

Metodi matematici

Giovanni Martucci

2003-2004

Indice

1	Variabile complessa	2
1.1	Funzioni di una variabile complessa	2
1.2	Teorema di Cauchy in forma locale	10
1.3	Conseguenze del teorema di Cauchy	19
1.4	Formulazione generale del teorema di Cauchy	36
1.5	Funzioni intere e meromorfe	43
2	Spazi di Hilbert ed operatori lineari	51
2.1	Spazi normati	51
2.2	Spazi di Hilbert	55
2.3	Basi ortonormali	62
2.4	Operatori lineari in spazi di Hilbert	71
2.5	Spettro e risolvente	77
3	Trasformate	87
3.1	Trasformata di Fourier	87
3.2	Applicazioni della trasformata di Fourier	92
3.3	Trasformata di Laplace	96
3.4	Applicazioni della trasformata di Laplace	100
4	Distribuzioni	104
4.1	Spazi vettoriali topologici	104
4.2	Distribuzioni e distribuzioni temperate	107
4.3	Operazioni sulle distribuzioni	109
4.4	Trasformata di Fourier	119
4.5	Soluzioni fondamentali	123

Capitolo 1

Variabile complessa

In questo Capitolo diamo una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa. Le parti reale ed immaginaria di tali funzioni sono funzioni armoniche, cioè funzioni soddisfacenti l'equazione di Laplace. La teoria delle funzioni analitiche ha quindi applicazione ai problemi di fisica in cui si incontra tale equazione, come ad esempio in problemi di potenziale, di idrodinamica e di conduzione del calore.

Nella Sezione 1 studiamo le prime proprietà elementari delle funzioni olomorfe con esempi di tali funzioni. La più importante proprietà delle funzioni olomorfe è data dal teorema di Cauchy dal quale segue che funzioni analitiche ed olomorfe sono la stessa cosa e che ogni funzione olomorfa equivale ad una coppia di funzioni armoniche coniugate. Nella Sezione 2 è descritta la versione locale del teorema di Cauchy e nella Sezione 3 ne studiamo le conseguenze più importanti e l'applicazione a problemi di Dirichlet. Nella Sezione 4 è indicata la formulazione generale del teorema di Cauchy e del teorema dei residui con applicazioni al calcolo di integrali definiti. Nella Sezione 5 sono mostrate le proprietà principali di particolari funzioni analitiche come le funzioni intere e meromorfe.

1.1 Funzioni di una variabile complessa

Indichiamo con \mathbf{R} (risp. \mathbf{C}) l'insieme dei numeri reali (risp. complessi). Un generico numero complesso è dato da $z = x + iy$ con x e y reali e i unità immaginaria tale che $i^2 = -1$. Indichiamo anche con $Re\ z$ (risp. $Im\ z$) la parte reale x (risp. la parte immaginaria y) del numero complesso $z = x + iy$. Consideriamo note le proprietà elementari dei numeri complessi come ad esempio il fatto che ogni numero complesso $z = x + iy$ si può scrivere

nella forma polare

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ in cui } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta \equiv \arg z = \arctan y/x.$$

Ricordiamo che \mathbf{R} e \mathbf{C} sono campi cioè sono anelli tali che $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ sono gruppi con unità data dal numero 1. L'inverso del numero complesso $z = x + iy \neq 0$ è il numero

$$\frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

\mathbf{C} è spazio di Banach (cioè spazio metrico completo) con la topologia definita dalla norma $z \mapsto |z|$, essendo $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ il modulo del numero complesso $z = x + iy$. Se S è sottoinsieme di \mathbf{C} , indichiamo con $\text{int}(S)$ (risp. ∂S , risp. \bar{S}) l'insieme dei punti interni (risp. la frontiera, risp. la chiusura) di S . Indichiamo con

$$B(a, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| < r\},$$

l'insieme (aperto) degli z che distano da a meno di r . Tale insieme è detto **disco aperto** con centro in $a \in \mathbf{C}$ e raggio r . Indichiamo con $\bar{B}(a, r)$ la sua chiusura cioè

$$\bar{B}(a, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

Definiamo inoltre

$$B^*(a, r) := \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z - a| < r\},$$

cioè il disco bucato $B(a, r) \setminus \{a\}$. In tutto questo capitolo U indicherà sempre un aperto di \mathbf{C} , mentre Ω indicherà sempre una **regione** cioè un aperto connesso di \mathbf{C} . Indichiamo con \mathbf{N} (risp. \mathbf{Z} , risp. \emptyset) l'insieme dei numeri naturali (risp. l'insieme degli interi, risp. l'insieme vuoto).

Per molte applicazioni è utile estendere \mathbf{C} introducendo il simbolo ∞ per rappresentare l'infinito. La sua proprietà è data da $a + \infty = \infty + a = \infty$ e, per $a \neq 0$, $\infty a = a\infty = \infty$. Sarà inoltre $a/\infty = 0$ e, per $a \neq 0$, $a/0 = \infty$. Nella rappresentazione dei numeri complessi nel piano, il simbolo ∞ corrisponde al punto all'infinito. Si parla allora di *piano complesso esteso*.

E' possibile introdurre un modello geometrico in cui tutti i punti del piano complesso esteso hanno un punto rappresentativo. Consideriamo una sfera unitaria S la cui equazione nello spazio tridimensionale è $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Ad ogni punto $P = (x_1, x_2, x_3)$ della sfera (sfera di Riemann) possiamo associare un punto del piano complesso (il piano equatoriale della sfera)

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \tag{1.1}$$

eccetto al polo nord della sfera $N = (0, 0, 1)$. Il punto z si trova nel punto intersezione col piano della retta passante per il polo nord e per il punto P . La corrispondenza può esser completata associando al polo nord il punto all'infinito. La corrispondenza è uno a uno e vale

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \\x_2 &= \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)} \\x_3 &= \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}\end{aligned}\tag{1.2}$$

L'emisfero $x_3 < 0$ corrisponde al disco $|z| < 1$. In definitiva abbiamo una corrispondenza uno a uno tra la sfera e $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Lo spazio topologico \mathbf{C} è omeomorfo allo spazio topologico \mathbf{R}^2 con l'omeomorfismo naturale

$$\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}^2 \text{ tale che } z = x + iy \mapsto (x, y).$$

Se S è sottoinsieme di \mathbf{C} , identificheremo con tale omeomorfismo S con un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 che per semplicità indicheremo ancora con S . Data una funzione $f : S \rightarrow \mathbf{C}$, la parte reale $u \equiv \operatorname{Re} f$ è funzione da $S \subset \mathbf{R}^2$ in \mathbf{R} ed analogamente per la parte immaginaria $v \equiv \operatorname{Im} f$. Quindi, $\forall z = x + iy \in S$, con tali notazioni è

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Definizione 1.1 Sia $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ e sia $z_0 \in U$. Diciamo che f è

1. **analitica** in z_0 se esiste un intorno $B(z_0, r)$ di z_0 in cui è

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in B(z_0, r);$$

2. **olomorfa** in z_0 se f è derivabile in z_0 cioè esiste

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Se $A \subset U$ è aperto, diciamo che f è olomorfa (risp. analitica) in A se f è olomorfa (risp. analitica) in ogni punto di A . Dato $S \subset U$, diciamo che f è olomorfa (risp. analitica) in S se f è olomorfa (risp. analitica) in qualche aperto contenente S . Il numero complesso $f'(z_0)$ è detto **derivata** di f in z_0 . Una funzione definita ed olomorfa su tutto \mathbf{C} si dice **intera**.

Dalla definizione di derivata si ottengono, con dimostrazioni analoghe a quelle per funzioni di una variabile reale, le abituali regole di derivazione per combinazioni lineari, prodotto, quoziente e composizione di funzioni olomorfe.

Usiamo le seguenti notazioni per gli operatori di derivazione parziale

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}.$$

Un primo risultato importante riguardante le funzioni olomorfe è il seguente.

Teorema 1.1 *Sia $f : U \rightarrow \mathbf{C}$; poniamo $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.*

*(i) Se f è olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, allora valgono le seguenti relazioni (dette **equazioni di Cauchy-Riemann**)*

$$\partial_x u(x_0, y_0) = \partial_y v(x_0, y_0), \quad \partial_y u(x_0, y_0) = -\partial_x v(x_0, y_0). \quad (1.3)$$

(ii) Viceversa, se u e v soddisfano tali equazioni (in (x_0, y_0)) e sono di classe C^1 in un intorno di (x_0, y_0) , allora f è olomorfa in z_0 ed è

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = -i\partial_y f(z_0), \quad (1.4)$$

in cui $\partial_x f(z_0) := \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0)$ e $\partial_y f(z_0) := \partial_y u(x_0, y_0) + i\partial_y v(x_0, y_0)$.

Dimostr.: (i) Se f è olomorfa, allora, in particolare con h e k reali, è

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0),$$

$$f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ik) - f(z_0)}{ik} = -i[\partial_y u(x_0, y_0) + i\partial_y v(x_0, y_0)].$$

Da ciò segue la tesi.

(ii) Nelle ipotesi fatte è

$$u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) = h\partial_x u(x_0, y_0) + k\partial_y u(x_0, y_0) + h\epsilon_1 + k\epsilon_2$$

in cui

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \epsilon_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

In modo analogo

$$v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) = h\partial_x v(x_0, y_0) + k\partial_y v(x_0, y_0) + h\epsilon_3 + k\epsilon_4$$

in cui

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \epsilon_j = 0, \quad j = 3, 4.$$

Quindi

$$A := \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h + ik) - f(z_0)}{h + ik} = \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{1}{h + ik} [(h\partial_x u + k\partial_y u + ih\partial_x v + ik\partial_y v)(x_0, y_0) + h(\epsilon_1 + i\epsilon_3) + k(\epsilon_2 + i\epsilon_4)].$$

Tenendo conto del comportamento delle ϵ_j per $h + ik \rightarrow 0$ e delle equazioni di Cauchy-Riemann, si ha

$$A = \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{1}{h + ik} [(h + ik)\partial_x u + i(h + ik)\partial_x v](x_0, y_0) = \partial_x f(z_0)$$

ed anche

$$A = \lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{-i}{h + ik} [(h + ik)\partial_y u + i(h + ik)\partial_y v](x_0, y_0) = -i\partial_y f(z_0).$$

Da ciò segue la tesi.

QED

Vedremo (ved. Osservazione prima del Teorema di Liouville) che se f è olomorfa in U , allora u e v sono infinitamente derivabili e quindi di classe C^1 . Tenuto conto di ciò e della Prop. 1.1 possiamo affermare che f è olomorfa in U se e solo se u e v sono di classe C^1 e valgono, in U , le relazioni di Cauchy-Riemann. Inoltre, se f è olomorfa (e quindi $u, v \in C^\infty$), derivando la prima delle (1.3) rispetto ad x ed utilizzando la seconda, si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

e pertanto

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.6)$$

Analogamente

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (1.7)$$

L'equazione $\Delta g = 0$ è detta equazione di Laplace (in due dimensioni) ed una funzione $g : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, con derivate parziali seconde continue soddisfacenti tale equazione, è detta **armonica**. Se u è una funzione armonica, una funzione armonica v che soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann (1.3), è detta funzione **armonica coniugata** di u . Quindi parte reale u e parte immaginaria v di una funzione olomorfa sono una coppia di funzioni armoniche

coniugate. Data una funzione armonica u in una regione Ω , in ogni regione semplicemente connessa $A \subset \Omega$, esiste una funzione armonica coniugata v , definita a meno di una costante additiva nel seguente modo. Fissato un punto qualunque $(x_0, y_0) \in A$ ed una costante c , in ogni altro punto $(x, y) \in A$ il valore di $v(x, y)$ è dato da

$$v(x, y) = \int_{\gamma} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + c \quad (1.8)$$

essendo γ un qualunque cammino in A che va da (x_0, y_0) a (x, y) (ved. Ahlfors [1] pag. 160, 162).

Data $g : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ con Ω regione di \mathbf{R}^2 , è noto che, se g è derivabile ed ha derivate parziali nulle su Ω , allora g è costante su Ω . Da ciò e dalla proposizione precedente segue che, data $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, se f è olomorfa in Ω ed è $f' = 0$ su Ω , allora f è costante in Ω . Si può verificare (ved. Ahlfors [1] pag. 72 Teor. 11) che $f = u + iv$ è costante in Ω se u o v o $|f|$ o $\arg f$ è costante in Ω .

Vediamo alcuni esempi di funzioni olomorfe.

Esempio 1.1 *Data una serie di potenze di $z - z_0$,*

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

si dimostra (ved. ad esempio Ahlfors [1] pag. 39) che tale serie ha raggio di convergenza

$$r = (\limsup_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n})^{-1}.$$

Si dimostra (ved. ad esempio Lang [16]) che, se esiste

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

allora r è eguale a tale limite. Inoltre si verifica che la serie $s(z)$ è una funzione olomorfa in $B(z_0, r)$ e che $s'(z)$ si può ottenere derivando la serie termine a termine, cioè

$$s'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Quindi una funzione analitica in z_0 è olomorfa in tutto un intorno di z_0 .

Un primo esempio è dato dalla serie geometrica

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (1.9)$$

Essendo $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$ abbiamo che il raggio di convergenza è uno. D'altra parte, è

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}. \quad (1.10)$$

Ma $|z|^n \rightarrow 0$ se $|z| < 1$, quindi la serie converge a $1/(1 - z)$ per $|z| < 1$.

Un esempio importante è dato dalla serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n / n!.$$

In questo caso

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = n + 1 \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

quindi il raggio di convergenza è infinito. Quindi la serie è una funzione intera che si indica con $\exp(z)$ oppure e^z . Evidentemente $\exp'(z) = \exp(z)$. Vediamo alcune proprietà di tale funzione. Qualunque siano $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ è

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (1.12)$$

Infatti $(e^z e^{z_1 + z_2 - z})' = 0$ per cui $e^z e^{z_1 + z_2 - z}$ è costante. Eguagliando i valori per $z = 0$ e $z = z_1$ si ottiene la (1.12). Da questa, per $z = x + iy$, x, y reali, si ottiene $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Confrontando la serie per e^{iy} con gli sviluppi in serie di $\sin y$ e $\cos y$ si ha $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ e quindi

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Si osservi che è

$$|e^{iy}| = 1, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

Verifichiamo che

$$e^{z_1} = e^z \quad \text{se e solo se} \quad z_1 = z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (1.13)$$

Sia $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$. Da $e^{z_1} = e^z$, passando al modulo, si ha $e^{x_1} = e^x$ e quindi (l'esponenziale reale è funzione iniettiva) $x_1 = x$. Tenuto conto di ciò deve allora essere $e^{iy_1} = e^{iy}$ e quindi $y_1 = y + 2k\pi$ e si ottiene la tesi. Si osservi che, a differenza dal caso reale, e^z non è iniettiva. Tale

funzione trasforma ogni striscia $\{x + iy \mid 2k\pi \leq y < (2k+1)\pi\}$ nell'insieme $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Precisamente, le rette in una tale striscia parallele all'asse x sono trasformate in semirette aperte uscenti dall'origine mentre i segmenti paralleli all'asse y contenuti in tale striscia sono trasformati in circonferenze con centro nell'origine.

Per mezzo della funzione e^z si possono definire le seguenti funzioni

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Evidentemente tali funzioni sono intere ed è

$$\sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z,$$

$$\sinh' z = \cosh z, \quad \cosh' z = \sinh z.$$

Inoltre

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^z = \cosh z + \sinh z,$$

$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z.$$

Nei due esempi che seguono vediamo due importanti funzioni polidrome.

Esempio 1.2 Per quanto visto sopra, la funzione e^z non è invertibile. L'inversa non è funzione in senso proprio perché per ogni z ci sono più (infiniti) numeri complessi che, dalla funzione \exp vengono portati in tale z . Per tale motivo si parla di funzione **polidroma** per la funzione inversa **logaritmo** di \exp che si indica con \ln . Per definizione

$$e^{\ln z} = z = |z|e^{i \arg z} = e^{\ln |z| + i \arg z}, \quad \forall z \neq 0.$$

Per la (1.13) si ha quindi

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ogni $k \in \mathbf{Z}$ individua un **ramo** della funzione \ln . Partendo da un punto z_0 e dalla scelta di un ramo k_0 , spostando z_0 con continuità su una linea che gira intorno all'origine $z = 0$ in senso positivo (cioè per argomento crescente e quindi antiorario) e tornando al punto z_0 la funzione passa al valore relativo al ramo $k_0 + 1$. Girando invece in senso negativo (cioè orario) si passa al valore relativo al ramo $k_0 - 1$. Il punto $z = 0$ è detto **punto di diramazione**. La funzione \ln è derivabile in ogni $z_0 \neq 0$ nel senso che, fissato un ramo qualunque, la derivata esiste ed è $1/z_0$, qualunque sia il ramo.

Esempio 1.3 Definiamo la potenza complessa di un numero complesso. Per definizione, $\forall z \neq 0$ è

$$z^\alpha := e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha(\ln |z| + i \arg z)} e^{2k\alpha\pi i}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Quindi z^α è una funzione polidroma in generale e precisamente quando α non è intero. In tal caso k individua un ramo della funzione e $z = 0$ è punto di diramazione. È un facile esercizio verificare che z^α ha un numero finito di valori distinti se e solo se α è razionale. In tal caso, se $\alpha = m/n$ con m, n primi fra di loro, i valori distinti sono n e sono tutti eguali in modulo. Tali valori sono le n radici n -esime di z^m . Se α è irrazionale i valori distinti sono infiniti e tutti eguali in modulo. Infine se α è complesso i valori distinti sono infiniti e stanno su una spirale uscente dall'origine. La funzione z^α è derivabile in ogni $z \neq 0$ nel senso che, fissato un ramo k -esimo qualunque, la derivata di $(z^\alpha)_k$ esiste ed è $\alpha(z^{\alpha-1})_k$ o anche

$$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \log z})' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \alpha z^{\alpha-1}. \quad (1.14)$$

Torneremo sull'argomento delle funzioni polidrome nella Sez. 4 quando parleremo di continuazione analitica e superficie di Riemann di una funzione.

Si osservi che, se $z = x + iy$, è

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Ciò giustifica le definizioni

$$\partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (1.15)$$

$$\partial_{\bar{z}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.16)$$

Tenuto conto del Teorema 1.12 e di quanto osservato dopo tale Teorema, abbiamo quindi che una funzione $f = u + iv$ è olomorfa se e solo se u e v sono di classe C^1 ed inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

1.2 Teorema di Cauchy in forma locale

Una curva in \mathbf{C} è una applicazione

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$$

tale che $Re \gamma$ e $Im \gamma$ sono di classe C^1 . Il numero $\gamma(a)$ (risp. $\gamma(b)$) è detto **punto iniziale** (risp. **finale**) della curva. Il numero

$$L_\gamma := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(Re \gamma'(t))^2 + (Im \gamma'(t))^2} dt$$

è detto lunghezza di γ . Un **cammino** è un insieme ordinato $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ di un numero finito di curve tali che, $\forall i, 1 \leq i < n$, il punto finale di γ_i coincide con quello iniziale di γ_{i+1} . Il punto iniziale (risp. finale) di γ_1 (risp. di γ_n) è detto **punto iniziale** (risp. **finale**) del cammino. Il numero $L_\gamma = \sum_{j=1}^n L_{\gamma_j}$ è detto lunghezza del cammino γ . Si dice che un cammino è **chiuso** se il suo punto finale coincide con quello iniziale. Osserviamo che la proprietà di connessione di un aperto Ω garantirà l'esistenza di un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ tra due punti qualunque di Ω , tutto contenuto in Ω , cioè tale che $\gamma([a, b]) \subset \Omega$.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ è una curva, diciamo che una funzione f è definita e continua su γ se lo è sul sottoinsieme di \mathbf{C} dato da $\gamma([a, b])$ (range di γ). Per tali f e γ l'**integrale** di f su γ è il numero complesso

$$\int_\gamma f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Dato un cammino $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, l'**integrale** di f su γ è il numero complesso

$$\int_\gamma f(z) dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Scriveremo spesso anche

$$\int_\gamma f \quad \text{in luogo di} \quad \int_\gamma f(z) dz.$$

Siano $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ e $\gamma_1 : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ due curve; diciamo che γ e γ_1 sono **equivalenti** se esiste una biiezione $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ di classe C^1 tale che $g(a) = c$, $g(b) = d$ e $\gamma = \gamma_1 \circ g$. Si dice anche che γ_1 dà una **riparametrizzazione** della curva γ . È facile verificare che, per definizione di integrale, se γ e γ_1 sono equivalenti, è

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(g(t))) \gamma_1'(g(t)) g'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma_1(s)) \gamma_1'(s) ds = \int_{\gamma_1} f \end{aligned} \tag{1.17}$$

per cui l'integrale è invariante per riparametrizzazione. Particolari curve (sono applicazioni) γ saranno chiamate con un nome relativo al range di γ quando è sottinteso quale è γ . Ad esempio parleremo di **arco di circonferenza** con centro in z_0 e raggio r , da z_1 a z_2 , per indicare la curva

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} \text{ tale che } t \mapsto z_0 + re^{it} \quad \gamma(a) = z_1, \quad \gamma(b) = z_2$$

o una qualunque curva equivalente a questa. Inoltre parleremo di **segmento** da z_1 a z_2 per indicare la curva

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C} \text{ tale che } t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$$

o una qualunque curva equivalente a questa.

