2 + 4) + 2z(z + \iota)^2}{(z + \iota)^4(z^2 + 4)^2} = \\ &= -\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{2(z^2 + 4) + 2z(z + \iota)}{(z + \iota)^3(z^2 + 4)^2} = -\frac{\iota}{36}. \end{aligned}$$

Il residuo in 2ι è

$$\begin{aligned} R(f, 2\iota) &= \lim_{z \rightarrow 2\iota} \left[(z - 2\iota) \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z^2 + 4)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2\iota} \frac{1}{(z^2 + 1)^2(z + 2\iota)} = -\frac{\iota}{36}. \end{aligned}$$

L'integrale richiesto vale quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = 2\pi\iota \left(-\frac{\iota}{36} - \frac{\iota}{36} \right) = \frac{\pi}{9}.$$

Il secondo tipo di integrale che vogliamo calcolare è

$$\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

dove G è una funzione razionale di $\sin \theta$ e $\cos \theta$. La risoluzione si ottiene ponendo innanzitutto

$$z = e^{\iota\theta} (= \cos \theta + \iota \sin \theta) \quad (2.12)$$

$$\bar{z} = e^{-\iota\theta} (= \cos \theta - \iota \sin \theta) \quad (2.13)$$

$$\bar{z}z = |z|^2 = |e^{-\iota\theta}|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}. \quad (2.14)$$

Risolvendo rispetto a $\sin \theta$ e $\cos \theta$ mediante l'uso di (2.12), (2.13) e (2.14), si ha

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2\iota}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

e

$$dz = \iota e^{\iota\theta} d\theta \quad \left(d\theta = \frac{dz}{\iota z} \right).$$

Perciò

$$\int_0^{2\pi} G(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \oint_C G \left(\frac{z - z^{-1}}{2\iota}, \frac{z + z^{-1}}{2} \right) \frac{dz}{\iota z}$$

dove C è il cerchio unitario centrato nell'origine.

Esempio 2.13.4 *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta}.$$

Fatte le sostituzioni viste sopra abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta} &= \oint_C \frac{dz}{\iota z} \frac{1}{5 + 3 \left(\frac{z - z^{-1}}{2} \right)} = \\ &= \oint_C \frac{2dz}{3z^2 + 10\iota z - 3}. \end{aligned}$$

I poli della funzione integranda sono

$$z = \frac{-10\iota \pm \sqrt{-100 + 36}}{6} = \begin{cases} \frac{-10\iota + 8\iota}{6} = -\frac{\iota}{3} \\ \frac{-10\iota - 8\iota}{6} = -3\iota. \end{cases}$$

Solo il primo polo è contenuto nel cerchio unitario C e pertanto:

$$\oint_C \frac{2dz}{3z^2 + 10\iota z - 3} = 2\pi\iota \left(\frac{1}{4\iota} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 2.13.5 *Calcolare*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta.$$

Per procedere in questo caso dobbiamo considerare le sostituzioni viste sopra e inoltre dobbiamo osservare che

$$\cos 3\theta = \frac{e^{\iota 3\theta} + e^{-\iota 3\theta}}{2} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}; \quad dz = \iota z d\theta.$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta &= \oint_C \frac{z^3 + z^{-3}}{5 - 2(z + z^{-1})} \frac{dz}{2\iota z} = \\ &= -\frac{1}{2\iota} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz, \end{aligned}$$

dove C è al solito il cerchio unitario centrato nell'origine. I poli della funzione integranda sono

$$z = 0 \quad \text{polo di molteplicità } 3$$

$$z = 2 \quad \text{polo semplice esterno al cerchio } C$$

$$z = 1/2 \quad \text{polo semplice.}$$

$$-\frac{1}{2\iota} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz = \pi [R(f, 0) + R(f, 1/2)].$$

$$R(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} \right] = \frac{21}{8};$$

$$R\left(f, \frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow 1/2} \left[\left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} \right] = -\frac{65}{24};$$

e in definitiva

$$-\frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^6 + 1}{z^3(2z - 1)(z - 2)} dz = -\pi \left[\frac{21}{8} - \frac{65}{24} \right] = \frac{\pi}{12}.$$

Il terzo tipo di integrale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos mx dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin mx dx, \quad m > 0.$$

In questi casi si cerca di risolvere l'integrale

$$\oint_{\Gamma} f(z) e^{\iota m z} dz$$

dove Γ è il contorno descritto nel primo caso.⁵ Vale infatti il seguente risultato:

se

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$$

per $z = Re^{\iota\theta}$, dove $k > 1$ ed M sono costanti, allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) e^{\iota m z} dz = 0.$$

Dimostrazione. Se $z = Re^{\iota\theta}$ allora

$$\int_C f(z) e^{\iota m z} dz = \int_0^\pi f(Re^{\iota\theta}) e^{\iota m Re^{\iota\theta}} \iota Re^{\iota\theta} d\theta.$$

Allora

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(Re^{\iota\theta}) e^{\iota m Re^{\iota\theta}} \iota Re^{\iota\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{\iota\theta}) e^{\iota m R(\cos \theta + \iota \sin \theta)} \iota Re^{\iota\theta}| d\theta = \\ &= \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} |f(Re^{\iota\theta})| R d\theta \leq \\ &\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

⁵Si noti che le singolarità di $F(z) = e^{\iota m z} f(z)$ sono le stesse di $f(z)$.

