# Capitolo 1

# L'insieme dei numeri complessi

## 1.1. Introduzione ai numeri complessi

Definiamo *numero complesse* una qualunque coppia ordinata di numeri reali e scriviamo

$$z = (x, y) \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Definiamo l'opposto di $z$ il numero

$$z = (-x, -y) \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

mentre lo zero complesso è la coppia $(0, 0)$. Diamo ora la definizione delle operazioni elementari sui numeri complessi.

Somma

Siano $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ numeri complessi. Allora

$$z_1 + z_2 \stackrel{\Delta}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Moltiplicazione per uno scalare

Se $z = (x, y)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$\alpha z = (\alpha x, \alpha y).$$

Moltiplicazione

Assegnati $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ numeri complessi. Allora

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Divisione

Assegnati $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ numeri complessi con $z_2 \neq 0$ il rapporto $z_1/z_2$ è definito come il numero complesso $z_2 = (\alpha, \beta)$ tale che

$$z_1 = z_2 z_3.$$

Deve essere allora

$$(x_2\alpha - y_2\beta, x_2\beta + y_2\alpha) = (x_1, y_1)$$

ovvero

$$x_2\alpha - y_2\beta = x_1 \qquad y_2\alpha + x_2\beta = y_1.$$

Risolvendo rispetto a $\alpha$ e $\beta$ abbiamo

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 = (\alpha, \beta) = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Osserviamo esplicitamente che la somma e il prodotto sopra definiti godono delle proprietà commutativa e associativa. Inoltre

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

L'Unità immaginaria

Consideriamo ora coppie del tipo $z = (x, 0)$. Siano $z_1 = (x_1, 0)$ e $z_2 = (x_2, 0)$ due numeri complessi. Con le definizioni date è facile vedere che:

$$\begin{aligned} &z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, 0) \\ &z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2, 0) \\ &z_1/z_2 = (x_1/x_2, 0), x_2 \neq 0. \\ &y_2\alpha + x_2\beta = y_1. \end{aligned}$$

Risulta evidente che le operazioni effettuate su tali numeri forniscono i medesimi risultati delle corrispondenti operazioni sui numeri reali. Possiamo pertanto identificare tali numeri come numeri reali e porre

$$(x, 0) = x. \tag{1.1}$$

Ancora, consideriamo numeri complessi del tipo $z = (0, y)$. Risulta

$$z^2 = z \cdot z = (0, y)(0, y) = (-y^2, 0)$$

ovvero, con la notazione (1.1)

$$z^2 = -y^2 < 0$$

e dunque siamo di fronte a numeri il cui quadrato è negativo. Tali numeri non sono dunque identificabili con numeri reali e pertanto li chiameremo *immaginari*. Poniamo formalmente

$$(0, y) = \iota y. \tag{1.2}$$

Ora un generico numero complesso $z = (x, y)$ possiamo pensarlo come la somma (complessa) di $(x, 0)$ e $(0, y)$, ovvero

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

e, con la notazione (1.1),(1.2) possiamo scrivere

$$z = x + \iota y. \tag{1.3}$$

Rivediamo ora le operazioni che abbiamo definito in precedenza in termini di quest'ultima notazione.
SOMMA
Siano $z_1 = x_1 + \iota y_1$ e $z_2 = x_2 + \iota y_2$ numeri complessi. Allora

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \iota y_1) + (x_2 + \iota y_2) \tag{1.4}$$

$$z_1 + z_2 \triangleq (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + \iota(y_1 + y_2) \tag{1.5}$$

pertanto da (1.4) e (1.5) segue

$$(x_1 + \iota y_1) + (x_2 + \iota y_2) = (x_1 + x_2) + \iota(y_1 + y_2).$$

MOLTIPLICAZIONE

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \iota(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.6}$$

anche

$$z_1 z_2 = (x_1 + \iota y_1)(x_2 + \iota y_2).$$

Assunto che per tale prodotto valgono le usuali regole di somma e prodotto segue

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 + \iota^2 y_1 y_2) + \iota(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.7}$$

Confrontando (1.6) con (1.7) si vede che, assumendo $\iota^2 = -1$, i due prodotti coincidono. Tale assunzione garantisce che il prodotto tra due numeri complessi segue le stesse regole delle usuali operazioni sui numeri reali.