Esempio 1.4 Sia γ la circonferenza di raggio unitario con centro in a . Calcoliamo l'integrale su tale circonferenza della funzione $f(z) = 1/(z - a)$. Si ottiene

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} e^{it} i dt = 2\pi i. \quad (1.18)$$

Sia n intero diverso da -1 . Calcoliamo l'integrale sulla suddetta circonferenza della funzione $f(z) = (z - a)^n$. Si ottiene

$$\int_{\gamma} (z - a)^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0. \quad (1.19)$$

Sia ϕ il segmento da z_1 a z_2 . Si ottiene

$$\int_{\phi} dz = (z_2 - z_1) \int_0^1 dt = z_2 - z_1. \quad (1.20)$$

Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$, diciamo **curva opposta** di γ la curva

$$\gamma^- : [-b, -a] \rightarrow \mathbf{C} \text{ tale che } t \mapsto \gamma(-t).$$

Dato un cammino $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, il cammino opposto è $\gamma^- = (\gamma_n^-, \dots, \gamma_1^-)$. È facile verificare che, se γ è un cammino e f è definita e continua su γ , allora

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f. \quad (1.21)$$

Proposizione 1.2 Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un cammino e sia f una funzione definita e continua su γ . Allora vale la **disuguaglianza di Darboux**

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L_{\gamma} \sup_{z \in R(\gamma)} |f(z)|. \quad (1.22)$$

Dimostr.: Infatti, nel caso in cui γ sia una curva, è

$$|\int_{\gamma} f| \leq \int_a^b |f(z)\gamma'(t)| dt \leq L_{\gamma} \sup_{z \in R(\gamma)} |f(z)|. \quad (1.23)$$

La dimostrazione si generalizza facilmente al caso di un cammino. **QED**

Proposizione 1.3 *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un cammino e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni definite e continue su γ uniformemente convergente, su γ , ad una funzione f . Allora f è continua su γ ed è*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f.$$

Inoltre, se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ è una serie di funzioni continue uniformemente convergente su γ ad una funzione f , vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (1.24)$$

Dimostr.: Preso $\epsilon > 0$ arbitrario, per l'uniforme convergenza della successione $\{f_n\}$ esiste n_0 tale che, per $n > n_0$, è $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$, $\forall z \in R(\gamma)$. Applicando la disuguaglianza di Darboux si ha

$$|\int_{\gamma} f_n - \int_{\gamma} f| = |\int_{\gamma} (f_n - f)| \leq L_{\gamma} \epsilon$$

e da ciò segue la parte della tesi riguardante le successioni. La proprietà per le serie segue da quella per le successioni. **QED**

Sia $S \subset \mathbf{C}$ e sia $f : S \rightarrow \mathbf{C}$. Una **primitiva** di f in un aperto $U \subset S$ è una funzione g definita ed olomorfa su U tale che $g'(z) = f(z)$, $\forall z \in U$.

Proposizione 1.4 *Sia data $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ continua. Allora f ammette primitiva nella regione Ω se e solo se*

$$\int_{\gamma} f = 0$$

qualunque sia γ cammino chiuso in Ω e ciò è vero se e solo se, $\forall z_1, z_2 \in \Omega$, $\forall \gamma_1$ cammino in Ω da z_1 a z_2 , l'integrale $\int_{\gamma_1} f$ dipende solo dai punti iniziale z_1 e finale z_2 , cioè non cambia quando si sostituisce a γ_1 un altro cammino in Ω con gli stessi punti iniziale e finale.

Dimostr.: Supponiamo che f ammetta primitiva g in Ω cioè che esista g funzione olomorfa in Ω tale che $g'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$. Allora

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (g \circ \gamma)'(t)dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0.$$

Viceversa, supponiamo che l'integrale di f su un qualunque cammino chiuso in Ω sia 0. Allora, fissato un qualunque $z_0 \in \Omega$, per ogni altro $z \in \Omega$ l'integrale da z_0 a z non dipende dal cammino che, in Ω , va da z_0 a z e quindi permette di definire la funzione

$$g : \Omega \rightarrow \mathbf{C} \text{ tale che } z \mapsto \int_{\gamma} f,$$

in cui γ è un qualunque cammino che, in Ω , va da z_0 a z . Se $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$, tale che $t \mapsto z + th$, è il segmento da z a $z + h$, tenuto conto che $g(z + h) - g(z) = \int_{\sigma} f$, si ha (passando al limite sotto segno di integrale, essendo f continua)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z + h) - g(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z + th)h dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(z + th) dt = f(z). \end{aligned}$$

Da ciò segue che f ammette primitiva g in Ω .

L'ultima parte è ovvia perché, $\forall \gamma_1, \gamma_2$ cammini in Ω da z_1 a z_2 , il cammino $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2^-)$ è un cammino chiuso in Ω e

$$\int_{\gamma} f = 0 \text{ se e solo se } \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

QED

Esempio 1.5 Sia $f(z) = z^n$ con n intero diverso da -1 . La funzione z^n ammette primitiva $z^{n+1}/(n+1)$, quindi per ogni cammino γ chiuso (non passante per l'origine nel caso in cui n sia negativo) si ha

$$\int_{\gamma} z^n = 0.$$

Ciò non è vero nel caso della funzione $f(z) = z^{-1}$ perché $\ln z$ non è primitiva di tale funzione in tutto un intorno di $z = 0$, con solo tale punto escluso.

Un rettangolo in \mathbf{C} è un insieme (chiuso) del tipo

$$R = \{x + iy \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Il contorno ∂R del rettangolo è il cammino chiuso costituito dai quattro segmenti lati del rettangolo in ordine di percorrenza antiorario. Il seguente teorema dà una versione preliminare del teorema di Cauchy.

Teorema 1.5 (*Cauchy-Goursat*) *Data $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ olomorfa su un rettangolo $R \subset S$. Allora*

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Dimostr.: Il rettangolo R è unione di quattro rettangoli A_1, A_2, A_3, A_4 di diagonale metà della diagonale d di R . Tenuto conto di (1.21) si ha

$$\int_{\partial R} f = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial A_k} f.$$

Da tale eguaglianza risulta che esiste almeno un k tale che

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial A_k} f \right|. \quad (1.25)$$

Infatti se così non fosse sarebbe

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial A_k} f \right| < \sum_{k=1}^4 1/4 \left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \int_{\partial R} f \right|.$$

Indichiamo con R_1 il primo dei 4 rettangoli A_k per il quale vale (1.25). Iterando tale procedimento si trova una successione di rettangoli $\{R_n\}$, con $R_0 := R$, tale che $R_{n+1} \subset R_n$ e

$$\left| \int_{\partial R_n} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R_{n+1}} f \right|, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Quindi

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f \right|. \quad (1.26)$$

Indichiamo con z_0 il punto di accumulazione dei centri di tali rettangoli. Evidentemente $z_0 \in R_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, e f è olomorfa in un intorno di z_0 . Preso $\epsilon > 0$ è possibile determinare δ in modo che, se $z \in B^*(z_0, \delta)$, è

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon. \quad (1.27)$$

Possiamo inoltre prendere un intero n sufficientemente grande in modo che, detta d_n la lunghezza della diagonale di R_n , è $d_n < \delta$. Allora, tenuto conto che $z_0 \in R_n$, è $R_n \subset B(z_0, \delta)$. Da (1.27) si ha quindi che, $\forall z \in R_n$, è

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \epsilon \quad |z - z_0| \leq \epsilon d_n.$$

Osserviamo adesso che, poiché $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ ammette primitiva in tutto \mathbf{C} , l'integrale di tale funzione su un qualunque cammino chiuso è zero. Teniamo conto che $d_n = d/2^n$ e che, se L_n è la lunghezza di ∂R_n e L è la lunghezza di ∂R , è $L_n = L/2^n$. Abbiamo quindi

$$|\int_{\partial R_n} f| = |\int_{\partial R_n} (f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0))dz| \leq \epsilon d_n L_n = \frac{\epsilon L d}{4^n}.$$

Tenendo conto di (1.26), si ottiene

$$|\int_{\partial R} f| \leq \epsilon L d,$$

da cui, per l'arbitrarietà di ϵ , segue la tesi.

QED

Data $f : S \rightarrow \mathbf{C}$, una **singularità isolata** per f è un punto z_0 (non necessariamente appartenente ad S) per il quale esiste un intorno U tale che f è definita ed olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$ ma non in z_0 . Una singolarità isolata z_0 si dice **eliminabile** se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

Esempio 1.6 La funzione $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ha una singolarità eliminabile in $z = 0$. Si osservi che in $z = 0$ la funzione non è definita però vale $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$. La funzione $f(z)$, estesa in zero ponendo $f(0) = 1$, è olomorfa. Ciò sarà chiaro dalle proprietà generali delle singolarità eliminabili che vedremo più avanti.

La presenza di singolarità eliminabili in numero finito all'interno di un rettangolo sul quale, a parte tali singolarità, la funzione è olomorfa non altera la validità della tesi del teorema di Cauchy (ved. ad esempio Ahlfors [1] pag. 111, 112).

Nel seguente teorema, utilizzando il teorema di Goursat, ci si libera della dipendenza dalla forma del cammino chiuso su cui si integra, purché esso sia contenuto in un disco sul quale la funzione integranda è olomorfa.

Teorema 1.6 (Teorema di Cauchy per il disco) Data $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ olomorfa su un disco $D \subset S$. Allora, $\forall \gamma$ cammino chiuso in D , è

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Dimostr.: Sia z_0 il centro del disco. Definiamo

$$F_1(z) = \int_{\gamma_1} f, \quad F_2(z) = \int_{\gamma_2} f,$$

dove $\gamma_1 = (\gamma_{1v}, \gamma_{1o})$ è un cammino da z_0 a z composto da un cammino parallelo all'asse immaginario γ_{1v} seguito da uno parallelo all'asse reale γ_{1o} e $\gamma_2 = (\gamma_{2o}, \gamma_{2v})$ un cammino da z_0 a z composto da un cammino parallelo all'asse reale γ_{2o} seguito da uno parallelo all'asse immaginario γ_{2v} . Il cammino $\gamma = (\gamma_{1v}, \gamma_{1o}, \gamma_{2v}^-, \gamma_{2o}^-)$ è quindi un cammino chiuso rettangolare. Applicando il teorema di Goursat a γ , si ha

$$F_1(z) = F_2(z), \quad \forall z \in D.$$

Poniamo $F = F_1 = F_2$. Se consideriamo poi un incremento reale h è

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) h dt.$$

Passando a limite per $h \rightarrow 0$ (f è continua) troviamo

$$\partial_x F(z) = f(z). \quad (1.28)$$

Quando si incrementa di k la parte immaginaria di z , la z è incrementata di ik . La differenza $F(z+ik) - F(z) = F_2(z+ik) - F_2(z)$ è l'integrale sul cammino verticale $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ tale che $t \mapsto z + ikt$. Quindi si ha

$$\partial_y F(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(z+ik) - F(z)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_0^1 f(z+ikt) i k dt = i f(z). \quad (1.29)$$

Da ciò si ottiene che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte per F . Inoltre da (1.28) e (1.29), poiché $f(z)$ è continua essendo analitica, si ha che le derivate parziali rispetto ad x e y delle parti reale ed immaginaria di F sono continue. Da ciò, per il Teorema 1.1, segue che F è olomorfa ed è primitiva di f in D . Pertanto, per la Proposizione 1.4, si ha

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad (1.30)$$

per ogni curva $\gamma \in D$.

QED

Il teorema di Cauchy per il disco rimane valido, in presenza di singolarità eliminabili, per cammini chiusi non passanti per tali singolarità.

Vediamo adesso alcune considerazioni sugli aspetti geometrici relativi alle funzioni olomorfe. Innanzitutto diciamo una curva γ **regolare** in t_0 se

$\gamma'(t_0) \neq 0$. In quanto segue sarà sottointeso che i punti t_0 in cui considereremo una curva γ sono regolari. La tangente alla curva $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ in $\gamma(t_0)$ ha equazione $y'(t_0)(x - x(t_0)) = x'(t_0)(y - y(t_0))$ e quindi l'angolo della tangente a γ in $\gamma(t_0)$ con l'asse reale è

$$\alpha = \arctan(y'(t_0)/x'(t_0)) = \arg \gamma'(t_0),$$

essendo $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$. Date due curve γ_1 e γ_2 che si intersecano in $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, l'**angolo** ϕ fra le due curve in tale punto è, per definizione, l'angolo fra le tangenti alle curve γ_1 e γ_2 in z e quindi

$$\phi = \arg \gamma_2'(t_2) - \arg \gamma_1'(t_1).$$

Osserviamo che, data γ curva in una regione Ω e data $f = u + iv$ definita e di classe C^1 in un intorno di $R(\gamma)$ (cioè le funzioni u e v sono di classe C^1 in un intorno di $R(\gamma)$), allora

$$\eta = f \circ \gamma$$

definisce una curva η nel piano complesso in cui porta f . Inoltre, posto $\gamma(t_0) = x_0 + iy_0$, se (J Jacobiano)

$$J(u, v)(x_0, y_0) \neq 0$$

allora se γ è regolare in t_0 , anche $f \circ \gamma$ è regolare in t_0 .

Data $f = u + iv : U \rightarrow \mathbf{C}$ di classe C^1 in $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ e tale che $J(u, v)(x_0, y_0) \neq 0$, si dice che f è **conforme** in z_0 se, $\forall \gamma_1, \gamma_2$ curve per z_0 , l'angolo fra $f \circ \gamma_1$ e $f \circ \gamma_2$ è eguale all'angolo fra γ_1 e γ_2 , cioè ($z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$)

$$\arg(f \circ \gamma_2)'(t_0) - \arg(f \circ \gamma_1)'(t_0) = \arg \gamma_2'(t_0) - \arg \gamma_1'(t_0). \quad (1.31)$$

Quindi una funzione f conforme in z trasforma curve che formano un certo angolo nel punto z in curve che formano lo stesso angolo in $w = f(z)$. Dalla (1.31) segue anche che f è conforme in z_0 se e solo se, $\forall \gamma$ curva per z_0 ($z_0 = \gamma(t_0)$) l'angolo

$$\arg(f \circ \gamma)'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) \quad (1.32)$$

non dipende da γ .

Una caratteristica delle funzioni analitiche è che esse sono applicazioni conformi nell'intorno di ogni punto in cui la derivata non è nulla. Infatti vale la seguente Proposizione.

Proposizione 1.7 *Sia U aperto di \mathbf{C} e sia $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ olomorfa in $z_0 \in U$ con $f'(z_0) \neq 0$. Allora f è conforme in z_0 .*

Dimostr.: Qualunque sia $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ curva in z_0 , $\gamma(t_0) = z_0$, tenuto conto delle equazioni di Cauchy-Riemann, si ottiene

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = x'(t_0)\partial_x f(z_0) + y'(t_0)\partial_y f(z_0) = \gamma'(t_0)f'(z_0).$$

Da ciò segue che, essendo

$$\arg(f \circ \gamma)'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) = \arg f'(z_0)$$

indipendente da γ , f è conforme in z_0 .

QED

Si osservi poi che, se f è olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$, tenuto conto delle equazioni di Cauchy-Riemann, è

$$J(u, v)(x_0, y_0) = |f'(x_0 + iy_0)|^2.$$

Poiché, al limite per $z \rightarrow z_0$, è

$$|f(z) - f(z_0)| = |f'(z_0)||z - z_0|,$$

si ha che l'applicazione olomorfa f dà luogo, in un punto z_0 in cui $f'(z_0) \neq 0$, ad un cambiamento di scala indipendente dalla direzione. In tal caso possiamo interpretare $|f'(z_0)|$ come un coefficiente di contrazione o espansione.

Si osservi inoltre che, dalle equazioni di Cauchy-Riemann, segue che, per $f = u + iv$ olomorfa, è

$$\text{grad } u \cdot \text{grad } v = 0,$$

cioè le linee di livello della parte reale ed immaginaria di una funzione olomorfa si intersecano ortogonalmente.

1.3 Conseguenze del teorema di Cauchy

Per prima cosa definiamo l'indice che sarà una quantità che esprime quante volte un cammino chiuso gira intorno ad un punto. Abbiamo visto, nell'Esempio 1.4, che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} = 1 \tag{1.33}$$

se γ è un cerchio intorno al punto a in senso antiorario. La definizione appropriata è allora la seguente come risulta poi dal prossimo teorema. Sia

γ un cammino chiuso e sia $z_0 \in \mathbf{C}$ un punto non appartenente a γ . Si dice **indice** di z_0 rispetto a γ il numero $n(\gamma, z_0)$ definito da

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Teorema 1.8 *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ un cammino chiuso. L'applicazione*

$$n(\gamma, \cdot) : \mathbf{C} \setminus R(\gamma) \rightarrow \mathbf{C} \text{ tale che } z \mapsto n(\gamma, z)$$

è a valori interi, costanti su ogni componente connessa di $\mathbf{C} \setminus R(\gamma)$ ed è 0 sulla componente illimitata di $\mathbf{C} \setminus R(\gamma)$.

Dimostr.: Sia γ un cammino $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Consideriamo la funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ definita da

$$F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds. \quad (1.34)$$

La funzione F è continua e, salvo al più nei punti di raccordo tra le curve che costituiscono il cammino, è derivabile ed è

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \quad (1.35)$$

È facile verificare che

$$\frac{d}{dt}[e^{-F(t)}(\gamma(t) - z)] = e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}(\gamma(t) - z) = 0. \quad (1.36)$$

Quindi $e^{-F(t)}(\gamma(t) - z) = \text{cost}$ ed allora

$$e^{-F(b)}(\gamma(b) - z) = 1(\gamma(a) - z) \quad (1.37)$$

Ma $\gamma(a) = \gamma(b)$ (il cammino è chiuso) e quindi $e^{-F(b)} = 1$ da cui

$$F(b) = 2\pi i k \quad (1.38)$$

con k intero. Ma, per definizione di F , è $F(b) = 2\pi i n(\gamma, z)$ e quindi

$$n(\gamma, z) = k \quad (1.39)$$

per cui si ha la prima parte della tesi. D'altra parte, l'integrale che definisce $n(\gamma, z)$ è funzione continua di z e quindi trasforma connessi in connessi.

Poiché può prendere solo valori interi deve quindi essere costante su ogni componente connessa di $\mathbf{C} \setminus R(\gamma)$. Per quanto riguarda la componente illimitata, si può prendere z con $|z|$ grande quanto si vuole. Usando la disuguaglianza di Darboux è allora facile rendersi conto che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} n(\gamma, z) = 0$$

e ciò completa la dimostrazione.

QED

La più importante conseguenza del teorema di Cauchy per il disco è la rappresentazione integrale di una funzione olomorfa che si ottiene nel seguente teorema.

Teorema 1.9 *Sia f definita ed olomorfa su un disco D , sia $z \in D$ e sia γ un cammino chiuso non passante per z . Allora vale la formula*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w - z} \quad (1.40)$$

che è detta **formula integrale di Cauchy**.

Dimostr.: La funzione

$$F : D \setminus \{z\} \rightarrow \mathbf{C} \quad \text{tale che} \quad w \mapsto \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

è definita e olomorfa su D tranne che in z dove ha una singolarità eliminabile. Quindi, per il teorema di Cauchy per il disco, l'integrale di F su γ è 0. Da ciò, tenuto conto della definizione di indice, si ha la (1.40). **QED**

L'applicazione più comune della formula integrale di Cauchy è quella al caso in cui $n(\gamma, z) = 1$. In tal caso

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (1.41)$$

Teorema 1.10 *Sia γ cammino e sia g funzione continua su γ . Allora la funzione definita su $\mathbf{C} \setminus R(\gamma)$ dall'integrale*

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw \quad (1.42)$$

è funzione analitica essendo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_{\gamma} \frac{g(w)}{(w - a)^{n+1}} dw \right] (z - a)^n \quad (1.43)$$

in un intorno sufficientemente piccolo di $a \in \mathbf{C} \setminus R(\gamma)$ e, $\forall n$ intero positivo, si ha

$$f^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{g(w)dw}{(w-z)^{n+1}}. \quad (1.44)$$

per cui la (1.43) diviene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \quad (1.45)$$

Dimostr.: Sia a fuori di γ e sia $B(a, r)$ un disco che non incontra γ . Per $z \in B(a, r)$, la quantità $1/(w-z)$ può esser espressa come la serie geometrica (uniformemente convergente per $w \in R(\gamma)$)

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a) - (z-a)} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n.$$

Sostituendo nella (1.42) e integrando termine a termine si ottiene la (1.43). Da ciò risulta che f è analitica e quindi infinitamente derivabile e che per la derivata n -esima vale la (1.44). **QED**

Da ciò e dalla formula integrale di Cauchy si ottengono allora immediatamente i seguenti due Teoremi.