Ora

$$\int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta.$$

Ponendo nel secondo integrale a secondo membro $\phi = \pi - \theta$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-mR \sin \theta} d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta - \int_{\pi/2}^0 e^{-mR \sin \phi} d\phi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Otteniamo così la maggiorazione

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{i m R e^{i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} d\theta. \quad (2.15)$$

Ora considerando la funzione

$$f(\theta) = \sin \theta - \theta \cos \theta \quad \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

abbiamo

$$f'(\theta) = \theta \sin \theta > 0 \quad \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

e quindi la funzione f è crescente e risulta $f(\theta) > f(0) = 0$, per $\theta > 0$.
Se adesso consideriamo la funzione

$$g(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta} \quad \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

abbiamo

$$g'(\theta) = \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2} < 0$$

e quindi la funzione $g(\theta)$ è decrescente, cioè

$$g(\theta) \geq g(\pi/2) \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}$$

cioè se $0 \leq \theta \leq \pi/2$ allora

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$$

L'integrale in (2.15) è quindi maggiorato da

$$\frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi M}{mR^k} (1 - e^{-mR}).$$

Quando R tende ad infinito, essendo m e k positivi, l'integrale tende a 0 e da ciò segue la tesi. \square

Come conseguenza di questo risultato abbiamo

$$\int_{\Gamma} f(z) e^{\iota m z} dz = \int_{-R}^R f(z) e^{\iota m z} dz + \int_C f(z) e^{\iota m z} dz,$$

ovvero

$$\int_{-R}^R f(z) e^{\iota m z} dz = \int_{\Gamma} f(z) e^{\iota m z} dz - \int_C f(z) e^{\iota m z} dz$$

poichè quando R tende a $+\infty$ il secondo integrale a secondo membro tende a 0 ne consegue che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\iota m x} dx = \int_{\Gamma(0, R \rightarrow +\infty)} f(z) e^{\iota m z} dz$$

e quest'ultimo integrale è $2\pi\iota$ per la somma di tutti i residui di $f(z)$ nel semipiano positivo. In definitiva

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos mx dx = \Re \left[2\pi\iota \sum \text{residui di } f \text{ nel semipiano } y > 0 \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin mx dx = \Im \left[2\pi\iota \sum \text{residui di } f \text{ nel semipiano } y > 0 \right]$$

Esempio 2.13.6 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx, \quad m > 0.$$

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{e^{\iota m z}}{1+z^2}$$

che ha i poli semplici $z = \pm \iota$, ma solo $z = \iota$ è nel semipiano strettamente positivo. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx &= \Re [2\pi \iota R(F, \iota)] = \\ &= \Re \left[2\pi \iota \lim_{z \rightarrow \iota} \left[(z - \iota) \frac{e^{\iota m z}}{(z - \iota)(z + \iota)} \right] \right] = \\ &= \Re \left[2\pi \iota \frac{e^{-m}}{2\iota} \right] = \pi e^{-m}. \end{aligned}$$

Essendo la funzione integranda pari allora risulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

Esempio 2.13.7 Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{ze^{\iota \pi z}}{(z^2 + 1)^2}$$

che ha due poli doppi $z = \pm \iota$, ma solo $z = \iota$ appartiene al semipiano a parte immaginaria positiva. Calcoliamo ora il residuo della funzione

$f(z)$ relativo al polo $z = \iota$.

$$\begin{aligned}
 R(F, \iota) &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{d}{dz} \left[(z - \iota)^2 \frac{ze^{\iota\pi z}}{(z - \iota)^2(z + \iota)^2} \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{d}{dz} \left[\frac{ze^{\iota\pi z}}{(z + \iota)^2} \right] = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{e^{\iota\pi z}(\iota\pi z + 1)(z + \iota)^2 - 2(z + \iota)ze^{\iota\pi z}}{(z + \iota)^4} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{e^{\iota\pi z}(\iota\pi z + 1)(z + \iota) - 2ze^{\iota\pi z}}{(z + \iota)^3} = \\
 &= \frac{e^{-\pi}(1 - \pi)(2\iota) - 2\iota e^{-\pi}}{-8\iota} = \frac{e^{-\pi}}{4}\pi.
 \end{aligned}$$

Ritornando al calcolo dell'integrale assegnato e osservando che la funzione integranda è pari risulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \Im m \left(2\pi \iota \left[\frac{e^{-\pi}}{4} \pi \right] \right) = \frac{\pi^2}{4} e^{-\pi}.$$

Esempio 2.13.8 Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx.$$

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è pari, quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx.$$

Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{ze^{\iota 2z}}{z^2 + 4}$$

che ha due poli semplici $z = \pm 2\iota$, ma solo $z = 2\iota$ sta nel semipiano a parte immaginaria positiva. Calcoliamo ora il residuo della funzione $f(z)$ relativo al polo $z = 2\iota$.

$$R(F, 2\iota) = \lim_{z \rightarrow 2\iota} \left[(z - 2\iota) \frac{ze^{\iota 2z}}{(z - 2\iota)(z + 2\iota)} \right] = \frac{2\iota}{4\iota} e^{-4} = \frac{e^{-4}}{2}.$$

Ritornando al calcolo dell'integrale assegnato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \Im m \left(2\pi i \frac{e^{-4}}{2} \pi \right) = \frac{\pi}{2} e^{-4}.$$