DIVISIONE

Abbiamo visto che per $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + \iota y_1$, e $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + \iota y_2$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \tag{1.8}$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \iota y_1}{x_2 + \iota y_2} = \frac{x_1 + \iota y_1}{x_2 + \iota y_2} \cdot \frac{x_2 - \iota y_2}{x_2 - \iota y_2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + \iota (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Come si vede (1.8) con (1.9) coincidono. Per effettuare il rapporto $(x_1 + \iota y_1)/(x_2 + \iota y_2)$ basta moltiplicare e dividere quest'ultimo per $x_2 - \iota y_2$ ed eseguire i prodotti convenzionalmente interpretando $\iota^2$ come $-1$.

### Forma trigonometrica di un numero complesso

Un numero complesso $z = a + \iota b$ può essere rappresentato geometricamente nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con il vettore di componenti $(a, b)$, ciò permette un secondo modo di rappresentare un numero complesso, la *forma trigonometrica* (vedere figura 1.1).

Consideriamo il numero complesso $z = a + \iota b$ e il vettore $\overrightarrow{OP}$ che lo rappresenta. Il vettore $\overrightarrow{OP}$ può essere rappresentato o attraverso le componenti $a, b$ oppure assegnando la lunghezza $\rho$ e l'angolo $\theta$ formato con l'asse reale positivo intendendo come positivi tutti gli angoli ottenuti mediante rotazione in senso antiorario dal semiasse positivo alla semiretta che contiene $\overrightarrow{OP}$. Il numero reale non negativo $\rho$ viene

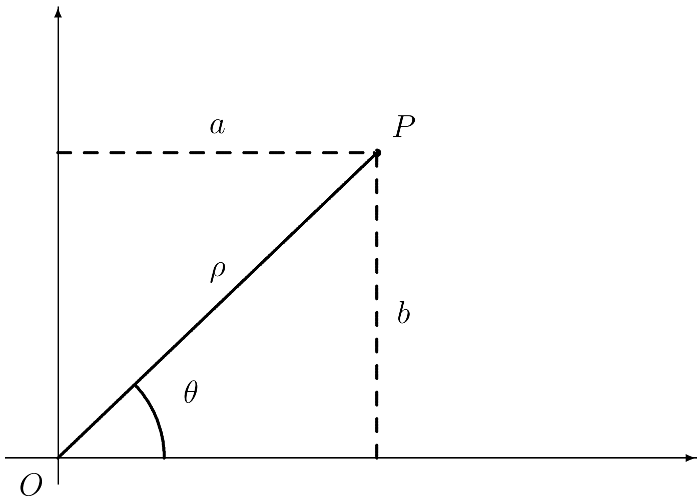


Figura 1.1:

indicato con $|z|$ ed è detto *modulo di* $z$ mentre l'angolo $\theta$ si chiama *argomento* e si indica con $\arg(z)$. Valgono le seguenti relazioni:

1. $a = \Re e z = |z| \cos(arg(z))$;
2. $b = \Im m z = |z| \sin(arg(z))$;
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
4. $\sin\theta = b/\rho$;
5. $\cos\theta = a/\rho$;
6. $\tan\theta = b/a$.

In definitiva $z$ può essere scritto in questo modo

$$z = |z| \left(\cos(arg(z)) + \iota \sin(arg(z))\right).$$

*Osservazione.* La rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non fornisce una corrispondenza biunivoca tra la coppia $(|z|, arg(z))$ e i punti del piano complesso. L'origine del piano complesso corrisponde infatti alle (infinite) coppie della forma $(0, \theta)$ indipendentemente dal valore di $\theta$. Se assumiamo $|z| \neq 0$ notiamo che un punto del piano complesso individua sia la coppia $(|z|, \theta)$ che la coppia del tipo $(|z|, \theta + 2k\pi)$.

### Modulo, argomento e complesso coniugato

Il modulo di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $|z| \geq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$;
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

L'argomento di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Il numero complesso $\overline{z} = z^*$, coniugato di $z = a + \iota b$, è legato alla parte reale, immaginaria e modulo di $z$ dalle seguenti relazioni:

1. $\Re e z = (z + z^*)/2$;
2. $\Im m z = (z - z^*)/(2\iota)$;
3. $|z|^2 = z z^*$.