Teorema 1.11 *Sia f definita ed olomorfa su un disco D , sia $z \in D$ e sia γ un cammino chiuso non passante per z . Allora f è infinitamente derivabile ed è valida la seguente formula per la derivata n -esima*

$$n(\gamma, z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-z)^{n+1}}. \quad (1.46)$$

Dimostr.: Si ottiene applicando la (1.44) alla (1.40), tenendo conto che $n(\gamma, z)$ è localmente costante. **QED**

Teorema 1.12 *Sia f funzione olomorfa in un intorno $B(a, r)$ di un punto a . Allora, $\forall z \in B(a, r)$, vale lo sviluppo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \quad (1.47)$$

che è detto **sviluppo di Taylor** di f nell'intorno $B(a, r)$ di a .

Osservazione. Dal Teorema precedente segue che **una funzione olomorfa in un aperto è ivi analitica** ed è quindi infinitamente derivabile. In particolare, *le parti reali ed immaginaria di una funzione olomorfa in un aperto sono ivi infinitamente derivabili.*

Alcune conseguenze importanti sono riportate nei seguenti teoremi.

Teorema 1.13 (Liouville) *Una funzione olomorfa e limitata in tutto \mathbf{C} è costante.*

Dimostr.: Infatti se, $\forall z, |f(z)| \leq M$, considerando per γ un cerchio di raggio r e centro in z , abbiamo (applicando la disuguaglianza di Darboux)

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^2} 2\pi r = \frac{M}{r}$$

e poichè possiamo scegliere r arbitrariamente grande segue il teorema. **QED**

Il teorema di Liouville porta ad una semplice dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra come vedremo all'inizio della Sezione 5.

Teorema 1.14 (Morera) *Se $f(z)$ è definita e continua su una regione Ω e se $\int_{\gamma} f = 0$ per tutti i cammini chiusi in Ω , allora $f(z)$ è olomorfa in Ω .*

Dimostr.: Avevamo già visto che sotto queste ipotesi f ammette una primitiva olomorfa g . Abbiamo visto che la derivata di una funzione olomorfa è olomorfa, quindi f è olomorfa. **QED**

Osservazione. Dal teorema di Cauchy per il disco segue che, se γ_1, γ_2 sono due curve omotope (cioè deformabili con continuità l'una nell'altra; ved. Capitolo sulla teoria dei gruppi) nella regione di olomorfia di una funzione f , allora

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Nel seguente teorema dimostriamo lo sviluppo di Laurent, in serie di potenze positive e negative, valido nell'intorno di una singolarità isolata.

Teorema 1.15 *Sia f funzione olomorfa in un intorno U di un punto $z = a$ tranne che in $z = a$ dove f ha una singolarità isolata. Allora esiste un numero reale $r > 0$ tale che, $\forall z \in B^*(a, r)$, vale lo sviluppo*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}, \quad (1.48)$$

in cui, $\forall k \in \mathbf{Z}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w-a)^{k+1}},$$

essendo γ è una qualunque circonferenza con centro in $z = a$ contenuta in U . La (1.48) è detta **sviluppo di Laurent** di f in un intorno di $z = a$.

Dimostr.: Esiste $r > 0$ tale che f è olomorfa nella chiusura di $B^*(a, r)$. Sia $z \in B^*(a, r)$ e siano φ_1 e φ_2 due circonferenze con centro in a e di raggio, rispettivamente, $r_1 < |z|$ e $|z| < r_2 < r$. La catena (ved. inizio Sez. 4 per la definizione precisa) $\varphi_2 - \varphi_1$ è deformabile con continuità, nella regione di olomorfia di $g(w) = f(w)/(w-z)$, ad un cerchietto φ intorno a z . Allora, tenendo conto della formula integrale di Cauchy, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \quad (1.49)$$

Ma, ragionando come per ottenere la (1.43),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right] (z-a)^n. \quad (1.50)$$

Analogamente per \int_{φ_1} :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_1} \frac{f(w)}{(z-a) - (w-a)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi_1} f(w) \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varphi_1} f(w) \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} dw \end{aligned} \quad (1.51)$$

Si osservi che, poiché $f(w)/(w-a)^{n+1}$ non ha singolarità fra φ_1 e φ_2 , agli integrali \int_{φ_1} e \int_{φ_2} si può sostituire \int_{γ} , in cui γ è una qualunque circonferenza con centro in $z = a$ contenuta in U . Da ciò e dalle (1.49), (1.50), (1.51) segue il teorema. **QED**

La parte $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ è detta *parte caratteristica di Laurent in un intorno di a (p.c.L. in a)*.

Sia a singolarità isolata per una funzione f . Si dice che f ha un **polo** in a se

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty.$$

Si dice che f ha una **singolarità essenziale** in a se tale limite non esiste né finito né infinito. Nelle seguenti proposizioni vediamo altri modi per caratterizzare le singolarità isolate.

Proposizione 1.16 *Sia f funzione con una singolarità isolata nel punto a . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (i) f ha in a una singolarità eliminabile;
- (ii) la parte caratteristica di Laurent in a è zero;
- (iii) esiste finito il limite di $f(z)$ per $z \rightarrow a$;
- (iv) esiste un disco bucato $B^*(a, r)$ intorno ad a sul quale f è limitata.

Dimostr.: i) \rightarrow ii). La funzione $f(w)(w-a)^{n-1}$ $n \geq 1$ è definita ed analitica tranne in a dove ha una singolarità eliminabile, quindi, $\forall n \geq 1$,

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w-a)^{n-1} dw = 0.$$

ii) \rightarrow iii). Dallo sviluppo di Laurent con $c_{-n} = 0$, $n \geq 1$, segue $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$.

iii) \rightarrow iv). Ovvio.

iv) \rightarrow i). Se f è limitata in $B^*(r, a)$, segue

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) = 0.$$

QED

Proposizione 1.17 *Sia f funzione con una singolarità isolata nel punto a . Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (i) f ha in a un polo;
- (ii) la funzione $1/f$ ha una singolarità eliminabile in a e, una volta eliminata tale singolarità, esiste un intero $m \geq 1$ tale che $1/f$ ha uno zero di ordine m in a ;
- (iii) esiste un intero $m \geq 1$ tale che esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a)^m;$$

(iv) esiste un intero $m \geq 1$ tale che la parte caratteristica di Laurent in a di f è polinomio di grado m in $(z-a)^{-1}$.

Inoltre l'intero m per il quale sono vere (ii), (iii) e (iv) è lo stesso e prende il nome di **ordine del polo**.

Dimostr.: i) \rightarrow ii). In un conveniente $B^*(r, a)$ f è analitica e diversa da zero. Quindi sullo stesso insieme $1/f$ è analitica e $1/f(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow a$. Una volta eliminata tale singolarità, applicando (ii) della proposizione 1.16, si ha che $1/f(z)$ ha in $z = a$ uno zero di ordine $m \geq 1$.

ii) \rightarrow iii) Se $1/f(z)$ ha in $z = a$ uno zero di ordine m ,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^m g(z)$$

con g analitica in un intorno di a e tale che $g(a) \neq 0$. Quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^m = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(a)} \neq 0.$$

iii) \rightarrow iv). $f(z)(z - a)^m$ ha in a una singolarità eliminabile, quindi

$$f(z)(z - a)^m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

da cui segue iv).

iv) \rightarrow i). E'

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z - a) + \dots]$$

da cui segue $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$.

QED

Proposizione 1.18 *Sia f funzione con una singolarità isolata nel punto a .*

Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) *f ha in a una singolarità essenziale;*

(ii) *per qualunque disco bucato $B^*(a, r)$ nel quale f è analitica, è*

$$\overline{f(B^*(a, r))} = \mathbf{C};$$

(iii) *per i limiti inferiore e superiore di $|f|$ si ha*

$$\limsup_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty, \quad \liminf_{z \rightarrow a} |f(z)| = 0;$$

(iv) *la parte caratteristica di Laurent in a di f è una serie che non si riduce ad un polinomio.*

Dimostr.: i) \rightarrow ii). Supponiamo per assurdo che esista w non appartenente a $\overline{f(B^*(a, r))}$. Allora esiste un numero positivo s tale che

$$|f(z) - w| \geq s, \quad \forall z \in B^*(a, r).$$

Ma allora

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - w}{z - a} = \infty \tag{1.52}$$

e quindi, per la proposizione precedente, la funzione $\frac{f(z)-w}{z-a}$ ha un polo e pertanto anche la $f(z)$ avrebbe un polo contrariamente all'ipotesi.

ii) \rightarrow iii). È ovvio.

iii) \rightarrow iv). Infatti se la p.c.L. si riducesse ad un polinomio esisterebbe finito o infinito il $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, contrariamente all'ipotesi.

iv) \rightarrow i). Si verifica per assurdo tenuto conto delle due proposizioni precedenti. **QED**

La proprietà (ii) è nota come **teorema di Casorati-Weierstrass**. In effetti è stato dimostrato da Picard che in un qualunque disco bucato intorno ad una singolarità isolata essenziale a la funzione f prende tutti i valori uno al più escluso cioè $f(B^*(a, r))$ è tutto \mathbf{C} meno eventualmente un punto. Dal teorema di Picard segue che, se f ha in a una singolarità essenziale, allora, eccettuato al più un valore c_0 , la funzione assume ogni altro valore c in infiniti punti aventi a come punto di accumulazione.

Esempio 1.7 La funzione $\exp \frac{1}{z}$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp \frac{1}{x} = 0 \quad (1.53)$$

Lo sviluppo di Laurent è dato da

$$\exp \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \cdots \quad (1.54)$$

Per il teorema di Picard, per la funzione $\exp(1/z)$ che non prende mai il valore 0, l'immagine con tale funzione di un qualunque $B^*(0, r)$ deve essere $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

La funzione $\sin \frac{1}{z}$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale. Infatti se consideriamo le due successioni

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n\pi} \right\}, \quad \{x_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\} \quad (1.55)$$

tendenti a zero per $n \rightarrow \infty$ abbiamo nel primo caso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 0 \quad (1.56)$$

e nel secondo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = 1 \quad (1.57)$$

Data una funzione definita ed analitica nell'intorno di ∞ , cioè per $|z| > k > 0$, trattiamo l'infinito come una singolarità isolata. Il tipo di singolarità in ∞ è quello, in 0, di $f \circ \iota$, dove $\iota : \mathbf{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{C}$ tale che $z \mapsto \iota(z) = 1/z$.

Quindi per esempio $z = \infty$ è una singolarità essenziale per le funzioni $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, ed è un polo di ordine m per un polinomio di grado m .

Una interessante proprietà delle funzioni analitiche è che i loro zeri sono isolati. Precisamente è vera la seguente proposizione.

Proposizione 1.19 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ una funzione analitica in Ω e non costante. Se a è uno zero per $f(z)$ in un intorno di a non ci sono altri zeri.*

Dimostr.: Sia E_1 l'insieme dei punti di Ω in cui f e tutte le sue derivate sono eguali a zero e sia E_2 l'insieme dei punti di Ω in cui o f oppure una delle sue derivate è diversa da zero. Evidentemente $\Omega = E_1 + E_2$. L'insieme E_2 è aperto perché $f^{(k)}$ è continua, $\forall k \in \mathbf{N}$. Sia poi $z_0 \in E_1$. Dallo sviluppo di f in serie di Taylor nell'intorno di z_0 , essendo $f^{(k)}(z_0) = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$, si ha che f è eguale a zero in tale intorno insieme a tutte le sue derivate. Quindi anche E_1 è aperto. Ma allora, essendo Ω connesso, uno dei due aperti E_1 , E_2 deve essere vuoto. Se fosse $E_1 \neq \emptyset$, f sarebbe costante eguale a zero. Quindi deve essere $\Omega = E_2$ per cui $a \in E_2$. Se $f^{(m)}(a)$ è la prima derivata diversa da zero, dallo sviluppo di Taylor in un intorno di a si ha che in tale intorno è

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

con $g(z)$ analitica e $g(a) \neq 0$ per cui $g(z) \neq 0$ in un intorno U di a . In tale intorno a è l'unico zero di f . **QED**

Dalla proposizione precedente segue il seguente **teorema di identità** la cui dimostrazione per assurdo è ovvia.

Teorema 1.20 *Se f e g sono analitiche su Ω e uguali su un insieme di infiniti punti aventi punto di accumulazione in Ω , allora $f = g$ su Ω .*

Questo teorema è alla base della teoria del prolungamento analitico che vedremo nella Sez. 4. Vediamo adesso una proprietà che è importante per il problema di Dirichlet.

Teorema 1.21 (del massimo modulo) *Se f è una funzione analitica su un compatto (chiuso e limitato) $B \subset \mathbf{C}$ e non è costante, $|f|$ assume il massimo sulla frontiera ∂B .*

Dimostr.: Supponiamo per assurdo che per $z = a$, interno a B , $|f(z)|$ sia massimo. Per il teorema di identità, esiste tutto un intorno U di a in cui $f(z)$ non prende mai il valore $f(a)$ e quindi nel quale è $|f(z)| < |f(a)|$. Ma allora, se γ è un cerchio con centro in a e raggio r contenuto in U , essendo

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt,$$

passando al modulo si avrebbe $|f(a)| < |f(a)|$ e ciò è assurdo. **QED**

Esempio 1.8 $f(z) = z^2$ definita sul cerchio di raggio 1. Il modulo è $|f(z)| = x^2 + y^2$ che assume il massimo valore sulla circonferenza contorno del cerchio.

C'è un teorema analogo per funzioni armoniche.

Teorema 1.22 Se $u(x, y)$ è una funzione reale armonica su una regione limitata Ω e continua sulla regione chiusa $\bar{\Omega}$, allora u assume massimo e minimo sulla frontiera.

Osserviamo che la proprietà per il minimo si ha dalla proprietà per il massimo per la funzione $-u$ che è armonica.

Studiamo adesso il **problema di Dirichlet** per una regione Ω che consiste, data Ω e una funzione $g(x, y)$ reale, continua, definita su $\partial\Omega$, nel determinare una funzione $u(x, y)$ tale che

- i) $u(x, y)$ è armonica su Ω e continua su $\bar{\Omega}$
- ii) $u(x, y)$ coincide con $g(x, y)$ su $\partial\Omega$. Dal teorema del massimo si ha che, la soluzione, se esiste, è unica. Infatti se u_1 e u_2 fossero due soluzioni, anche la differenza $u_1 - u_2$ è armonica ed assume il massimo su γ . Quindi

$$0 \leq |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq 0 \quad (1.58)$$

dato che sulla frontiera le due funzioni coincidono ed allora $u_1 = u_2$.

L'esistenza di una soluzione del problema di Dirichlet è legata a condizioni su Ω (ved. Kellogg [13] o Petrovskii [18] ed anche Zachmanoglou e Thoe [34] p.199). Disco e semipiano soddisfano tali condizioni e quindi per essi la soluzione esiste. Tale soluzione può esser trovata come segue.

Proposizione 1.23 Sia f funzione analitica sul disco $\bar{B}(0, R)$ con centro nell'origine e raggio R . Allora, $\forall r < R$, $\forall \theta \in [0, 2\pi)$, è valida la formula

$$f(re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi}) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}. \quad (1.59)$$

Dimostr.: Dalla formula integrale di Cauchy scegliendo $\gamma = \partial B(0, R)$ e $z = re^{i\theta}$ punto interno alla circonferenza γ , si ha (moltiplicando sotto segno di integrale numeratore e denominatore per $R \exp(-i\varphi) - r \exp(-i\theta)$)

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - rRe^{-i(\theta-\varphi)}}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \quad (1.60) \end{aligned}$$

D'altra parte, ancora per il teorema di Cauchy, prendendo il punto $z = \frac{R^2}{r}e^{i\theta}$ al di fuori del disco è (moltiplicando numeratore e denominatore per r/R)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{1}{w - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}} f(w) dw \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - \frac{R^2}{r}e^{i\theta}} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= i \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - rRe^{-i(\theta-\varphi)}}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (1.61) \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{rRe^{-i(\theta-\varphi)} f(Re^{i\varphi}) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 f(Re^{i\varphi}) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \quad (1.62)$$

Utilizzando la (1.62) nella (1.60) si ottiene il teorema. **QED**

Ricordiamo che una funzione armonica u può esser pensata come la parte reale di una funzione analitica. Dalla proposizione precedente segue allora che, se u è funzione armonica sul disco $\bar{B}(0, R) \subset \mathbf{R}^2$ con centro nell'origine e raggio R , allora, $\forall r < R$, $\forall \theta \in [0, 2\pi)$, è valida la **formula di Poisson** per il disco

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(R \cos \varphi, R \sin \varphi) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}. \quad (1.63)$$

Dato quindi il problema di Dirichlet per il cerchio, la formula di Poisson dice quale è la soluzione.

Teorema 1.24 Sia $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}$ funzione continua tale che $g(0) = g(2\pi)$. La funzione u , armonica in $B(0, R)$ e tale che $u(R \cos \theta, R \sin \theta) = g(\theta)$, è data da

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi) d\varphi}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}. \quad (1.64)$$

In modo analogo si tratta il caso del semipiano. Precisamente si ha quanto segue.

Proposizione 1.25 Sia f funzione analitica e limitata nel semipiano $\text{Im } z \geq 0$. Allora, $\forall z = x + iy$ con $y > 0$, è valida la formula

$$f(x + iy) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) dt}{(t - x)^2 + y^2}. \quad (1.65)$$

Dimostr.: Basta applicare il teorema di Cauchy due volte, scegliendo un cammino γ_R costituito dal segmento $[-R, R]$ sull'asse reale chiuso da una semicirconferenza di raggio R nel semipiano superiore. Si ha per z nel semipiano superiore e R sufficientemente grande

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{1}{w - z} f(w) dw$$

ed anche, dato che \bar{z} sta nel semipiano inferiore,

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{1}{w - \bar{z}} f(w) dw.$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene ($z - \bar{z} = 2iy$)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{y}{\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(w) dw}{(w - z)(w - \bar{z})} \\ &= \frac{y}{\pi} \int_{-R}^R \frac{f(t) dt}{(t - x)^2 + y^2} + \frac{y}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(Re^{i\theta}) i Re^{i\theta} d\theta}{(Re^{i\theta} - z)(Re^{i\theta} - \bar{z})}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Passando al limite per $R \rightarrow \infty$, l'integrale sulla semicirconferenza non contribuisce (perché, essendo f limitata, tale integrale va come $1/R$), mentre dalla parte sull'asse reale si ottiene il risultato. **QED**

Dalla proposizione precedente segue che, se u è funzione armonica e limitata nel semipiano $y \geq 0$, allora, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall y > 0$, è valida la **formula di Poisson** per il semipiano

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t, 0) dt}{(t - x)^2 + y^2}. \quad (1.67)$$

Dato il problema di Dirichlet per il semipiano, la formula di Poisson permette di scrivere la soluzione.

Teorema 1.26 *Sia $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ funzione continua e limitata. La funzione u , armonica nel semipiano $y > 0$ e tale che $u(x, 0) = g(x)$, è data da*

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) dt}{(t-x)^2 + y^2}. \quad (1.68)$$

Facendo uso del seguente teorema della rappresentazione di Riemann (la prima dimostrazione è dovuta a Koebe nel 1915; ved. Ahlfors p.221,222 o Rudin p.437) si può risolvere il problema di Dirichlet per un qualunque sottoinsieme aperto, proprio (cioè non coincidente con \mathbf{C}) e semplicemente connesso di \mathbf{C} riportandolo al problema di Dirichlet per il disco o per il semipiano (ved. Lang [16] p.299 o Rudin [23] p.306 per la dimostrazione).

Teorema 1.27 (della rappresentazione di Riemann) *Sia Ω una regione semplicemente connessa che non sia l'intero piano complesso. Allora Ω è analiticamente isomorfo al disco di raggio 1. Ovvero dato un punto $z_0 \in \Omega$ esiste una funzione analitica e invertibile*

$$f: \Omega \rightarrow B(0, 1) \quad (1.69)$$

tale che $f(z_0) = 0$. Tale isomorfismo è determinato a meno di una rotazione ed è univocamente determinato dalla condizione $f'(z_0) > 0$.

Ovviamente affinché la funzione f esista occorre che Ω sia semplicemente connessa dato che il disco è semplicemente connesso. Inoltre Ω non può esser tutto \mathbf{C} . Infatti, dato che $|f(z)| < 1$, se f fosse definita su tutto \mathbf{C} per il teorema di Liouville sarebbe una costante ed allora il suo range sarebbe un punto e non $B(0, 1)$.

Esempio 1.9 *Si consideri*

$$w(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1.$$

La funzione è una particolare trasformazione lineare fratta ed è analitica sul disco $|z| \leq 1$. Inoltre se $z = e^{i\theta}$, e quindi $|z| = 1$, è

$$w(z) = \frac{e^{i\theta} - \alpha}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{\alpha})}.$$

Il denominatore (a parte la fase) è il complesso coniugato del numeratore e quindi se $|z| = 1$, $|w(z)| = 1$. Quindi per il principio del massimo $|w(z)| \leq 1$

se $|z| \leq 1$. La trasformazione porta il punto α nell'origine ed ha inversa (si ricordi l'inversa di una trasformazione lineare fratta)

$$z = \frac{w + \alpha}{1 + \bar{\alpha}w}.$$

Quindi è biiezione che trasforma il disco unitario nel disco unitario.

Esempio 1.10 La funzione

$$w(z) = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

con $\text{Im } \alpha > 0$ trasforma il semipiano superiore del piano complesso nel disco unitario $|w| \leq 1$. Il punto $z = \alpha$ viene trasformato nell'origine.

La funzione

$$w(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

porta il semidisco superiore di raggio 1 e centro nell'origine nel semipiano superiore del piano complesso. Il punto $z = 0$ viene trasformato nel punto 1. La w non è conforme in $z = -1$ dove $w'(-1) = 0$.

Esempio 1.11 La funzione

$$w(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right), \quad a > 0,$$

trasforma il semipiano superiore meno il semicerchio di raggio a nel semipiano superiore del piano complesso. I punti $z = a$ e $z = -a$ vengono lasciati invariati. Tale w non è conforme in $z = a$ e $z = -a$.

Per ulteriori esempi ved. [28].

La variabile complessa può essere applicata allo studio di problemi fisici planari (cioè tali che avvengono nello stesso modo in tutti i piani perpendicolari ad una data direzione) e che sono descritti da funzioni armoniche. Esempi importanti sono i seguenti.

(i) Dinamica planare di fluidi incompressibili ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) e con moto irrotazionale. Se il moto è irrotazionale è $\text{curl } \mathbf{v} = 0$ e quindi

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi \tag{1.70}$$

per una funzione ϕ che è detta **potenziale di velocità**. Se il fluido è incompressibile, la sua densità è costante e quindi, dall'equazione di continuità, si ha

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \tag{1.71}$$

Da (1.70) e (1.71) segue che $\Delta\phi = 0$ cioè ϕ è funzione armonica. Se ψ è armonica coniugata di ϕ la funzione

$$f = \phi + i\psi$$

è detta **potenziale complesso**, mentre ψ è detta **funzione di corrente** per il seguente motivo. Sappiamo che, per le equazioni di Cauchy-Riemann, $\text{grad } \phi \cdot \text{grad } \psi = 0$ cioè $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \psi = 0$ e quindi \mathbf{v} è tangente alle linee $\psi(x, y) = \text{cost.}$ che, per tale motivo, sono chiamate **linee di flusso**. Si osservi che alla velocità $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ corrisponde una velocità complessa $v_c = v_x + iv_y$ nel piano complesso. Poiché $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$, è $v_x = \partial_x \phi$, $v_y = \partial_y \phi = -\partial_x \psi$ e quindi, per la velocità complessa v_c , è

$$v_c = \partial_x \phi + i\partial_y \phi = \partial_x \phi - i\partial_x \psi = \overline{f'}.$$

I punti z in cui $f'(z) = 0$ danno i punti in cui si annulla la velocità, che sono detti **punti di stagnazione**.

(ii) Problemi planari di elettrostatica. Il campo elettrico $E = -\text{grad } \phi$ ha divergenza nulla in assenza di cariche elettriche e quindi il potenziale scalare ϕ è funzione armonica nei punti in cui non ci sono cariche elettriche. Il campo elettrico corrisponde, a meno di un cambio di segno, al campo di velocità dei problemi di fluidodinamica.

(iii) Problemi planari di conduzione del calore. Indichiamo con k la conducibilità termica di una sostanza omogenea di densità σ e calore specifico c e con T la sua temperatura. La densità di corrente termica è

$$\mathbf{j} = -k \text{grad } T,$$

in cui il segno meno indica che la corrente termica fluisce nel verso delle temperature decrescenti e quindi nel verso opposto a quello del gradiente di temperatura. La quantità (n_e normale esterna alla superficie Σ che racchiude il volume V)

$$\int_{\Sigma} k \text{grad } T \cdot n_e d\Sigma = \int_V k \Delta T dV$$

è la quantità di calore che entra nel volume V nell'unità di tempo. In assenza di sorgenti di calore, il bilancio termico porta quindi all'equazione (del calore)

$$k \Delta T = \sigma c \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Quindi, in una situazione stazionaria deve essere $\Delta T = 0$ cioè la temperatura è una funzione armonica. Abbiamo quindi la temperatura in luogo del

potenziale scalare dei problemi di elettrostatica e del potenziale di velocità dei problemi di fluidodinamica.

(iv) Studio delle configurazioni di equilibrio di una membrana elastica in assenza di forze esterne e trascurandone il peso. Data una membrana bidimensionale, con una cornice rigida $g(x, y)$, nel piano tridimensionale avente sull'asse z u , sia γ la proiezione di $g(x, y)$ sul piano (x, y) . La membrana, pensata come superficie, avrà una equazione

$$u = u(x, y) \quad (1.72)$$

dove $u(x, y)$ è continua su $\bar{\Omega}$. Si dimostra nella teoria dell'elasticità che la posizione di equilibrio della membrana in assenza di forze esterne e trascurandone il peso, è soluzione dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.73)$$

con la condizione al contorno

$$u(x, y) = g(x, y) \quad \text{su } \gamma \quad (1.74)$$

Esempio 1.12 *Si determini la velocità di un fluido incomprimibile che si muove con moto irrotazionale intorno ad un ostacolo cilindrico con asse perpendicolare al flusso e con velocità costante $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}$ a grande distanza dall'ostacolo.*

È $\mathbf{v} = \text{grad } \phi = \text{grad } \text{Re } f$. La trasformazione $w = w(z)$ nell'esempio 1.11 trasforma il semipiano in cui si deve risolvere il problema nel semipiano superiore del piano complesso nel quale f deve essere tale che $f'(w(z)) = v_0$ per $z \rightarrow \infty$ (l'apice ' indica la derivata rispetto a z). Poiché $w'(z) = 1/2$ per $z \rightarrow \infty$, si ha che deve essere $df/dw = 2v_0$ per $w \rightarrow \infty$. Allora, per il teorema di Liouville applicato (nel piano w) alla funzione df/dw , si ha che $df/dw = 2v_0$, $\forall w$ e quindi

$$f(z) = 2v_0 w(z) = v_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right).$$

Essendo

$$\text{Re} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2},$$

la soluzione è

$$\mathbf{v} = v_0 \text{grad} \left(x + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2} \right),$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 - \frac{a^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{i} - v_0 \frac{2a^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

1.4 Formulazione generale del teorema di Cauchy

Vogliamo generalizzare il teorema di Cauchy per il disco al caso di una regione qualunque. Una prima generalizzazione segue dal fatto che se $f = u + iv$ è analitica, allora u e v sono di classe C^∞ per cui si può applicare il seguente teorema di Green, valido per curve chiuse semplici (cioè tali che non hanno punti di intersezione).

Teorema 1.28 (*Teorema di Green*). *Siano p e q funzioni di classe C^1 sulla chiusura di un aperto $U \subset \mathbf{R}^2$, che è l'interno di una curva chiusa semplice γ orientata in senso antiorario. Allora*

$$\int_{\gamma} (pdx + qdy) = \int_U \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy.$$

Si ha allora il seguente teorema di Cauchy.

Teorema 1.29 *Sia $f = u + iv$ funzione analitica sulla chiusura di un aperto $U \subset \mathbf{C}$, che è l'interno di una curva chiusa semplice γ . Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Dimostr.: Il teorema di Green si applica alle funzioni u e v che sono di classe C^∞ . Essendo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx),$$

tenuto conto del teorema di Green e del fatto che u e v soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, si ha la tesi. **QED**

Una ulteriore generalizzazione si ha, come segue, con l'introduzione del concetto di omologia. Innanzitutto introduciamo il concetto di **catena** che è una n -pla di cammini con eventuali ripetizioni. Se m è intero (eventualmente negativo) e γ è un cammino, indichiamo con $m\gamma$ la ripetizione $|m|$ volte del cammino γ (risp. γ^-) se m è positivo (risp. negativo). In generale la catena costituita dai cammini $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ in cui γ_k è ripetuto m_k volte, $k = 1, 2, \dots, n$, sarà scritta nella forma

$$\gamma = m_1 \gamma_1 + m_2 \gamma_2 + \dots + m_n \gamma_n. \quad (1.75)$$

Diciamo che la catena è **chiusa** se ogni cammino in essa è chiuso. Definiamo

$$\int_{\gamma} f = \sum_i m_i \int_{\gamma_i} f \quad (1.76)$$

Definiamo l'indice, rispetto ad una catena chiusa γ , del punto a non appartenente a γ ,

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz. \quad (1.77)$$

Evidentemente, per una catena chiusa γ come in (1.75), è

$$n(\gamma, a) = \sum_{k=0}^n m_k n(\gamma_k, a).$$

Il concetto chiave per la generalizzazione del teorema di Cauchy è quello di catene chiuse omologhe. Sia Ω un aperto e connesso e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ una catena chiusa contenuta in Ω . Si dice che γ è **omologa a zero in Ω** e scriviamo $\gamma \approx_{\Omega} 0$ o semplicemente $\gamma \approx 0$, se $n(\gamma, a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Diciamo che γ è **omologa a η in Ω** , e scriviamo $\gamma \approx_{\Omega} \eta$ o semplicemente $\gamma \approx \eta$, se

$$n(\gamma, a) = n(\eta, a), \quad \forall a \notin \Omega$$

cioè se $\gamma - \eta \approx_{\Omega} 0$. Per quanto riguarda il confronto con il concetto di omotopia si ha quanto segue (ved. Rudin [23] p. 294). Se un cammino chiuso è omotopo a zero in Ω (cioè è omotopo all'applicazione costante), allora è anche omologo a 0 in Ω , mentre l'inverso non è vero in generale.

Il teorema di Cauchy nella forma più generale ha la seguente enunciazione.

Teorema 1.30 (Cauchy) *Sia f definita ed analitica in Ω . Allora*

$$\int_{\gamma} f = 0 \quad (1.78)$$

per ogni catena chiusa γ omologa a zero in Ω .

Dimostr.: Diamo soltanto uno schema di dimostrazione; per ulteriori dettagli ved. Ahlfors [1] p. 144,145 o Lang [16] p. 122-131. Si dimostra che, data γ , esiste una catena chiusa Γ poligonale a tratti orizzontali e verticali tale che

$$\int_{\gamma} f = \int_{\Gamma} f.$$

Si dimostra poi che una catena chiusa Γ poligonale come sopra si può esprimere nel seguente modo

$$\Gamma = \sum_j n(\gamma, a_j) \partial R_j,$$

essendo la somma estesa ai rettangoli finiti R_j del reticolato individuato da Γ ed a_j un qualunque punto fissato interno ad R_j . Ma allora

$$\int_{\gamma} f = \sum_j n(\gamma, a_j) \int_{\partial R_j} f = 0,$$

perché i rettangoli che non sono nella regione di olomorfia Ω non contano essendo $n(\gamma, a_j) = 0$ per tali rettangoli e d'altra parte

$$\int_{\partial R_j} f = 0,$$

per i rettangoli in Ω .

QED

Corollario 1.31 *Sia f definita ed analitica in Ω . Se γ e η sono catene chiuse omologhe in Ω è*

$$\int_{\gamma} f = \int_{\eta} f \quad (1.79)$$

Dimostr.: Basta applicare il teorema precedente alla catena $\gamma + \eta^-$ che è omologa a zero.

QED

Il teorema di Cauchy continua a valere in presenza di un numero finito di singolarità eliminabili. Tutti i risultati dimostrati come conseguenza del teorema di Cauchy per il disco si possono generalizzare alle catene chiuse omologhe a zero.

Data una funzione f analitica in U , sia z_0 una singolarità isolata. Definiamo **residuo** di f in z_0 il numero

$$Res_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f \quad (1.80)$$

dove γ è un cammino chiuso con $R(\gamma) \subset U$ tale che $n(\gamma, z_0) = 1$ e $n(\gamma, w) = 0$ se $w \notin U \cup \{z_0\}$. Ricordando la definizione di c_{-n} (sviluppo di Laurent),

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \quad (1.81)$$

segue che

$$Res_{z_0} f = c_{-1} \quad (1.82)$$

Teorema 1.32 (dei residui) *Sia f definita ed analitica in U salvo un numero finito di punti z_1, z_2, \dots, z_n , in cui ha singolarità isolate e sia γ una catena chiusa, non passante per tali punti, omologa a zero in U . Allora*

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) Res_{z_k} f. \quad (1.83)$$

Dimostr.: Poniamo $m_k = n(\gamma, z_k)$. Sia U^* l'insieme $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ e sia γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ circonferenza, intorno a z_k , orientata in senso antiorario e contenuta in U . Consideriamo la catena $\Gamma = \gamma - \sum m_k \gamma_k$. Se $a \notin U$, e quindi $a \notin U^*$, evidentemente $n(\gamma, a) = 0$ perché γ è per ipotesi omologa a zero in U e, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, $n(\gamma_k, a) = 0$. Quindi

$$n(\Gamma, a) = n(\gamma, a) - \sum_{k=1}^n m_k n(\gamma_k, a) = 0. \quad (1.84)$$

Inoltre, $\forall k = 1, 2, \dots, n$,

$$n(\Gamma, z_k) = n(\gamma, z_k) - m_k = 0. \quad (1.85)$$

Da ciò segue che Γ è omologa a zero in U^* regione in cui f è olomorfa. Applicando il teorema di Cauchy alla catena Γ si ottiene il risultato. **QED**

Teorema 1.33 *Sia a un polo di f ; allora*

i) Se a è di ordine m

$$Res_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m] \quad (1.86)$$

ii) Se a è di ordine 1 è dalla i)

$$Res_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) \quad (1.87)$$

o anche

$$Res_a f = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)'(z)} \quad (1.88)$$

Dimostr.: Dallo sviluppo di Laurent segue, per $z \neq a$,

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^{k+m} = g(z) \quad (1.89)$$

e quindi

$$c_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} \quad (1.90)$$

Per $z \in B^*(r, a)$ è $g^{(k)}(z) = [f(z)(z-a)^m]^{(k)}(z)$ e pertanto

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [f(z)(z-a)^m] \quad (1.91)$$

ii) Per $z \in B^*(r, a)$ è

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - a} \quad (1.92)$$

con $g(z) = c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^{k+1}$. Quindi

$$g(a) = c_{-1} = \text{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a) \quad (1.93)$$

D'altra parte

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = \frac{d}{dz} \frac{z - a}{g(z)} = \frac{g(z) - (z - a)g'(z)}{g^2(z)} \quad (1.94)$$

e passando a limite si ottiene la (1.88).

QED

Lemma 1.34 *Sia a un polo di ordine uno per f e sia $\gamma_r: [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$ un arco di circonferenza con centro in a e raggio r , con $\arg \gamma_r(c) = \theta$ e $\arg \gamma_r(d) = \theta + \alpha$. Allora*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f = i\alpha \text{Res}_a f \quad (1.95)$$

Dimostr.: Posto $g(z) = f(z)(z - a)$ per $z \neq a$ e $g(a) = \text{Res}_a f$, la funzione g è olomorfa in a . Passando al limite sotto segno di integrale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z - a} dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\theta}^{\theta + \alpha} g(a + re^{it}) i dt = i\alpha g(a) \end{aligned} \quad (1.96)$$

da cui segue la tesi.

QED

Lemma 1.35 *(Jordan) Sia $\{\gamma_k\}$ una successione di archi di circonferenza γ_k di raggio R_k , centro nell'origine ed estremi su una retta parallela all'asse reale, tale che $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty$. Sia f continua su $R(\gamma_k)$, $\forall k$, e, posto $M_k = \sup_{z \in R(\gamma_k)} |f(z)|$, sia $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$. Allora, $\forall \lambda > 0$, è*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0 \quad (1.97)$$

Dimostr.: Supponiamo che la retta parallela sia al disotto dell'asse reale a distanza $a > 0$ da questo. Se la retta è sopra la dimostrazione è anche più semplice. Posto $\theta_k = \arcsin \frac{a}{R_k}$ ($a > 0$) è

$$\gamma_k: [-\theta_k, \pi + \theta_k] \rightarrow \mathbf{C} \quad (1.98)$$

Poniamo $A_k = \gamma(-\theta_k)$, $B_k = \gamma(0)$, $C_k = \gamma(\pi/2)$, $D_k = \gamma(\pi)$, $E_k = \gamma(\pi + \theta_k)$. Dimostriamo prima che sono zero i contributi degli archi $A_k B_k$ e $B_k C_k$. Su $A_k B_k$ vale

$$|f(z)e^{i\lambda z}| \leq M_k e^{-\lambda R_k \sin t} \leq M_k e^{\lambda a} \quad (1.99)$$

e perciò

$$\left| \int_{A_k B_k} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq M_k R_k \theta_k e^{\lambda a} \quad (1.100)$$

Per $k \rightarrow \infty$ è $R_k \theta_k \rightarrow a$ e quindi il limite del secondo membro della (1.100) è zero. Su $B_k C_k$ utilizzando la disuguaglianza

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (1.101)$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_k C_k} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} f(R_k e^{it}) \exp[i\lambda R_k (\cos t + i \sin t)] i R_k e^{it} dt \right| \\ &\leq M_k R_k \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi} R_k \lambda t\right) dt \\ &= \frac{\pi}{2} M_k \frac{1 - \exp(-\lambda R_k)}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.102)$$

Il secondo membro va a zero per $k \rightarrow \infty$. In modo analogo sono zero i contributi di $C_k D_k$ e $D_k E_k$. **QED**

Lemma 1.36 *Se sulla successione di archi γ_k del lemma di Jordan è $|zf(z)| \leq M_k$ ed inoltre si ha che è $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = 0$, allora*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_k} f = 0 \quad (1.103)$$

Dimostr.: Infatti $|f(z)z| \leq M_k$ implica $|f(z)| \leq M_k/R_k$ e pertanto

$$\left| \int_{\gamma_k} f \right| \leq \frac{M_k}{R_k} R_k (\pi + 2\theta_k) \quad (1.104)$$

Il secondo membro va a zero per $R_k \rightarrow \infty$. **QED**

Se $z = \infty$ è singolarità isolata di f , allora il residuo $Res_\infty f$ di f in $z = \infty$ è, per definizione,

$$Res_\infty f := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz$$

essendo Γ una circonferenza di raggio r sufficientemente grande in modo che per $|z| > r$ non ci siano altre singolarità per f (oltre a quella in $z = \infty$)

ed essendo Γ percorsa in senso orario (si gira quindi in modo da lasciare a sinistra $z = \infty$). Si osservi che, posto $w = 1/z$, è

$$Res_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{1}{w^2} f(1/w) dw$$

essendo $\tilde{\Gamma}$ circonferenza di raggio $1/r$ percorsa in senso antiorario. Quindi il residuo $Res_{\infty} f$ di f è eguale al residuo in $w = 0$ di $g(w) = -w^{-2} f(1/w)$. Si osservi che anche se f ha singolarità eliminabile in $z = \infty$, il residuo $Res_{\infty} f$ può essere diverso da zero.

Esempio 1.13 Con $f(z) = 1/z$, si ha

$$Res_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = -1$$

(perché Γ è percorso in senso orario) ed infatti il residuo in $w = 0$ di $g(w) = -w^{-2} f(1/w) = -1/w$ è -1 . Si osservi che $f(z) = 1/z$ ha singolarità eliminabile in $z = \infty$.