Inoltre

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*; \qquad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$$

### Formula di De Moivre

Posto $z = \rho(\cos\theta + \iota \sin\theta)$ dalla formula del prodotto è facile dedurre che, per $n = 1, 2, \ldots$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta).$$

Infatti per $n = 1$ la relazione è banalmente verificata. Assumendola vera per un certo $n$ proviamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = z^n \rho(\cos\theta + \iota \sin\theta) = \\ &= \rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta)\rho(\cos\theta + \iota \sin\theta) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta + \iota(\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta)) = \\ &= \rho^{n+1}(\cos(n+1)\theta + \iota \sin(n+1)\theta)). \end{aligned}$$

### Radici $n$-esime di un numero complesso

Assegnato $w \in \mathbb{C}$ si vogliono determinare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^n = w.$$

Tali numeri sono detti *radici $n$-esime di $w$*. Proviamo che ogni numero complesso ammette esattamente $n$ radici distinte e diamo una formula per calcolarle. Posto

$$w = r(\cos\phi + \iota \sin\phi)$$

e

$$z = \rho(\cos\theta + \iota \sin\theta)$$

l'equazione $z^n = w$ si scrive

$$\rho^n(\cos n\theta + \iota \sin n\theta) = r(\cos\phi + \iota \sin\phi).$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e argomenti che differiscono per un multiplo di $2\pi$ abbiamo

$$\rho^n = r$$

e

$$n\theta = \phi + 2k\pi$$

ricavando allora

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

e

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Quest'ultima relazione fornisce dei valori distinti di $\theta$ in corrispondenza di $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. La radice che si ottiene per $k = 0$ è detta *radice primitiva* o *fondamentale*. Per $k = n$ si trova

$$\theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\phi}{n} + 2\pi$$

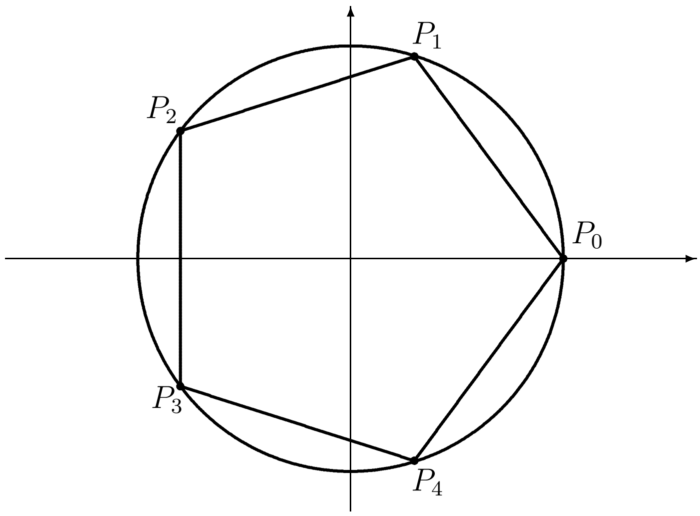


Figura 1.2:

che coincide con la radice primitiva. Situazioni analoghe valgono per $k > n$ e $k < 0$. Le radici $n$-esime di un numero complesso sono dunque $n$ e sono ottenute dalle relazioni:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

I punti $P_0, \ldots, P_{n-1}$ corrispondenti alle radici $n$-esime di $w$ si trovano tutti sulla medesima circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{r}$ e sono i vertici di un poligono regolare a $n$ lati.

**Esempio 1.1.1** *Calcolare le radici quinte di 1.*
*Applicando la formula si ha*

$$\sqrt[5]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + \iota\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

*Nella figura 1.2 sono visualizzate le 5 radici quinte dell'unità.*

### Esponenziale complesso

Sia $z$ un numero complesso non nullo scritto nella forma trigonometrica

$$z = |z|(\cos\theta + \iota\sin\theta).$$

Evidentemente il numero complesso $w = z/|z|$ ha modulo unitario. Dunque un qualunque numero complesso non nullo può essere espresso come prodotto di un numero reale positivo (il suo modulo) e un numero complesso di modulo 1,

$$z = |z|w, \qquad |w| = 1.$$

Siano ora $z_1$ e $z_2$ due numeri complessi di modulo 1:

$$z_1 = \cos\theta + \iota \sin\theta, \qquad\qquad z_2 = \cos\phi + \iota \sin\phi$$

Dalla definizione di prodotto si ha:

$$z_1 z_2 = \cos(\theta + \phi) + \iota \sin(\theta + \phi)$$

quindi $|z_1 z_2| = 1$ e $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$. Notiamo che la moltiplicazione di $z_1$ e $z_2$ si traduce in una somma (quella degli argomenti) e in particolare per $\phi = -\theta$ si ha $z_1 z_2 = 1$. Questo comportamento è analogo a quello della funzione esponenziale reale. Infatti

$$e^a e^b = e^{a+b}, \qquad\qquad e^a e^{-a} = 1.$$

Questa analogia formale suggerisce di introdurre una rappresentazione del numero complesso di modulo 1 che faccia intervenire l'esponenziale del suo argomento. Ovviamente non si tratterà di esponenziali reali in quanto bisogna rappresentare numeri complessi. Queste considerazioni motivano, seppure in modo intuitivo, l'introduzione della *formula di Eulero*:

$$e^{\iota\theta} = \cos\theta + \iota \sin\theta$$

per la rappresentazione di numeri complessi di modulo 1. Sia ora $z$ un generico numero complesso espresso nella forma $z = x + \iota y$. Considerando l'analogia formale con gli esponenziali reali imponiamo che l'esponenziale di una somma sia il prodotto degli esponenziali, cioè