Il residuo $Res_{\infty} f$ è utile nel calcolo di alcuni integrali definiti.

Terminiamo questa Sezione con elementi relativi al prolungamento analitico ed alle superfici di Riemann. Un **elemento analitico** è una coppia (f, Ω) in cui f è funzione analitica sull'aperto e connesso Ω . Due elementi analitici (f_1, Ω_1) e (f_2, Ω_2) si dicono **continuazione analitica diretta** l'uno dell'altro se $\Omega \equiv \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ e le due funzioni coincidono su Ω . Due elementi analitici (f_1, Ω_1) e (f_2, Ω_2) si dicono **continuazione analitica** l'uno dell'altro se esiste una n -pla ordinata di elementi analitici in cui ognuno è continuazione analitica diretta del precedente ed il primo è (f_1, Ω_1) e l'ultimo è (f_2, Ω_2) . Si osservi che si possono avere elementi analitici (f_1, Ω_1) e (f_2, Ω_2) che sono continuazione analitica l'uno dell'altro e non coincidono su $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Si dice **funzione analitica globale** un insieme di elementi analitici tale che due qualunque di essi sono continuazione analitica l'uno dell'altro. La relazione di continuazione analitica è relazione di equivalenza fra elementi analitici. Una **funzione analitica completa** è una classe di equivalenza di elementi analitici continuazione analitica l'uno dell'altro. Data una funzione analitica completa $F = \{(f, \Omega)\}$, il dominio di definizione $\mathcal{D}(F)$ di F è l'unione dei domini di definizione dei vari elementi analitici di F . Due elementi analitici (f_1, Ω_1) e (f_2, Ω_2) sono *equivalenti* in $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, se f_1 ed f_2 sono eguali in un intorno di z . Tale relazione è una relazione di equivalenza fra elementi analitici (f, Ω) definiti in z , cioè tali che $z \in \Omega$. Se $F = \{(f, \Omega)\}$ è funzione analitica completa, si dice **ramo** di

F in $z \in \mathcal{D}(F)$ una classe di suoi elementi analitici (definiti ed) equivalenti in z . Ogni elemento analitico $(f, \Omega) \in F$ definito in z determina un ramo di F in z che indichiamo con (f, z) . Data una funzione analitica completa $F = \{(f, \Omega)\}$, la **superficie di Riemann** di F è l'insieme $S(F)$ dei suoi rami. L'introduzione della superficie di Riemann permette di considerare F come la funzione monodroma

$$F : S(F) \rightarrow \mathbf{C} \text{ tale che } (f_k, z) \mapsto f_k(z).$$

La superficie di Riemann $S(F)$ è una varietà complessa di dimensione complessa 1.

1.5 Funzioni intere e meromorfe

È noto che, dato un polinomio $P(z)$ di grado m , questo può essere scritto come

$$P(z) = A(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_k)^{m_k} \quad (1.105)$$

con $m_1 + \cdots + m_k = m$ e A coefficiente di z^m in $P(z)$. Ciò può essere verificato come conseguenza del teorema di Liouville nel seguente modo. Se $m = 0$ non c'è niente da dimostrare. Sia $m > 0$; in tal caso $P(z)$ deve avere almeno uno zero perché altrimenti $1/P(z)$, essendo funzione intera limitata dal momento che $1/|P(z)| \rightarrow 0$ per $z \rightarrow +\infty$, sarebbe, per il teorema di Liouville, costante e ciò è assurdo. Sia quindi a_1 zero di $P(z)$ di molteplicità m_1 . Dallo sviluppo di Taylor per $P(z)$ si ha allora che

$$P(z) = (z - a_1)^{m_1} P_1(z)$$

e, poiché $P^{(n)}(z) = 0$ per $n > m$, P_1 è polinomio di grado $m - m_1$. Ripetendo il ragionamento si ottiene la (1.105).

Proposizione 1.37 *Se f è funzione intera senza zeri, allora esiste una funzione intera ϕ tale che*

$$f = e^\phi.$$

Se f e g sono funzioni intere con zeri negli stessi punti e con le stesse molteplicità, allora esiste una funzione intera ϕ tale che

$$f = g e^\phi.$$

Dimostr.: Poiché f è intera senza zeri, f'/f è funzione intera. L'integrale di tale funzione su un cammino γ da z_0 a z , per z_0 fissato, dipende solo da z e definisce una primitiva di f'/f . Sia ϕ la funzione definita da

$$\phi(z) = \ln f(z_0) + \int_{z_0}^z f'/f,$$

in cui $\ln f(z_0)$ è il valore di un ramo fissato. È facile verificare che

$$(e^\phi/f)' = 0.$$

Quindi

$$e^\phi/f = \text{cost.} = (e^\phi/f)(z_0) = 1,$$

da cui si ha la prima parte della tesi. La seconda parte si ottiene dalla prima con f/g in luogo di f . **QED**

Se f ha un numero finito di zeri z_i , $i = 1, 2, \dots, q$, di molteplicità n_i , la funzione

$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^q (z - z_i)^{n_i}} \quad (1.106)$$

è intera e priva di zeri. Se gli zeri sono non nulli, si ha quindi che f ha la forma

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{i=1}^q \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{n_i}. \quad (1.107)$$

Se abbiamo una funzione intera con un numero infinito di zeri possiamo pensare di costruire un prodotto infinito

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{n_i}, \quad (1.108)$$

In generale questo prodotto infinito non convergerà e quindi dovremo aggiungere un fattore di convergenza. Vediamo dapprima alcune nozioni sui prodotti infiniti. Sia $\{a_i\}$ una successione di numeri complessi. Il prodotto infinito

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + a_i) \quad (1.109)$$

è **convergente** (risp. **convergente in senso stretto**) se è convergente (risp. convergente ad un numero diverso da zero) la successione dei prodotti parziali

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \right\}. \quad (1.110)$$

Il suddetto prodotto infinito è **assolutamente convergente** se è convergente, ed allora lo è in senso stretto, il prodotto infinito

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + |a_i|).$$

Si dimostra che il prodotto infinito (1.109) converge assolutamente se e solo se converge

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

e, in tal caso, converge a zero se e solo se uno dei suoi fattori è zero. In tale caso è anche incondizionatamente convergente cioè il numero cui converge non cambia alterando l'ordine dei fattori.

Osserviamo poi che una funzione intera, non costante, che ha infiniti zeri ne ha un numero finito in ogni compatto (per il principio degli zeri isolati). Allora gli zeri sono una successione che può essere ordinata per moduli crescenti e, a parità di modulo, per argomento crescente ed è ciò che supporremo di avere fatto nel seguito. Adotteremo anche la convenzione di ripetere ogni zero un numero di volte pari alla sua molteplicità. È anche conveniente considerare separatamente l'eventuale zero nell'origine. Quindi, quando parleremo di successione di zeri $\{a_n\}$ sarà sottinteso che

$$0 \neq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq \cdots$$

Se p è un intero non negativo, indichiamo con E_p la funzione intera (detta **fattore elementare di indice p**)

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right). \quad (1.111)$$

I fattori esponenziali sono i fattori di convergenza del prodotto infinito, come risulta dal seguente teorema di Weierstrass (ved. Sansone [25] per la dimostrazione).

Teorema 1.38 *(della fattorizzazione di Weierstrass) Data la successione di zeri $\{a_n\}$, sia $\{p_n\}$ una successione di interi non negativi tale che la serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p_n+1} \quad (1.112)$$

è convergente, $\forall z \in \mathbf{C}$ (una tale successione esiste perché $|a_n| \rightarrow +\infty$). Allora

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (1.113)$$

è funzione intera che si annulla soltanto nei punti di $\{a_n\}$ e in $z = 0$ con molteplicità m . Inoltre il prodotto infinito è assolutamente (e quindi incondizionatamente) convergente, $\forall z \in \mathbf{C}$, ed è uniformemente convergente in qualunque compatto. Infine per la derivata logaritmica è

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} \quad (1.114)$$

in cui la serie a secondo membro è uniformemente convergente in ogni compatto che escluda gli zeri di f .

Nella pratica si può spesso trovare un intero p tale che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{p+1} \quad (1.115)$$

è convergente, $\forall z \in \mathbf{C}$. In tale caso nell'espressione (1.113) $p_n = p$, $\forall n$. Non per tutte le successioni esiste tale p . Ne è un esempio la successione (ved. Sansone [25] p.183)

$$\frac{1}{(\log 2)^{p+1}} + \frac{1}{(\log 3)^{p+1}} + \cdots + \frac{1}{(\log n)^{p+1}} + \cdots,$$

che diverge $\forall p$ intero, essendo tale serie maggiorante, da un opportuno n , di una serie

$$k\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots\right]$$

che è divergente.

Esempio 1.14 Se $\{a_n\}$ è la successione

$$-1, -2, \dots, -n, \dots$$

la serie in (1.115) converge, $\forall z$, con $p = 1$. Da ciò segue che

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \quad (1.116)$$

è una funzione intera con zeri, del primo ordine, solo negli interi negativi.
Se $\{a_n\}$ è la successione

$$1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots$$

la serie sopra converge, $\forall z$, con $p = 1$. Da ciò segue che

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (1.117)$$

è una funzione intera con zeri, del primo ordine, solo negli interi non nulli.
Si dimostra che tale funzione è $\sin \pi z / (\pi z)$ cioè vale il seguente sviluppo

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (1.118)$$

Si osservi che in tal caso il prodotto infinito è della forma in (1.108) per cui non sono necessari i fattori di convergenza esponenziali.

Una funzione f in Ω è detta **meromorfa** in Ω se ha solo poli in Ω . Se f è funzione intera, allora $1/f$ ha soltanto poli ed è quindi meromorfa in \mathbf{C} . Una funzione meromorfa ha in ogni regione limitata un numero finito di poli. Se ve ne fossero infiniti essi ammetterebbero un punto di accumulazione che non sarebbe singolarità isolata. I poli di una funzione meromorfa in \mathbf{C} possono quindi aver punto di accumulazione solo all'infinito (esempio $1/\sin z$). Una caratterizzazione equivalente corrisponde a definire le funzioni meromorfe in Ω come quelle funzioni che in Ω sono esprimibili come

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad (1.119)$$

con g e h funzioni analitiche.

Una importante funzione meromorfa in \mathbf{C} è la funzione Γ di Eulero che è una funzione con poli del primo ordine in tutti gli interi negativi e nello zero. Per definirla partiamo dalla funzione G vista nell'esempio sopra. Per costruzione $G(z-1)$ ha gli stessi zeri di $G(z)$ più uno zero nell'origine. Possiamo quindi scrivere

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)} G(z) \quad (1.120)$$

con $\gamma(z)$ funzione intera. Per determinare $\gamma(z)$ deriviamo logicamente la eq.(1.120), ottenendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \quad (1.121)$$

dove abbiamo fatto uso di

$$G'(z)/G(z) = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \log(z+n) - \frac{z}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right).$$

Sostituendo nella serie di sinistra della eq. (1.121) $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + 1 \end{aligned} \quad (1.122)$$

e quindi confrontando con la eq.(1.121) segue $\gamma'(z) = 0$ ovvero $\gamma(z) = \gamma$ costante. Il valore della costante γ (costante di Eulero) si determina facilmente come segue. Per $z = 1$ in (1.120) si ha

$$G(0) = 1 = e^{\gamma} G(1) \quad (1.123)$$

da cui

$$e^{-\gamma} = G(1) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \quad (1.124)$$

Prendendo l' n -esimo prodotto parziale

$$\pi_n = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})} = (n+1) e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})}. \quad (1.125)$$

Considerando il logaritmo, tenuto conto che $\lim_{n \rightarrow \infty} n/(n+1) = 1$, si ottiene

$$\gamma = - \lim_{n \rightarrow \infty} \log \pi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right). \quad (1.126)$$

Un valore approssimato di γ è $\gamma = 0.57722$.

Definiamo ora

$$H(z) := G(z) e^{\gamma z} \quad (1.127)$$

che soddisfa $H(1) = 1$ ed inoltre

$$H(z-1) = G(z-1) e^{\gamma(z-1)} = z e^{\gamma} G(z) e^{\gamma(z-1)} = z H(z) \quad (1.128)$$

Definiamo la **funzione Gamma di Eulero** con

$$\Gamma(z) := \frac{1}{zH(z)} \quad (1.129)$$

La funzione $\Gamma(z)$ è quindi meromorfa ed ha poli negli interi negativi e in zero. Dalla eq.(1.128) segue la proprietà

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (1.130)$$

Dalla definizione di H segue

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}} \quad (1.131)$$

E' evidente che $G(-z)$ ha zeri negli interi negativi; confrontando con la rappresentazione di $\sin \pi z$ si ha

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (1.132)$$

Da ciò, tenuto conto della (1.130) con $-z$ in luogo di z , si ha che

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{1}{zG(z)G(-z)} = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (1.133)$$

Abbiamo $\Gamma(1) = 1/H(1) = 1/(\exp \gamma G(1)) = 1$, $\Gamma(2) = 1$. In generale $\Gamma(n+1) = n!$. Dalla eq.(1.133), tenuto conto che da (1.131) è $\Gamma(1/2) > 0$, si ha che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Esiste una formula integrale per Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.134)$$

valida per la regione $Re z > 0$ in cui la funzione Γ è analitica.

Diamo anche la formula di Stirling

$$\Gamma(n+1) = n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (1.135)$$

valida per $n \rightarrow \infty$. Questa è un caso speciale di

$$\Gamma(z) = z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi} \quad (1.136)$$

valida per $|z| \rightarrow \infty$.

Proposizione 1.39 *Sia f una funzione meromorfa in Ω . Se z_0 è uno zero di ordine m , allora*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = m. \quad (1.137)$$

Se z_0 è un polo di ordine m , allora

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = -m. \quad (1.138)$$

Dimostr.: Se z_0 è uno zero di ordine m ,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g(z)$ analitica nell'intorno di z_0 e $g(z_0) \neq 0$. Quindi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

da cui, ricordando la definizione di residuo, segue la (1.137). In modo analogo si trova che, se z_0 è un polo di ordine m , è

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

da cui segue la (1.138).

QED

Si ha quindi il seguente teorema.

Teorema 1.40 *Sia γ una catena chiusa omologa a 0 in Ω e f una funzione meromorfa in Ω , con zeri in a_j di ordine p_j e poli in b_k di ordine q_k , allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_j n(\gamma, a_j) p_j - \sum_k n(\gamma, b_k) q_k. \quad (1.139)$$

Nelle applicazioni spesso gli indici saranno uguali a uno, la catena sarà semplicemente un cammino C e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'}{f} = N_0 - N_{\infty} \quad (1.140)$$

essendo N_0 (risp. N_{∞}) il numero degli zeri (risp. dei poli) che sono all'interno della curva C , contati col loro ordine. La formula (1.139) (e la (1.140)) è detta **formula dell'indicatore logaritmico**.

Capitolo 2

Spazi di Hilbert ed operatori lineari

Gli spazi di Hilbert sono importanti in fisica perché è in essi che si descrivono i sistemi quantistici. Precisamente, uno stato di un sistema quantistico è essenzialmente descritto da un vettore di norma 1 in uno spazio di Hilbert ed una osservabile del sistema è descritta da un operatore lineare nello spazio di Hilbert. In questo capitolo, dopo una prima Sezione sugli spazi normati vediamo le proprietà più importanti degli spazi di Hilbert nelle Sezioni 2 e 3 e poi, nelle Sezioni 3 e 4 studiamo alcuni aspetti importanti della teoria degli operatori lineari negli spazi di Hilbert.

2.1 Spazi normati

Sia S un insieme; una **operazione binaria** su S è una applicazione

$$m : S \times S \rightarrow S.$$

In genere si scrive xy invece di $m(x, y)$. Usando questa notazione, diciamo che

1. m è **associativa** se $x(yz) = (xy)z$, $\forall x, y, z \in S$;
2. m è **commutativa** se $xy = yx$, $\forall x, y \in S$;
3. m ammette un elemento **unità** o **identità** se esiste $u \in S$ tale che

$$ux = xu = x, \forall x \in S.$$

L'elemento unità, se esiste, è unico. Se l'operazione binaria m su S ammette un elemento unità u , allora l'**inverso** di $x \in S$, rispetto a m , è un elemento in S , che si indica con x^{-1} , tale che

$$xx^{-1} = x^{-1}x = u.$$

L'inverso di $x \in S$, se esiste, è unico. Se l'operazione binaria m è commutativa, si usa spesso la notazione additiva $x + y$ invece di $m(x, y)$. In questo caso si indica con 0 l'eventuale elemento unità (e lo si chiama **elemento zero**) e si indica con $-x$ l'eventuale inverso di x .

Se \mathbf{K}, S sono insiemi, una **operazione di \mathbf{K} su S** è una applicazione di $\mathbf{K} \times S$ in S . Nel seguito \mathbf{K} indicherà un campo che è \mathbf{R} o \mathbf{C} .

Uno **spazio vettoriale** su \mathbf{K} è un insieme X con una operazione binaria associativa, commutativa, con elemento zero e tale che ogni elemento ammette inverso sul quale c'è anche una operazione m di \mathbf{K} su X tale che, scrivendo ax invece di $m(a, x)$, i seguenti assiomi sono soddisfatti:

1. (associatività) $a(bx) = (ab)x, \forall a, b \in \mathbf{K}, \forall x \in X$;
2. (distributività) m è distributiva rispetto alle operazioni di somma in X e \mathbf{K} , cioè

$$a(x + y) = ax + ay, \forall a \in \mathbf{K}, \forall x, y \in X,$$

$$(a + b)x = ax + bx, \forall a, b \in \mathbf{K}, \forall x \in X;$$

3. $1x = x, \forall x \in X$.

Uno spazio vettoriale **reale** (risp. **complesso**) è uno spazio vettoriale su \mathbf{R} (risp. \mathbf{C}). Siano X, Y spazi vettoriali su \mathbf{K} . Una applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta **lineare** se

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad (2.1)$$

$\forall x, y \in X, \forall a, b \in \mathbf{K}$. Indichiamo con $L(X; Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari di X in Y . L'operazione $\mathbf{K} \times L(X; Y) \rightarrow L(X; Y)$, definita per moltiplicazione punto per punto per numeri in \mathbf{K} , e l'operazione $L(X; Y) \times L(X; Y) \rightarrow L(X; Y)$, definita per addizione punto per punto, danno una struttura vettoriale a $L(X; Y)$. Indichiamo ancora con $L(X; Y)$ lo spazio vettoriale così ottenuto. In particolare, se $Y = \mathbf{K}$, lo spazio vettoriale $L(X; \mathbf{K})$ è detto il **duale** di X e lo si indica con X^* . L'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta essere un **isomorfismo** se è biettiva e lineare insieme con la sua inversa. Gli spazi vettoriali X e Y sono detti essere **isomorfi** se esiste un isomorfismo di X su Y . Un **sottospazio vettoriale** o, semplicemente,

un **sottospazio** di un spazio vettoriale X su \mathbf{K} è un sottoinsieme V di X tale che

$$x, y \in V \text{ implica } ax + by \in V, \quad \forall a, b \in \mathbf{K}.$$

Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale X su \mathbf{K} . Una **combinazione lineare** di elementi di S è un vettore $y \in X$ tale che $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, dove $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un sottoinsieme finito di S e a_1, \dots, a_n sono numeri in \mathbf{K} , detti coefficienti della combinazione lineare. Il sottospazio generato da un sottoinsieme $S \subset X$ si indica con $\langle S \rangle$ ed è il minimo sottospazio di X contenente S o, equivalentemente, è il sottospazio delle combinazioni lineari di elementi di S . Gli elementi x_1, \dots, x_n in X sono detti essere **linearmente indipendenti** se $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ soltanto per $a_1 = \dots = a_n = 0$. Un sottoinsieme $S \subset X$ è detto essere linearmente indipendente se ogni sottoinsieme finito di elementi diversi di S è linearmente indipendente. Una **base** di X è un sottoinsieme linearmente indipendente B di X per il quale è $\langle B \rangle = X$. Usando il lemma di Zorn, si può dimostrare (vedere, per esempio Lang [14]) che ogni spazio vettoriale ammette una base. Inoltre, ogni base ha la stessa cardinalità che è detta **dimensione** di X .

Sia X un insieme; una **metrica** o **funzione distanza** su X è una applicazione $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

1. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X;$
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X;$
3. $d(x, y) = 0$, se e solo se $x = y$.

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) in cui X è insieme e d è metrica su X . In tale spazio chiamiamo **sfera aperta** con centro in $x \in X$ e raggio r il sottoinsieme $B(x, r)$ di X definito da

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Uno spazio metrico X è spazio topologico in cui gli aperti sono i sottoinsiemi di X tali che, $\forall x \in S$, esiste una sfera aperta con centro in x contenuta in S . Ricordiamo che, se X, Y sono spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ è applicazione, f si dice **continua** se la preimmagine di ogni aperto di Y è aperto di X . Si dice poi che f è **sequenzialmente continua** se la successione $\{f(x_n)\}$ tende a $f(x)$ tutte le volte che $\{x_n\}$ tende a x . Si può verificare (ved. Rudin [24] pag. 370) che la continuità implica sempre la continuità sequenziale e che, se X è spazio metrico, è vera anche l'implicazione inversa.

Una norma su uno spazio vettoriale complesso (risp. reale) X è una applicazione

$$X \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto \|x\|,$$

tale che

1. $\|ax\| = |a| \|x\|, \quad \forall a \in \mathbf{C} \text{ (risp. } \forall a \in \mathbf{R}), \forall x \in X$;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$;
3. $\|x\| = 0$ implica che $x = 0$.

È allora facile verificare che

$$\|0\| = 0,$$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

$$\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Uno **spazio normato** è una coppia $(X, \|\cdot\|)$ in cui X è uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ è una norma su X . Uno spazio normato è un semplice esempio di spazio metrico (è anche spazio vettoriale topologico, ved. Cap. 4), essendo la topologia quella indotta dalla metrica su X , associata alla norma su X , data da

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Se X, Y sono spazi normati e $A : X \rightarrow Y$ è applicazione lineare, si dice che A è **isometrica** se

$$\|Ax\| = \|x\|, \quad \forall x \in X,$$

e si dice che è **limitata** se esiste un numero reale positivo k tale che

$$\|Ax\| \leq k \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Proposizione 2.1 *Siano X, Y spazi normati e sia $A : X \rightarrow Y$ applicazione lineare. Allora A è continua se e solo se è limitata.*

Dimostr.: Sia A limitata e sia $\|Ax\| \leq k \|x\|, \quad \forall x \in X$. Sia $\{x_n\}$ successione tendente a x . Allora

$$\|Ax - Ax_n\| = \|A(x - x_n)\| \leq k \|x - x_n\|,$$

da cui si ha che $\{Ax_n\}$ tende a Ax per $n \rightarrow \infty$ e quindi A è continua. Viceversa sia A continua e supponiamo per assurdo che non sia limitata.

Allora, $\forall n \in \mathbf{N}$, esiste x_n (e possiamo supporre che è $\|x_n\| = 1$) tale che $\|Ax_n\| > n$. Ma allora $\{x_n/n\}$ è successione che tende a 0 mentre $\|A(x_n/n)\| > 1$ per cui $\{A(x_n/n)\}$ non tende a 0 e ciò è assurdo perché A è continua. **QED**

Se X, Y sono spazi normati, indichiamo con $L(X, Y)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari e limitate da X in Y . Se $A : X \rightarrow Y$ è applicazione lineare limitata, si può verificare che i numeri

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|, \quad \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

sono finiti ed eguali fra loro e che il loro valore comune, che indichiamo con $\|A\|$, definisce una norma su $L(X, Y)$ che è quindi spazio normato. Evidentemente, se A è isometria, è $\|A\| = 1$.

Sia X spazio metrico con metrica d . Una successione $\{x_n\}$ in X si dice **successione di Cauchy** se, $\forall \epsilon$ reale positivo, esiste $n_0(\epsilon)$ tale che

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n > n_0(\epsilon).$$

Uno spazio metrico X si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge ad un elemento di X . Uno **spazio di Banach** è uno spazio normato completo. Si può verificare che, se Y è completo, allora $L(X, Y)$ è completo e quindi è spazio di Banach. Si può dimostrare (ved. Lang [15] pag. 312 o Treves [30] pag. 102) che gli spazi $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$ sono completi e quindi sono spazi di Banach.

2.2 Spazi di Hilbert

Siano X, Y spazi vettoriali. Una applicazione $g : X \times X \rightarrow Y$ è detta **bilineare** se le applicazioni

$$g_x \equiv g(x, \cdot) : X \rightarrow Y : y \mapsto g(x, y),$$

$$g^x \equiv g(\cdot, x) : X \rightarrow Y : y \mapsto g(y, x)$$

sono lineari $\forall x \in X$. L'applicazione bilineare g è detta essere **simmetrica** (risp. **antisimmetrica**) se $g(x, y) = g(y, x)$ (risp. $g(x, y) = -g(y, x)$), $\forall x, y \in X$.

Sia X uno spazio vettoriale reale. Una **forma bilineare** su X è una applicazione $g \in L(X, X; \mathbf{R})$. Si scrive anche $(x|y)$ invece di $g(x, y)$ e $(x|\cdot)$, $(\cdot|x)$ invece di, rispettivamente, g_x e g^x , quando è sottinteso quale è g . Si

osservi che $(x|\cdot)$ e $(\cdot|x)$ sono elementi del duale X^* di X , $\forall x \in X$. È facile verificare che una forma bilineare simmetrica soddisfa la seguente identità (detto **identità di polarizzazione**)

$$(x|y) = \frac{1}{4}[(x+y|x+y) - (x-y|x-y)], \quad \forall x, y \in X.$$

Tale identità mostra che una forma bilineare simmetrica su X è determinata dai suoi valori sulla diagonale di $X \times X$, che è l'insieme $\{(x, x) \mid x \in X\}$.

Siano X, Y spazi vettoriali complessi. Una applicazione $f : X \rightarrow Y$ è detta essere **semilineare** se, invece di (2.1), si ha

$$f(ax + by) = \bar{a}f(x) + \bar{b}f(y), \quad (2.2)$$

dove \bar{c} indica il complesso coniugato di $c \in \mathbf{C}$. Una **forma sesquilineare** su X è una applicazione $g : X \times X \rightarrow \mathbf{C}$ tale che, $\forall x \in X$, l'applicazione $g_x \equiv g(x, \cdot) \equiv (x|\cdot)$ è lineare e l'applicazione $g^x \equiv g(\cdot, x) \equiv (\cdot|x)$ è semilineare. Si osservi che $(x|\cdot)$ è un elemento del duale X^* di X , $\forall x \in X$. Una forma sesquilineare g su X è detta essere **Hermitiana** se

$$g(x, y) = \overline{g(y, x)}, \quad \forall x, y \in X.$$

È facile verificare che per una forma sesquilineare Hermitiana la seguente identità (detta **identità di polarizzazione**) è soddisfatta

$$(x|y) = \frac{1}{4}[(x+y|x+y) - (x-y|x-y) - i(x+iy|x+iy) + i(x-iy|x-iy)], \quad (2.3)$$

$\forall x, y \in X$. Tale identità mostra che una forma sesquilineare Hermitiana su X è determinata dai suoi valori sulla diagonale di $X \times X$.

Sia g una forma bilineare simmetrica (resp. sesquilineare Hermitiana) su uno spazio vettoriale reale (resp. complesso) X . Un elemento $x \in X$ è detto elemento **positivo** (resp. **nullo**, resp. **negativo**), rispetto a g , se $g(x, x) > 0$ (resp. $g(x, x) = 0$, resp. $g(x, x) < 0$). La forma g è detta essere **positiva definita** se $g(x, x) > 0$, $\forall x \in X \setminus \{0\}$ e tale forma è anche detta **prodotto interno** su X . Uno **spazio pre-Hilbertiano reale** (resp. **complesso**), o **spazio con prodotto interno**, è una coppia (X, g) dove X è uno spazio vettoriale reale (resp. complesso) e g è un prodotto interno su X .

Sia g una forma bilineare simmetrica (resp. sesquilineare Hermitiana) su uno spazio vettoriale reale (resp. complesso) X . Se $S \subset X$, indichiamo con S^\perp l'insieme

$$S^\perp := \{x \in X \mid (x|y) = 0, \forall y \in S\}.$$

L'insieme S^\perp è detto **ortogonale** del sottoinsieme S in X (rispetto a g). Due sottoinsiemi S, T di X sono detti essere **ortogonali**, e si scrive $S \perp T$, se $(x|y) = 0, \forall x \in S, \forall y \in T$. Osserviamo che $S \perp T$ se e solo se $S \subset T^\perp$ o, equivalentemente, $T \subset S^\perp$. Se $S = \{x\}$, $T = \{y\}$ scriviamo $x \perp y$ invece di $\{x\} \perp \{y\}$. Un sottoinsieme $S \subset X$ è detto essere un **sottoinsieme ortogonale** se $x \perp y, \forall x, y \in S$ con $x \neq y$. La forma g è detta **non degenera** se $X^\perp = \{0\}$, cioè

$$g(x, y) = 0, \quad \forall y \in X \quad \text{implica} \quad x = 0.$$

Un prodotto interno è evidentemente non degenera.

Poiché per la fisica il caso più importante è quello degli spazi di Hilbert complessi, d'ora in avanti *in tutto il capitolo sarà sempre sottinteso che gli spazi vettoriali sono complessi*.

Per uno spazio pre-Hilbertiano X vale la **disuguaglianza di Schwarz**

$$|(x | y)|^2 \leq (x | x)(y | y), \quad \forall x, y \in X \quad (2.4)$$

ed il segno eguale vale se e solo se $\{x, y\}$ è linearmente dipendente. Tenendo conto della disuguaglianza di Schwarz si ha che il prodotto scalare su X induce una norma su X data da

$$\|x\| = \sqrt{(x | x)}, \quad \forall x \in X.$$

Proposizione 2.2 *Se X è spazio pre-Hilbertiano, allora, la norma indotta dal prodotto scalare soddisfa, $\forall x, y \in X$, la legge del parallelogramma*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Uno **spazio di Hilbert** è uno spazio pre-Hilbertiano che è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare. Quindi uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach per il quale la norma è indotta dal prodotto scalare. Si osservi che, per il teorema di Jordan e Von Neumann (ved. Weidmann [33] pag. 9-11), la validità della legge del parallelogramma è condizione necessaria e sufficiente perché, data una norma, esista un prodotto scalare che induce tale norma. Uno spazio di Hilbert E si dice **separabile** se esiste un sottoinsieme numerabile S che è **denso** in E cioè tale che $\bar{S} = E$.

Esempio 2.1 *Lo spazio vettoriale \mathbf{C}^n dei vettori colonna complessi*

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

è spazio di Hilbert se munito del prodotto scalare

$$(\alpha|\beta) := \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} \beta_k.$$

Un operatore lineare su \mathbf{C}^n è descritto da una matrice complessa

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdot & \cdot & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdot & \cdot & A_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdot & \cdot & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Evidentemente

$$A_{j,k} = (e_j | A e_k),$$

essendo e_r il vettore colonna tale che $(e_r)_s = \delta_{r,s}$.

Esempio 2.2 Indichiamo con l^2 lo spazio vettoriale della successioni $\alpha = \{\alpha_n\}$ di numeri complessi tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty.$$

È facile verificare che l^2 è spazio vettoriale complesso rispetto alle operazioni di somma su l^2 e di prodotto per numeri complessi definite componente per componente. Si può verificare che l^2 è spazio di Hilbert (separabile) rispetto al prodotto scalare definito, $\forall \alpha = \{\alpha_n\}, \beta = \{\beta_n\} \in l^2$, da

$$(\alpha|\beta) := \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\alpha_n} \beta_n.$$

Esempio 2.3 Sia S un boreliano di \mathbf{R}^n e sia p una funzione a valori reali non negativi su S che è integrabile secondo Lebesgue su S . Indichiamo con $L^2(S, p dx)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ tali che (integrazione secondo Lebesgue)

$$\int_S |f|^2(x) p(x) dx < +\infty.$$

Si può verificare che, se si identificano funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla, $L^2(S, p dx)$ è spazio di Hilbert separabile con prodotto scalare definito, $\forall f, g \in L^2(S, p dx)$, da

$$(f, g) \mapsto (f|g) := \int_{\mathbf{R}^n} \bar{f} g p dx.$$

Se $p = 1$, scriviamo semplicemente $L^2(S)$ in luogo di $L^2(S, dx)$ per lo spazio di Hilbert delle funzioni che sono integrabili secondo Lebesgue su S .

Ricordiamo che in uno spazio con prodotto scalare si può parlare di ortogonalità. È facile verificare che se $x \perp y$, allora vale il **teorema di Pitagora**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Siano $\{x_n\}, \{y_n\}$ successioni in X convergenti in X , rispettivamente, ad x e y . Facendo uso della disuguaglianza di Schwarz si verifica che allora è anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n | y_n) = (x | y).$$

Facendo uso di ciò si dimostra facilmente la seguente proposizione.

Proposizione 2.3 *Se X è spazio pre-Hilbertiano e S è sottoinsieme di X si ha che*

1. S^\perp è sottospazio chiuso di X ;
2. se $S \subset T \subset X$, allora $T^\perp \subset S^\perp$;
3. $S^\perp = (\bar{S})^\perp$;
4. indicando con $\langle S \rangle$ il sottospazio di X generato da S , è $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$.

D'ora in avanti E indicherà sempre uno spazio di Hilbert. Dato E , se S è sottoinsieme di E e $x \in E$, si definisce **distanza** di x da S il numero reale non negativo $d(x, S)$ dato da

$$d(x, S) := \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$

Si dimostra il seguente teorema (ved., ad esempio, Martucci [17] pag. 58, 59).

Teorema 2.4 *Sia M sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert E . Allora, $\forall x \in E$, esiste un unico $x_M \in M$ tale che*

$$\|x - x_M\| = d(x, M).$$

Per tale elemento si ha che

$$x - x_M \in M^\perp, \quad \forall x \in E$$

$e, \forall x \in E,$

$$x = x_M + (x - x_M)$$

è l'unica decomposizione di x come somma di un elemento di M con uno di M^\perp . Infine è

$$M^{\perp\perp} = M. \quad (2.5)$$

Si osservi che dalla (2.5) segue che, per un sottoinsieme qualunque di E , si ha (usando 3 e 4 della Proposizione 2.3)

$$S^{\perp\perp} = \overline{\langle S \rangle}. \quad (2.6)$$

L'elemento x_M si dice **proiezione ortogonale** o semplicemente **proiezione** di x su M . L'operatore (è facile vedere che è lineare) P_M definito su E da

$$P_M x = x_M$$

risulta essere operatore limitato con norma $\|P_M\| = 1$ se $M \neq \{0\}$. Tale operatore è detto **operatore di proiezione** o **proiettore ortogonale** o semplicemente **proiettore** su M . Il proiettore P_M è **idempotente** cioè tale che

$$(P_M)^2 = P_M$$

qualunque sia M sottospazio chiuso di E .

Proposizione 2.5 *Siano M, N sottospazi chiusi di E . Allora*

1. $M \subset N$ se e solo se $P_M P_N = P_N P_M = P_M$;
2. $M \perp N$ se e solo se $P_M P_N = 0$ oppure $P_N P_M = 0$.

Indichiamo con $B(E)$ lo spazio di Banach $L(E, E)$. Sia $\{A_n\}$ una successione di elementi di $B(E)$. Se la successione tende ad $A \in B(E)$, cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A - A_n\| = 0$, allora si dice che A è **limite uniforme** della successione $\{A_n\}$ o che $\{A_n\}$ tende **uniformemente** ad A e si scrive

$$A = u \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

Si dice che A è **limite forte** della successione $\{A_n\}$ o che $\{A_n\}$ tende **fortemente** ad A , e si scrive

$$A = s \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n,$$

se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x = Ax, \quad \forall x \in E.$$

Si dice che A è **limite debole** della successione $\{A_n\}$ o che $\{A_n\}$ tende **debolmente** ad A , e si scrive

$$A = w \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n,$$

se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (y|A_n x) = (y|Ax), \quad \forall x, y \in E.$$

È facile verificare che la convergenza uniforme implica quella forte e che questa implica quella debole. In generale non sono valide le implicazioni inverse come si vede nel seguente esempio.

Esempio 2.4 *Sia $\{M_n\}$ una successione non decrescente di sottospazi chiusi di E tali cioè che*

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$$

e sia

$$M = \overline{\cup_{n=1}^{+\infty} M_n}.$$

Allora $\{P_{M_n}\}$ è successione in $B(E)$ che converge fortemente a P_M (ved. ad esempio Martucci [17] pag. 61 per la dimostrazione) cioè

$$P_M = s \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{M_n}. \quad (2.7)$$

Si può però verificare che se, $\forall n$, M_n è contenuto propriamente in M_{n+1} , allora $\{P_{M_n}\}$ non converge uniformemente a P_M .

Teorema 2.6 (Riesz). *Se f è un funzionale lineare e continuo su uno spazio di Hilbert E , allora esiste un unico $x_f \in E$ tale che*

$$f(y) = (x_f | y), \quad \forall y \in E.$$

Dimostr.: Poiché f è lineare, $\ker f$ è sottospazio che è chiuso essendo f continuo. Se $\ker f = E$, la tesi è vera con $x_f = 0$. Sia $\ker f \neq E$; in tal caso esiste un vettore $h \neq 0$, che possiamo prendere normalizzato, tale che $h \in (\ker f)^\perp$. Evidentemente, $\forall y \in E$, il vettore $f(y)h - f(h)y$ appartiene a $\ker f$ e quindi ha prodotto scalare nullo con h . Allora da

$$(h|f(y)h - f(h)y) = 0$$

si ottiene

$$f(y) = (h|f(h)y) = \overline{(f(h)|h)}y$$

e quindi, per quanto riguarda la tesi, l'esistenza è vera con

$$x_f = \overline{f(h)}h.$$

Se poi esistesse un altro elemento x_0 tale che $f(y) = (x_0|y)$, $\forall y \in E$, dovrebbe essere $(x_0|y) = (x_f|y)$ e quindi $(x_0 - x_f|y) = 0$, $\forall y \in E$ e ciò può essere solo se $x_0 = x_f$. **QED**

2.3 Basi ortonormali

È facile verificare la seguente proposizione.

Proposizione 2.7 *Siano M, N sottospazi chiusi di E e sia $M \perp N$. Allora*

$$< M \cup N > = \{x + y \mid x \in M, y \in N\} \quad (2.8)$$

e tale sottospazio è chiuso. Inoltre

$$P_{<M \cup N>} = P_M + P_N. \quad (2.9)$$

La proposizione può essere generalizzata facilmente ad un qualunque insieme finito di sottospazi chiusi ortogonali fra loro.

Teorema 2.8 *Sia $\{M_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ una famiglia ortogonale numerabile di sottospazi chiusi di E . Poniamo*

$$H = \overline{< \cup_{i=0}^{+\infty} M_i >}.$$

Allora

$$P_H x = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{M_i} x, \quad \forall x \in E, \quad (2.10)$$

(convergenza in norma della successione delle somme parziali) cioè

$$P_H = s \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n P_{M_i}. \quad (2.11)$$

Ne viene che H è il sottospazio chiuso degli elementi del tipo

$$\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \text{ tali che } x_i \in M_i, \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \|x_i\|^2 < +\infty. \quad (2.12)$$

Dimostr.: Per la proposizione precedente, posto $N_n = \langle M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_n \rangle$, è

$$P_{N_n} = P_{M_0} + P_{M_1} + \dots + P_{M_n}.$$

Tenendo conto di ciò e della (2.7), si ottiene la (2.11). Si indichi poi con \mathcal{H} l'insieme in (2.12). Tenendo conto di (2.10), è facile verificare che $H \subset \mathcal{H}$. Inoltre per $x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \in \mathcal{H}$ è $P_H x = x$ e quindi $x \in H$. Quindi $\mathcal{H} \subset H$ e ciò conclude la dimostrazione. **QED**

Il sottospazio chiuso H nel teorema sopra si dice **somma ortogonale** o **somma diretta interna** dei sottospazi della famiglia $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e si scrive

$$H = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} M_i.$$

Si dice che $S \subset X$ è **sottoinsieme ortogonale** se due qualunque elementi distinti di S sono ortogonali fra loro. Se inoltre tutti gli elementi di S sono **normalizzati** ad 1 (cioè $\|x\| = 1, \forall x \in S$) si dice che S è **sottoinsieme ortonormale**. Una **base ortonormale** (risp. **ortogonale**) in E è un sottoinsieme ortonormale (risp. ortogonale)

$$B = \{e_i \mid i \in I\}$$

di E tale che la chiusura del sottospazio generato da B coincide con E cioè

$$\overline{\langle B \rangle} = E. \quad (2.13)$$

Evidentemente una base ortonormale è una base ortogonale in cui ogni vettore di base è normalizzato ad 1. Un insieme ortogonale B in E che soddisfa la (2.13) si dice **completo**. Quindi una base ortonormale è un insieme ortonormale completo.