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x e^{\iota y}.$$

Questa relazione, insieme alla formula di Eulero, pone la seguente definizione di *esponenziale di un numero complesso*:

$$e^z = e^{x+\iota y} = e^x(\cos y + \iota \sin y). \tag{1.10}$$

Da questa si deducono le seguenti proprietà:

1. $\Re e e^z = e^x \cos y$;

2. $\Im m e^z = e^x \sin y$;

3. $|e^z| = e^x$;

4. $arg(e^z) = y$.

Utilizzando la (1.10) è facile provare che per l'esponenziale complesso valgono le stesse regole dell'esponenziale reale:

1. $e^{z+w} = e^z e^w$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$;

2. $(e^z)^w = e^{zw}$.

Non è possibile estendere al campo complesso la proprietà di stretta positività di cui gode l'esponenziale reale, però è possibile provare che

$$e^z \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Infatti se esite un numero complesso $z_0 = x_0 + \iota y_0$ tale che $e^{z_0} = 0$ dovrebbe essere

$$\begin{cases} e^{x_0} \cos y_0 & = 0 \\ \\ e^{x_0} \sin y_0 & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos y_0 & = 0 \\ \\ \sin y_0 & = 0 \end{cases}$$

e ciò è assurdo. La definizione di esponenziale complesso ha però una conseguenza imprevedibile se si considera l'analogia con la funzione esponenziale reale. Infatti per qualunque $k \in \mathcal{Z}$ si ha

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi\iota} &= e^{x+\iota y+2k\pi\iota} = e^{x+\iota(y+2k\pi)} = \\ &= e^x(\cos(y+2k\pi) + \iota \sin(y+2k\pi)) = \\ &= e^x(\cos y + \iota \sin y) = e^z \end{aligned}$$

cioè la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi\iota$.

### Alcune proprietà dei moduli e dell'argomento

La forma esponenziale complessa permette un'agevole dimostrazione di alcune proprietà del modulo e dell'argomento di un numero complesso. Siano infatti $z_1 = \rho_1 e^{\iota\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{\iota\theta_2}$ allora

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{\iota\theta_1} \rho_2 e^{\iota\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{\iota(\theta_1+\theta_2)}$$

e dunque

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \text{e} \qquad arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2).$$

Analogamente

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{\iota\theta_1}}{\rho_2 e^{\iota\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{\iota(\theta_1-\theta_2)}$$

da cui

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \text{e} \qquad arg(z_1/z_2) = arg(z_1) - arg(z_2).$$

In particolare

$$|z_1 e^{\iota\alpha}| = |z_1|$$

e

$$arg(z_1 e^{\iota\alpha}) = arg(z_1) + \alpha \tag{1.11}$$

dunque la moltiplicazione di un numero complesso per l'esponenziale di un immaginario puro provoca una rotazione.

**Esempio 1.1.2** *Calcolare modulo e argomento del numero complesso*

$$z = \frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\, e^{\iota\pi/2}.$$

*Sfruttando la proprietà (1.11) abbiamo*

$$arg(z) = arg\left(\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$arg\left(\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right) = arg\left(\frac{1-\iota\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}\cdot 4}{4}\right) = -\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

*Dunque*

$$arg(z) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

*Inoltre*

$$|z| = \left|\frac{1}{1+\iota\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{1}{4} - \frac{\iota\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}.$$

### Seni e coseni complessi

Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ dalla formula di Eulero si ha:

$$e^{\iota\alpha} = \cos\alpha + \iota\sin\alpha \qquad \text{e} \qquad e^{-\iota\alpha} = \cos\alpha - \iota\sin\alpha.$$

Sommando e sottraendo queste due relazioni si ottengono rispettivamente:

$$\cos\alpha = \frac{e^{\iota\alpha} + e^{-\iota\alpha}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{\iota\alpha} - e^{-\iota\alpha}}{2\iota}.$$