Teorema 2.9 *Sia $E \neq \{0\}$ spazio di Hilbert. Allora*

1. *E ammette una base ortonormale;*
2. *E è separabile se e solo se ammette una base ortonormale numerabile;*
3. *se B_1, B_2 sono basi ortonormali per E , B_1 e B_2 hanno la stessa cardinalità.*

Lo spazio l^2 descritto nell'Esempio 2.2 è uno spazio di Hilbert separabile. Si può verificare che spazi di Hilbert con basi ortonormali della stessa cardinalità sono isomorfi cioè tali che esiste fra di loro una biiezione lineare

isometrica (che conserva cioè il prodotto scalare). Abbiamo quindi che ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo ad l^2 . Si osservi che una base ortonormale B per E non è base per E in quanto spazio vettoriale (detta anche **base di Hamel**) se E non è finito-dimensionale perché è vera la (2.13) e non è $\langle B \rangle = E$. D'ora in avanti considereremo solo spazi di Hilbert separabili e E indicherà sempre un tale spazio.

Teorema 2.10 Sia $B = \{e_i \mid i \in \mathbf{N}\}$ insieme ortonormale in E . Allora, $\forall x \in E$, è vera la **diseguaglianza di Bessel**

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |(e_i \mid x)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (2.14)$$

Inoltre B è base ortonormale se e solo se è valida una delle seguenti condizioni equivalenti:

$$B^\perp = \{0\}; \quad (2.15)$$

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} (e_i \mid x) e_i, \quad \forall x \in E; \quad (2.16)$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=0}^{+\infty} (x \mid e_i)(e_i \mid y), \quad \forall x, y \in E; \quad (2.17)$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} |(e_i \mid x)|^2, \quad \forall x \in E. \quad (2.18)$$

Dimostr.: Posto

$$E_i = \{ae_i \mid a \in \mathbf{C}\},$$

E_i è sottospazio chiuso di E . Si ha che, $\forall x \in E$,

$$x = (e_i \mid x)e_i + (x - (e_i \mid x)e_i)$$

è la decomposizione di x secondo E_i ed E_i^\perp e quindi

$$P_{E_i}x = (e_i \mid x)e_i. \quad (2.19)$$

Evidentemente

$$\overline{\langle B \rangle} = \overline{\langle \cup_{i=0}^{+\infty} E_i \rangle}.$$

Da ciò per il Teorema 2.8 con $H = \overline{\langle B \rangle}$, tenendo conto di (2.10), (2.19) e del fatto che $\|x\|^2 \geq \|P_H x\|^2$ si ottiene la diseguaglianza di Bessel.

La seconda parte si dimostra verificando la seguente catena di implicazioni:

$$(2.15) \implies \overline{\langle B \rangle} = E \implies (2.16) \implies (2.17) \implies (2.18) \implies (2.15) .$$

Se è vera (2.15), è

$$\overline{\langle B \rangle} = B^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = E.$$

Sia poi $\overline{\langle B \rangle} = E$. È facile rendersi conto che

$$\langle \cup_{i=0}^{+\infty} E_i \rangle = \langle B \rangle \text{ e quindi } \overline{\langle \cup_{i=0}^{+\infty} E_i \rangle} = \overline{\langle B \rangle} = E.$$

Da ciò per il Teorema 2.8 con $H = E$, essendo $P_E x = x$, si ha

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{E_i} x = \sum_{i=0}^{+\infty} (e_i | x) e_i,$$

per cui è vera la (2.16).

Le implicazioni

$$(2.16) \implies (2.17) \implies (2.18)$$

sono ovvie.

Infine se è vera (2.18), si ha che $x \in B^{\perp}$ implica $x = 0$ e quindi la (2.15).

QED

Si osservi che nella notazione di Dirac (ved. Dirac [8]) i ket $|x\rangle$ sono i vettori x dello spazio di Hilbert, mentre i bra $\langle x|$ sono i funzionali $(x|\cdot)$ lineari e continui su E . Il proiettore $P_{E_i} = (e_i|\cdot)e_i$ con la notazione di Dirac si scrive nella forma

$$P_{E_i} = |e_i\rangle\langle e_i| .$$

La relazione di completezza (I operatore identità di E)

$$P_E = I = s \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n P_{E_i}$$

diviene

$$I = \sum_{i=0}^{+\infty} |e_i\rangle\langle e_i|,$$

in cui la somma è intesa come limite forte della successione delle somme parziali.

Nel resto di questo paragrafo vediamo alcuni importanti esempi di basi ortonormali in particolari spazi L^2 di uso frequente nelle applicazioni. Dato uno spazio di Hilbert E , $x \in E$ ed ϵ reale positivo, diciamo che $y \in E$ ϵ -**approssima** x se $\|x - y\| < \epsilon$.

Consideriamo dapprima il caso di $L^2([-\pi, \pi])$. Si dice **polinomio trigonometrico** su $[-\pi, \pi]$ una applicazione $p : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$ che è combinazione lineare di esponenziali e^{inx} , $n \in \mathbf{Z}$. Ricordiamo, dalla teoria delle serie di Fourier, il seguente teorema di approssimazione trigonometrica di Weierstrass.

Teorema 2.11 *Se $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$ è funzione continua e periodica (tale cioè che $f(-\pi) = f(\pi)$), allora, $\forall \epsilon$ reale positivo, esiste un polinomio trigonometrico p tale che*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

cioè f è approssimabile uniformemente con polinomi trigonometrici.

Facendo uso di tale teorema si dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 2.12 *L'insieme*

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbf{Z} \right\} \quad (2.20)$$

di applicazioni di $[-\pi, \pi]$ in \mathbf{C} è base ortonormale in $L^2([-\pi, \pi])$.

Dimostr.: È facile dimostrare che B è insieme ortonormale. Rimane da verificare che $\langle B \rangle$ è denso in $L^2([-\pi, \pi])$ cioè che, $\forall f \in L^2([-\pi, \pi])$ e $\forall \epsilon$ reale positivo, si può trovare un polinomio trigonometrico p che ϵ -approssima f . Poiché l'insieme delle funzioni continue su $[-\pi, \pi]$ è denso in $L^2([-\pi, \pi])$ si può trovare una funzione continua g che $\epsilon/3$ -approssima f . Si può poi trovare una funzione continua periodica h che $\epsilon/3$ -approssima g e, per il teorema di approssimazione trigonometrica di Weierstrass, un polinomio trigonometrico p che $\epsilon/3$ -approssima h . Allora p ϵ -approssima f e la tesi è dimostrata. **QED**

Altre importanti basi ortonormali si ottengono facendo uso della **procedura di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** che adesso ricordiamo. Dato un insieme numerabile $S = \{x_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ di vettori indipendenti in E , tale procedura consiste nel prendere $e_0 = x_0$ e costruire, per $k = 1, 2, \dots$, i vettori

$$e_k = x_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(e_i | x_k)}{(e_i | e_i)} e_i.$$

Questi risultano essere un insieme *ortogonale* $B = \{e_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ che genera lo stesso sottospazio generato da S cioè tale che $\langle S \rangle = \langle B \rangle$.

Sia adesso $[a, b]$ un intervallo chiuso (anche non limitato) di \mathbf{R} e sia g funzione definita positiva su $[a, b]$, tranne eventualmente che in un numero finito di punti, tale che

$$\int_a^b x^n g(x) dx < +\infty, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

cioè tale che, $\forall n$, x^n è integrabile rispetto alla misura di Lebesgue-Stieltjes $d\lambda = gdx$. Da tale condizione segue che

$$S = \{x^n \mid n \in \mathbf{N}\} \subset L^2([a, b], gdx)$$

essendo $L^2([a, b], gdx)$ l'insieme delle funzioni da $[a, b]$ in \mathbf{C} a quadrato sommabile rispetto alla misura gdx . Applicando la procedura di ortogonalizzazione ad S si ottiene l'insieme

$$\mathcal{P}([a, b], gdx) = \{p_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

di polinomi ortogonali su $[a, b]$ rispetto al prodotto scalare definito in base alla misura gdx . Abbiamo quindi i polinomi

$$p_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(p_k | x^n)}{(p_k | p_k)} p_k(x),$$

tali che

$$(p_m | p_n) = \int_a^b \overline{p_m(x)} p_n(x) g(x) dx = 0, \quad \text{se } m \neq n.$$

Sappiamo che $L^2([a, b], gdx)$ è spazio di Hilbert separabile ed è quindi lecito chiedersi se $\mathcal{P}([a, b], gdx)$ è base ortogonale per $L^2([a, b], gdx)$. Nel caso in cui l'intervallo $[a, b]$ è *limitato* la risposta è affermativa come conseguenza del teorema di approssimazione di Weierstrass secondo il quale ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è ivi uniformemente approssimabile con polinomi. Infatti da tale teorema segue che $\mathcal{P}([a, b], gdx)$ è denso (in $L^2([a, b], gdx)$) nel sottospazio delle funzioni continue su $[a, b]$ e, d'altra parte, tale sottospazio è denso in $L^2([a, b], gdx)$ per cui $\mathcal{P}([a, b], gdx)$ è denso in $L^2([a, b], gdx)$. Quindi $\mathcal{P}([a, b], gdx)$ è base ortogonale in $L^2([a, b], gdx)$. Osserviamo che se $\{p_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ è una classe di polinomi ortogonali in $L^2([a, b], gdx)$, anche $\{k_n p_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ lo è, essendo le k_n costanti non nulle. Si dice che le costanti k_n , dette **costanti di standardizzazione** dei polinomi, individuano la standardizzazione di essi. Tale scelta avviene con criteri

diversi a seconda della classe di polinomi. Ad esempio, per i polinomi di Legendre P_n , le costanti k_n sono scelte in modo che $P_n(1) = k_n p_n(1) = 1$, $\forall n$.

Esempio 2.5 Sia $[a, b] = [-1, 1]$ e

$$g(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1.$$

L'insieme

$$B^{(\alpha, \beta)} = \{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)(1-x)^{\alpha/2}(1+x)^{\beta/2} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

è base ortogonale in $L^2([-1, 1])$, $\forall \alpha > -1, \beta > -1$ ed i polinomi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ (con la opportuna standardizzazione) sono detti **polinomi di Jacobi**. In particolare con $\alpha = \beta = \rho - 1/2$, $\rho > -1/2$ si ha che l'insieme

$$B^{(\rho)} = \{C_n^{(\rho)}(x)(1-x^2)^{\rho/2-1/4} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

è base ortogonale in $L^2([-1, 1])$ ed i polinomi $C_n^{(\rho)}(x)$ (con la opportuna standardizzazione) sono detti **polinomi di Gegenbauer**. I polinomi di Gegenbauer di indice 0 (risp. 1, risp. 1/2) sono detti **polinomi di Tchebichev di I^a specie** (risp. di II^a specie, risp. di Legendre). Indicando con T_n (risp. U_n , risp. P_n) il polinomio di Tchebichev di I^a specie (risp. di II^a specie, risp. di Legendre) di grado n si ha quindi che gli insiemi

$$B^{(0)} = \{T_n(x)(1-x^2)^{-1/4} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

$$B^{(1)} = \{U_n(x)(1-x^2)^{1/4} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

$$B^{(1/2)} = \{P_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$$

sono basi ortogonali in $L^2([-1, 1])$.

Se l'intervallo $[a, b]$ non è limitato non si può applicare il teorema di approssimazione di Weierstrass e i polinomi ortogonali che si ottengono non sono in generale completi cioè non sono in generale base ortogonale per il corrispondente spazio L^2 (ved. Kaczmarz, Steinhaus [12] per controesempi). Però nei seguenti due casi si può dimostrare la completezza.

Esempio 2.6 Sia $[a, b] = [0, +\infty]$ e

$$g(x) = e^{-x} x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \alpha > -1.$$

I polinomi ortogonali $L_n^{(\alpha)}(x)$ che si ottengono, con la opportuna standardizzazione, sono detti **polinomi di Laguerre** di indice α . Si può verificare (ved. ad esempio Martucci [17] pag. 100) che, per ogni α reale, $\alpha > -1$, essi sono un insieme completo in $L^2([0, +\infty], gdx)$ e quindi

$$B^{(\alpha)} = \{L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

è base ortogonale in $L^2([0, +\infty])$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > -1$.

Esempio 2.7 Sia $[a, b] = \mathbf{R}$ e $g(x) = \exp(-x^2)$. I polinomi ortogonali $H_n(x)$ che si ottengono, con la opportuna standardizzazione, sono detti **polinomi di Hermite**. Si può verificare (ved. ad esempio Martucci [17] pag. 99) che essi sono un insieme completo in $L^2(\mathbf{R}, gdx)$ e quindi

$$B = \{H_n(x)e^{-x^2/2} \mid n \in \mathbf{N}\}$$

è base ortogonale in $L^2(\mathbf{R})$.

I polinomi di Jacobi, Laguerre e Hermite sono detti **polinomi ortogonali classici**. Tali polinomi soddisfano alla **formula di Rodriguez**

$$p_n(x) = k_n \frac{1}{g(x)} \frac{d^n}{dx^n} [g(x)X^n(x)] \quad (2.21)$$

in cui k_n è una costante di standardizzazione e $X(x)$ è un polinomio dato da

$$X(x) = 1 - x^2 \quad \text{per i polinomi di Jacobi}$$

$$X(x) = x \quad \text{per i polinomi di Laguerre}$$

$$X(x) = 1 \quad \text{per i polinomi di Hermite.}$$

Precisamente valgono le seguenti formule di Rodriguez per i diversi polinomi ortogonali classici. I polinomi di Jacobi sono dati da

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^\alpha (1+x)^\beta (1-x^2)^n].$$

I polinomi di Laguerre sono dati da

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+\alpha}].$$

I polinomi di Hermite sono dati da

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Il fatto che i polinomi ortogonali classici soddisfano la formula di Rodriguez ha come conseguenza (ved. Hochstadt [10] o Rossetti [22]) che tali polinomi soddisfano una equazione differenziale che è l'equazione

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_n^{(\alpha,\beta)}}{dx^2}(x) + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x]\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx}(x) + n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0 \quad (2.22)$$

per i polinomi di Jacobi, è l'equazione di Laguerre

$$x\frac{d^2 L_n^{(\alpha)}}{dx^2}(x) + (\alpha+1-x)\frac{dL_n^{(\alpha)}}{dx}(x) + nL_n^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (2.23)$$

per i polinomi di Laguerre e, infine, è l'equazione di Hermite

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2}(x) - 2x\frac{dH_n}{dx}(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (2.24)$$

per i polinomi di Hermite.

Due altre utili basi ortogonali sono descritte nei seguenti due esempi.

Esempio 2.8 *I polinomi di Legendre P_l soddisfano alla seguente equazione differenziale, che si ottiene dalla (2.22) per $\alpha = \beta = 0$,*

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_l}{dx^2}(x) - 2x\frac{dP_l}{dx}(x) + l(l+1)P_l(x) = 0. \quad (2.25)$$

Definiamo funzione associata di Legendre di indice (l, m) , l, m interi non negativi, $l \geq m$, la funzione $P_l^m : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ data da

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{dx^m}(x).$$

Tenuto conto che P_l soddisfa l'equazione (2.25) si ottiene che P_l^m soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}(x)] + [l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]P_l^m(x) = 0. \quad (2.26)$$

Tenuto conto di ciò si ottiene che

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_n^m(x) dx = 0, \quad \text{per } l \neq n$$

e quindi (i P_l^m sono a valori reali) l'insieme delle funzioni associate di Legendre è ortogonale in $L^2([-1, 1])$ per ogni m al variare di l , $l = m, m+1, \dots$. Con un cambiamento di variabile $x = \cos \theta$ si ottiene quindi che

$$\{P_l^m(\cos \theta) \mid l = m, m+1, \dots\}$$

è base ortogonale per $L^2([0, \pi], \sin \theta d\theta)$. Si può verificare (ved. Spain, Smith [27] pag. 142) che è

$$\int_0^\pi [P_l^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!}.$$

Si ha quindi che, $\forall m$ intero non negativo,

$$B^{(m)} = \left\{ \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \mid l = m, m+1, \dots \right\} \quad (2.27)$$

è base ortonormale per $L^2([0, \pi], \sin \theta d\theta)$.

Esempio 2.9 Lo spazio di Hilbert $L^2([0, \pi] \times [-\pi, \pi], \sin \theta d\theta d\varphi)$ è prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert $L^2([0, \pi], \sin \theta d\theta)$ e $L^2([-\pi, \pi])$ (ved. Prugovečki [19] per maggiori dettagli a riguardo). Tenendo conto delle basi $B^{(m)}$ dell'esempio precedente per lo spazio $L^2([0, \pi], \sin \theta d\theta)$ e della base in (2.20) per lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$ si ottiene che, posto

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-\operatorname{sgn} m)^m \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

l'insieme

$$\{Y_l^m(\theta, \varphi) \mid l \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}, |m| \leq l\}$$

è base ortonormale per lo spazio di Hilbert $L^2([0, \pi] \times [-\pi, \pi], \sin \theta d\theta d\varphi)$. La funzione $Y_l^m(\theta, \varphi)$ è detta **armonica sferica** di indici l, m .

2.4 Operatori lineari in spazi di Hilbert

Un **operatore lineare** in uno spazio di Hilbert E è una applicazione lineare

$$A : \mathcal{D}(A) \rightarrow E$$

in cui $\mathcal{D}(A)$ è un sottospazio di E che è detto **dominio** di A . Il sottospazio $\mathcal{R}(A)$ è detto **range** di A . Considereremo solo operatori lineari che chiameremo semplicemente operatori.

Dati due spazi di Hilbert E, F , consideriamo lo spazio vettoriale delle coppie ordinate (x, y) , $x \in E, y \in F$ con la somma fra coppie ed il prodotto per numeri complessi definito componente per componente. Tale spazio è spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito, $\forall x_1, x_2 \in E, \forall y_1, y_2 \in F$, da

$$((x_1, y_1)|(x_2, y_2)) := (x_1|x_2) + (y_1|y_2).$$

Tale spazio di Hilbert è detto **somma diretta (esterna)** di E e F e si indica con $E \oplus F$. Si dice **grafico** di un operatore A il sottospazio di $E \oplus E$ dato da

$$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Un sottospazio S di $E \oplus E$ non è in generale il grafico di un operatore in E . Condizione necessaria e sufficiente perché lo sia è che non appartengano ad S due coppie $(x, y), (x, u)$ con $y \neq u$ e, essendo S sottospazio, ciò è vero se e solo se non appartiene ad S una coppia $(0, x)$ con $x \neq 0$. In tal caso infatti S definisce (è il grafico del) l'operatore A con

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in E \mid \exists (x, u) \in S\}$$

tale che, per ogni $x \in \mathcal{D}(A)$, Ax è l'unico elemento di E tale che $(x, Ax) \in S$.

Si dice **nucleo** di un operatore A il sottospazio

$$\ker A = \{x \in \mathcal{D}(A) \mid Ax = 0\} = A^{-1}(\{0\}).$$

Se A è iniettivo, cioè $\ker A = \{0\}$, si dice che A è **invertibile** e si indica con A^{-1} l'operatore **inverso** di A . Evidentemente, se A è invertibile, è

$$\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A), \quad \mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A).$$

Se A è operatore la chiusura $\overline{G(A)}$ del grafico di A non è in generale il grafico di un operatore. Se invece ciò avviene, allora si dice che A è **chiudibile** e si indica con \bar{A} l'operatore, detto **chiusura** di A , tale che

$$G(\bar{A}) = \overline{G(A)}.$$

Un operatore si dice **chiuso** se è chiudibile e $A = \bar{A}$ cioè se il grafico di A è chiuso ($G(A) = \overline{G(A)}$). Equivalentemente, A è chiuso se, qualunque sia $\{(x_n, Ax_n)\}$ successione in $G(A)$ convergente, allora la coppia (x, y) cui converge è in $G(A)$ cioè $x \in \mathcal{D}(A)$ e $y = Ax$. Si osservi che, se A è chiuso, allora $\ker A$ è sottospazio chiuso.

Dati due operatori A e B in E , l'**operatore somma** $A + B$ è l'operatore

$$A + B : \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \rightarrow E \text{ tale che } x \mapsto Ax + Bx.$$

Quindi, per definizione, $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$. Dati due operatori A e B in E l'**operatore prodotto** AB è l'operatore

$$AB : B^{-1}(\mathcal{D}(A)) \rightarrow E \text{ tale che } x \mapsto A(Bx).$$

Quindi, per definizione,

$$\mathcal{D}(AB) = B^{-1}(\mathcal{D}(A)) = \{x \in \mathcal{D}(B) \mid Bx \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Un operatore A nello spazio di Hilbert \mathbf{C}^n è una matrice $n \times n$. L'**aggiunto** di A è la matrice A^* tale che

$$A_{jk}^* = \overline{A_{kj}}$$

cioè

$$(A^*x|y) = (x|Ay), \quad \forall x, y \in \mathbf{C}^n. \quad (2.28)$$

La stessa definizione si può dare per un operatore limitato A definito su tutto uno spazio di Hilbert E .