Poichè abbiamo dato significato all'esponenziale anche nel caso in cui $\alpha$ sia complesso possiamo facilmente estendere la definizione di seno e coseno a tutto il campo complesso nel seguente modo. Per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin z = \frac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota}.$$

Con tali definizioni non è difficile provare che molte proprietà delle funzioni trigonometriche, quali ad esempio le formule di addizione e sottrazione e le formule di duplicazione, continuano a valere. Le funzioni seno e coseno così definite sono funzioni periodiche di periodo $2\pi$. Infatti

$$\cos(z + 2k\pi) = \frac{e^{\iota(z+2k\pi)} + e^{-\iota(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.$$

Analoga dimostrazione vale per la funzione seno. Le funzioni seno e coseno complessi, a differenza di quelle reali, possono avere modulo maggiore di 1. Per esempio

$$\cos(2\iota) = \frac{e^{\iota(2\iota)} + e^{-\iota(2\iota)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^{2}}{2} > 2.$$

### Seni e coseni iperbolici complessi

Fissato $t \in \mathbb{R}$ si definiscono seno e coseno iperbolico le funzioni

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

È naturale allora estendere al campo complesso questa definizione, ponendo, per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Le funzioni appena definite risultano essere periodiche di periodo $2\pi$. Infatti

$$\cosh(z + 2k\pi) = \frac{e^{z+2k\pi} + e^{-(z+2k\pi)}}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z.$$

Tra funzioni iperboliche e funzioni circolari valgono le seguenti relazioni

$$\begin{array}{lll}
1) & \sin(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota(\iota z)} - e^{-\iota(\iota z)}}{2\iota} = -\iota\dfrac{e^{-z} - e^{z}}{2} = \iota \sinh z \\[2ex]
2) & \cos(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota(\iota z)} + e^{-\iota(\iota z)}}{2\iota} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z \\[2ex]
3) & \sinh(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2} = \iota\dfrac{e^{\iota z} - e^{-\iota z}}{2\iota} = \iota \sin z \\[2ex]
4) & \cosh(\iota z) & = \dfrac{e^{\iota z} + e^{-\iota z}}{2} = \cos z.
\end{array}$$

### Gli zeri delle funzioni iperboliche

Vogliamo determinare ora i valori $z \in \mathbb{C}$ che annullano le funzioni iperboliche.

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota 2k\pi} \Rightarrow z = k\pi\iota.$$

Analogamente

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{2z} = e^{\iota(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z = \iota\frac{\pi}{2} + k\pi\iota.$$

*Osservazione.* Se $\tilde{z}$ è un numero complesso tale che $\sinh\tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 1) vista precedentemente deve essere

$$\iota\sin(\iota\tilde{z}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\iota\tilde{z}) = 0$$

e ciò implica che $\iota\tilde{z}$ è zero della funzione seno. Dunque dalla definizione

$$\sin(z) = 0 \Rightarrow z = k\pi$$

infatti la funzione seno è una funzione dispari. Inoltre se $\tilde{z}$ è un numero complesso tale che $\cosh\tilde{z} = 0$ allora dalla proprietà 2) deve essere

$$\cos(\iota\tilde{z}) = 0 \Rightarrow \cos(-\iota\tilde{z}) = 0$$

e dunque gli zeri sono

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

infatti la funzione coseno è pari.

### Logaritmo di un numero complesso

Per $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ sappiamo che la funzione logaritmo (reale) ha la seguente proprietà:

$$\log re^{\alpha} = \log r + \log e^{\alpha} = \log r + \alpha\log e = \log r + \alpha.$$

Definiamo con abuso di notazione il logaritmo complesso in modo che questa proprietà venga consarvata. Poniamo infatti per $z \neq 0$:

$$\log z = \log(|z|e^{\iota(\theta+2k\pi)}) = \log|z| + \iota arg(z) + \iota 2k\pi; \qquad k \in \mathcal{Z}.$$

Si noti che la funzione logaritmo così definita è una funzione ad infiniti valori.

### Esponenziale con base complessa

L'esponenziale complesso si definisce a partire dai logaritmi complessi. Per $z, w \in \mathbb{C}$ si pone:

$$z^w = e^{w\log z} = e^{w(\log|z|+\iota arg(z)+\iota 2k\pi)} \qquad k \in \mathcal{Z}.$$

Per esempio

$$\iota^{\iota} = e^{\iota\log\iota} = e^{\iota(\log|\iota|+\iota arg(\iota)+\iota 2k\pi)} = e^{\iota(\iota\pi/2+\iota 2k\pi)} = e^{-\pi/2-2k\pi}.$$