Proposizione 2.13 *Sia A un operatore limitato definito su tutto uno spazio di Hilbert E . Allora esiste un unico operatore A^* , detto aggiunto di A , che è lineare, definito su tutto E e soddisfa la (2.28).*

Dimostr.: Infatti, $\forall x \in E$, il funzionale su E definito da

$$y \mapsto (x|Ay)$$

è lineare e continuo (perché A è lineare e limitato). Allora, per il teorema di Riesz, esiste un *unico* $u(x) \in E$ tale che

$$(u(x)|y) = (x|Ay), \quad \forall y \in E.$$

Ne viene che è possibile definire $A^* : E \rightarrow E$ come l'operatore tale che $A^*x = u(x)$. Tale operatore è lineare e soddisfa la (2.28) estendendo quindi la definizione di aggiunto al caso di operatori limitati definiti su tutto lo spazio di Hilbert. **QED**

Si osservi che la (2.28) si può riscrivere in $E \oplus E$ nel seguente modo (A e A^* sono definiti su tutto E)

$$((x, A^*x)|(-Ay, y)) = 0, \quad \forall x, y \in E.$$

La generalizzazione al caso generale di operatori non definiti su tutto E sarà quindi

$$((x, A^*x)|(-Ay, y)) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*), \forall y \in \mathcal{D}(A). \quad (2.29)$$

Introduciamo l'isomorfismo

$$\tau : E \oplus E \rightarrow E \oplus E \text{ tale che } (x, y) \mapsto (-y, x).$$

L'equazione (2.29) dice quindi che per la generalizzazione cercata, se possibile, deve essere (poiché la (2.29) deve essere vera $\forall y \in \mathcal{D}(A)$)

$$(x, A^*x) \in [\tau(G(A))]^\perp, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*)$$

e quindi

$$G(A^*) = [\tau(G(A))]^\perp. \quad (2.30)$$

In generale $[\tau(G(A))]^\perp$ non è grafico di un operatore. Vale però la seguente proposizione.

Proposizione 2.14 *Sia A operatore in E . Allora $[\tau(G(A))]^\perp$ è grafico di un operatore se e solo se A è **densamente definito** cioè se e solo se*

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = E.$$

Dimostr.: Si verifica che $[\tau(G(A))]^\perp = \tau[G(A)^\perp]$. Si ha poi

$$(0, x) \in \tau[G(A)^\perp] \iff (x, 0) \in G(A)^\perp \iff$$

$$((x, 0)|(u, Au)) = (x|u) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A) \iff x \in \mathcal{D}(A)^\perp.$$

Da ciò segue che $[\tau(G(A))]^\perp$ è grafico di un operatore se e solo se $x \in \mathcal{D}(A)^\perp$ implica $x = 0$, cioè se e solo se $\mathcal{D}(A)^\perp = \{0\}$ e quindi, per la (2.6), se e solo se

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(A)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E.$$

QED

Si può quindi definire l'aggiunto per un operatore A densamente definito in E come l'operatore A^* tale che

$$(A^*x|y) = (x|Ay), \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^*), \forall y \in \mathcal{D}(A)$$

e la condizione che A sia densamente definito in E è la condizione necessaria e sufficiente per tale definizione. Alcune importanti proprietà dell'aggiunto sono descritte nella seguenti due proposizioni.

Proposizione 2.15 *Se A, B sono operatori densamente definiti in E , allora le seguenti relazioni sono equivalenti*

$$1. (Ax|y) = (x|By), \quad \forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(B) ;$$

2. $A \subset B^*$;

3. $B \subset A^*$.

Proposizione 2.16 *Sia A operatore densamente definito in E ; allora A^* è operatore chiuso ed è valida la seguente relazione*

$$\ker A^* = \mathcal{R}(A)^\perp. \quad (2.31)$$

Se poi $\mathcal{D}(A) = E$, allora A^ è operatore limitato. Inoltre A è chiudibile se e solo se A^* è densamente definito ed in tal caso*

$$A^{**} = \bar{A}. \quad (2.32)$$

Infine, se anche B è operatore densamente definito in E , si ha che

1. *se $A \subset B$, allora $B^* \subset A^*$;*

2. *se anche $A + B$ è densamente definito, allora*

$$A^* + B^* \subset (A + B)^* \quad (2.33)$$

ed è

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad (2.34)$$

se uno dei due operatori è limitato e definito su tutto E ;

3. *se anche AB è densamente definito, allora*

$$B^* A^* \subset (AB)^* \quad (2.35)$$

ed è

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (2.36)$$

se A è limitato e definito su tutto E oppure se B è iniettivo e B^{-1} è limitato e definito su tutto E .

Dimostr.: Il fatto che A^* è chiuso segue dalla (2.30) tenuto conto che l'ortogonale di un insieme è sempre chiuso (ved. Proposizione 2.3). La (2.31) segue dalla seguente catena di se e solo se :

$$\begin{aligned} u \in \ker A^* &\iff (u, 0) \in G(A^*) \iff (u, 0) \in \tau[G(A)^\perp] \iff (0, u) \in G(A)^\perp \\ &\iff ((0, u)|(x, Ax)) = (u|Ax) = 0, \forall x \in \mathcal{D}(A) \iff u \in \mathcal{R}(A)^\perp. \end{aligned}$$

La (2.32) si verifica tenendo conto della (2.6) e della Proposizione 2.14 applicata ad A^* . Le relazioni (2.33) e (2.35) seguono dalla Proposizione 2.15. **QED**

Indicando con I l'operatore identità su E , $\forall a \in \mathbf{C}$ e $\forall A$ operatore in E , scriviamo $A + a$ in luogo di $A + aI$. Da (2.34) e (2.36) si ha che, $\forall a \in \mathbf{C}$, è

$$(A + a)^* = A^* + \bar{a}, \quad (2.37)$$

$$(aA)^* = \bar{a}A^*. \quad (2.38)$$

Un operatore A in E si dice **Hermitiano** se

$$(Ax|y) = (x|Ay), \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Un operatore A densamente definito in E si dice

1. **normale** se è chiuso e $AA^* = A^*A$,
2. **simmetrico** se $A \subset A^*$,
3. **autoaggiunto** se $A = A^*$.

Si osservi che un operatore può essere Hermitiano ma non avere aggiunto se non è densamente definito. Un operatore è simmetrico se e solo se è Hermitiano e densamente definito. Importanti operatori autoaggiunti sono gli operatori di proiezione come risulta dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.17 *Un operatore $A \in B(E)$ è proiettore se e solo se è idempotente ed autoaggiunto ed in tal caso il sottospazio chiuso sul quale proietta è*

$$M = \{x \in E \mid Ax = x\}. \quad (2.39)$$

Dimostr.: Sia A proiettore. Abbiamo già visto che A è idempotente. Per verificare che è autoaggiunto, essendo definito su tutto E , basta verificare che è Hermitiano. Sia M il sottospazio chiuso su cui A proietta. Indichiamo, $\forall u \in E$, con u_\perp la componente di u secondo M^\perp . Allora $u = Au + u_\perp$ è la decomposizione secondo M e M^\perp . Ne segue che, $\forall x, y \in E$, è

$$(x|Ay) = (Ax + x_\perp|Ay) = (Ax|Ay) = (Ax|Ay + y_\perp) = (Ax|y)$$

e quindi A è Hermitiano.

Viceversa sia A idempotente ed autoaggiunto. Poichè A è continuo M in (2.39) è sottospazio chiuso. Essendo A idempotente, $\forall x \in E$, si ha che $Ax \in M$ e, essendo autoaggiunto, $\forall y \in M$, è

$$(y|x - Ax) = (Ay|x - Ax) = (y|A(x - Ax)) = (y|0) = 0.$$

Da ciò segue che $x - Ax \in M^\perp$. Allora da $x = Ax + (x - Ax)$, per l'unicità della decomposizione secondo M e M^\perp , si ha $Ax = P_M x$, $\forall x \in E$ e quindi $A = P_M$ per cui A è proiettore e proietta su M in (2.39). **QED**

Una biiezione isometrica di E su E si dice **operatore unitario**. Quindi un operatore U è unitario se $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(U) = E$ ed è isometrico. Quindi un operatore unitario in E è un isomorfismo dello spazio di Hilbert E .

Proposizione 2.18 *L'operatore U in E è unitario se e solo se*

$$UU^* = U^*U = I. \quad (2.40)$$

Dimostr.: Se è vera la (2.40) U è biiezione di E su E . Inoltre

$$(Ux|Uy) = (U^*Ux|y) = (x|y), \quad \forall x, y \in E,$$

e quindi U è isometrico. Quindi U è unitario. Viceversa sia U operatore unitario. Da $(Ux|Uy) = (x|y)$, $\forall x, y \in E$, segue che $(U^*Ux|y) = (x|y)$, $\forall x, y \in E$ e quindi $U^*Ux = x$, $\forall x \in E$ da cui $U^*U = I$. Da questa, moltiplicando a sinistra per U ed a destra per U^{-1} si ottiene che è anche $UU^* = I$. **QED**

Il seguente teorema contiene alcuni utili ed importanti risultati (ved. ad esempio Martucci [17] per la dimostrazione).

Teorema 2.19 *Sia A operatore in E . Allora due qualunque delle seguenti proposizioni*

1. A è limitato,
2. A è chiuso,
3. $\mathcal{D}(A)$ è chiuso,

implicano la terza.

Osserviamo che l'enunciato che afferma che 2 e 3 implicano la 1 è detto teorema del grafico chiuso.

2.5 Spettro e risolvente

Sia A operatore in E . Si dice **insieme risolvente** di A l'insieme $\rho(A) \subset \mathbf{C}$ dato da

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \ker(A - \lambda) = \{0\}, \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} = E, (A - \lambda)^{-1} \text{ è limitato.}\}$$

Quindi $\lambda \in \rho(A)$ se $(A - \lambda)^{-1}$ esiste ed è densamente definito e limitato. Il complemento in \mathbf{C} dell'insieme risolvente di A è detto **spettro** di A e si indica con $\sigma(A)$. Si dice **spettro puntuale** di A il sottoinsieme $\sigma_p(A)$ di $\sigma(A)$ dato da

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \ker(A - \lambda) \neq \{0\}\}.$$

Gli elementi di $\sigma_p(A)$ si dicono **autovalori** di A . Evidentemente $\lambda \in \sigma_p(A)$ se e solo se esiste un vettore $x \in \mathcal{D}(A)$, $x \neq 0$, tale che $(A - \lambda)x = 0$, cioè tale che

$$Ax = \lambda x.$$

Un tale vettore x è detto **autovettore** di A relativo all'autovalore λ . L'insieme degli autovettori di A relativi all'autovalore λ è dato da $\ker(A - \lambda) \setminus \{0\}$. La dimensione di $\ker(A - \lambda)$ è detta **molteplicità** di λ . Si dice che λ è autovalore **semplice** o **non degenere** se $\ker(A - \lambda)$ è unidimensionale.

Si dice **spettro continuo** di A il sottoinsieme $\sigma_c(A)$ di $\sigma(A)$ dato da

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \ker(A - \lambda) = \{0\}, \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} = E, (A - \lambda)^{-1} \text{ non limitato.}\}$$

Si dice **spettro residuo** di A il sottoinsieme $\sigma_r(A)$ di $\sigma(A)$ dato da

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \ker(A - \lambda) = \{0\}, \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} \neq E.\}$$

Evidentemente gli insiemi $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ sono a due a due disgiunti ed è

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Esempio 2.10 Sia $P = P_M$ proiettore sul sottospazio chiuso M . Essendo P idempotente i possibili autovalori λ soddisfano $\lambda^2 = \lambda$ e quindi sono 0 e 1. Gli autovettori appartenenti all'autovalore 1 sono i vettori non nulli di M e quelli appartenenti all'autovalore 0 sono i vettori non nulli di M^\perp . Tali valori danno tutto lo spettro per cui ogni altro $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ appartiene al risolvente di P .

Teorema 2.20 Se A è operatore chiuso in E , allora $\rho(A)$ è sottoinsieme aperto di \mathbf{C} e $\lambda \in \rho(A)$ se e solo se $A - \lambda$ è biiezione di $\mathcal{D}(A)$ su E .

Teorema 2.21 Se A è operatore Hermitiano, allora sono valide le seguenti proposizioni.

1. Ogni autovalore di A è reale e autovettori relativi ad autovettori diversi sono ortogonali.

2. Se $a + ib \in \mathbf{C}$, allora è

$$\| (A - (a + ib))x \|^2 = \| (A - a)x \|^2 + b^2 \| x \|^2, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (2.41)$$

3. Se $b \neq 0$, allora $A - (a + ib)$ è invertibile ed è

$$\| (A - (a + ib))^{-1} \| \leq |b|^{-1}. \quad (2.42)$$

4. Se $b \neq 0$, o $a + ib \in \rho(A)$ oppure $a + ib \in \sigma_r(A)$, e quindi

$$\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \mathbf{R}. \quad (2.43)$$

5. A è chiuso se e solo se $\mathcal{R}(A - \lambda)$ è chiuso per qualche λ fuori dell'asse reale ed in tal caso $\mathcal{R}(A - \lambda)$ è chiuso qualunque sia λ fuori dell'asse reale.

Dimostr.: (1). Sia λ autovalore e sia x autovettore di A relativo a λ . Allora

$$\lambda \| x \|^2 = (x|Ax) = (Ax|x) = \bar{\lambda} \| x \|^2$$

e quindi, essendo $\| x \| \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$ per cui λ è reale. Siano poi x_1, x_2 autovettori di A appartenenti rispettivamente agli autovalori diversi λ_1, λ_2 . Essendo

$$\lambda_2(x_1|x_2) = (x_1|Ax_2) = (Ax_1|x_2) = \lambda_1(x_1|x_2),$$

deve essere $(x_1|x_2) = 0$.

(2). Segue subito dal calcolo di

$$\| (A - (a + ib))x \|^2 = ((A - (a + ib))x|(A - (a + ib))x)$$

tenendo conto che A è Hermitiano.

(3). Dalla (2.41) segue che, se $b \neq 0$, allora $(A - (a + ib))x = 0$ solo se $x = 0$ e quindi $A - (a + ib)$ è invertibile ed è

$$\| (A - (a + ib))x \| \geq |b| \| x \|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A). \quad (2.44)$$

Allora, $\forall y \in \mathcal{D}((A - (a + ib))^{-1})$, $y = (A - (a + ib))x$, sostituendo $x = (A - (a + ib))^{-1}y$ in (2.44), si ottiene

$$|b| \| (A - (a + ib))^{-1}y \| \leq \| y \|,$$

e da ciò segue la (2.42).

(4). Segue subito da 3.

(5). Si verifica che se A è chiuso allora $A - \lambda$ è chiuso, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$ ed allora anche $(A - \lambda)^{-1}$, se esiste, è chiuso. Allora la tesi segue dal Teorema 2.19 applicato ad $(A - (a + ib))^{-1}$ che, per $b \neq 0$, esiste ed è limitato, tenuto conto che il dominio di $(A - (a + ib))^{-1}$ è il range di $A - (a + ib)$. **QED**

Teorema 2.22 *Sia A operatore simmetrico in E . Allora A è autoaggiunto se e solo se è vera una qualunque delle seguenti proposizioni equivalenti:*

1. A è chiuso e $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$;
2. $\mathcal{R}(A \pm i) = E$.

Dimostr.: Sia A autoaggiunto. L'aggiunto di un operatore è sempre chiuso e quindi A è chiuso. Inoltre se fosse $\ker(A^* \pm i) \neq \{0\}$ il numero complesso i sarebbe autovalore e ciò è assurdo perché un operatore autoaggiunto ha autovalori reali. Quindi 1 è vera.

Dimostriamo poi che 1 implica 2. Dal teorema precedente si ha che se A è operatore Hermitiano chiuso, allora $\mathcal{R}(A - \lambda)$ è chiuso se λ ha parte immaginaria diversa da 0. Allora, tenendo conto di (2.31) e di (2.6), si ha

$$\mathcal{R}(A \pm i) = \overline{\mathcal{R}(A \pm i)} = (\mathcal{R}(A \pm i))^{\perp\perp} = (\ker(A^* \mp i))^{\perp} = E.$$

Infine dimostriamo che 2 implica che A è autoaggiunto. Essendo per ipotesi $A \subset A^*$, basta dimostrare che $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$ perché allora deve essere $A = A^*$. Sia quindi $x \in \mathcal{D}(A^*)$ e consideriamo $(A^* + i)x$. Per ipotesi $\mathcal{R}(A + i) = E$ e quindi esiste $y \in \mathcal{D}(A)$ tale che

$$(A + i)y = (A^* + i)x. \quad (2.45)$$

Ma su $\mathcal{D}(A)$ gli operatori A e A^* coincidono e quindi si può sostituire A^* ad A nel primo membro di (2.45). Tale equazione diviene quindi

$$(A^* + i)(x - y) = 0$$

e quindi $x - y \in \ker(A^* + i)$. Ma, tenuto conto di (2.31), essendo per ipotesi $\mathcal{R}(A - i) = E$, è $\ker(A^* + i) = \{0\}$ per cui $x = y$ e quindi $x \in \mathcal{D}(A)$. Per l'arbitrarietà di $x \in \mathcal{D}(A^*)$ si ha $\mathcal{D}(A^*) \subset \mathcal{D}(A)$ e ciò conclude la dimostrazione. **QED**

Esempio 2.11 *L'operatore di posizione in $L^2(\mathbf{R})$ è l'operatore Q con dominio*

$$\mathcal{D}(Q) = \{\psi \in L^2(\mathbf{R}) \mid x\psi(x) \in L^2(\mathbf{R})\}$$

e tale che

$$(Q\psi)(x) = x\psi(x), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q).$$

Tale operatore è densamente definito essendo definito sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ che è denso in $L^2(\mathbf{R})$. Inoltre è Hermitiano essendo

$$(Q\psi|\varphi) = \int_{\mathbf{R}} x \overline{\psi(x)} \varphi(x) dx = (\psi|Q\varphi).$$

Quindi Q è simmetrico ed allora, per il teorema precedente, per dimostrare che è autoaggiunto, basta verificare che $\mathcal{R}(Q \pm i) = L^2(\mathbf{R})$. Ma, presa $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ la funzione

$$\varphi_+(x) = \frac{\psi(x)}{x+i}$$

è in $\mathcal{D}(Q)$ ed è tale che

$$(Q+i)\varphi_+ = \psi$$

e quindi $\mathcal{R}(Q+i) = L^2(\mathbf{R})$. Analogamente, presa $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ la funzione

$$\varphi_-(x) = \frac{\psi(x)}{x-i}$$

è in $\mathcal{D}(Q)$ ed è tale che

$$(Q-i)\varphi_- = \psi$$

e quindi è anche $\mathcal{R}(Q-i) = L^2(\mathbf{R})$ e ciò conclude la verifica.

Teorema 2.23 Se A è operatore simmetrico chiuso, allora A è autoaggiunto se e solo se $\sigma(A)$ è sottoinsieme chiuso dell'asse reale ed in tal caso $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Dimostr.: Si verifica (ved. ad esempio Martucci [17] pag. 123, 124) che se $a+ib \in \rho(A)$, $b > 0$ (risp. $b < 0$), allora tutto il semipiano superiore (risp. inferiore) aperto di \mathbf{C} è contenuto nel risolvente. Si ha poi, dal Teorema 2.22, tenuto anche conto del Teorema 2.21, che A è autoaggiunto se e solo se $\pm i \in \rho(A)$ e quindi se e solo se i semipiani superiore ed inferiore aperti di \mathbf{C} son in $\rho(A)$. Da ciò segue la prima parte della tesi. Sia poi $\lambda \in \sigma(A)$. Per la prima parte λ è reale. Se λ non è autovalore, allora $\ker(A-\lambda) = \{0\}$ e quindi (λ è reale ed A è autoaggiunto) $\mathcal{R}(A-\lambda)^\perp = \{0\}$. Da ciò segue che $\mathcal{R}(A-\lambda)$ è denso in E e quindi $\lambda \in \sigma_c(A)$. Quindi o $\lambda \in \sigma_p(A)$ o $\lambda \in \sigma_c(A)$ per cui $\sigma_r(A) = \emptyset$. **QED**

Sia $A \in B(E)$ operatore limitato. Si dimostra che esiste finito

$$r_\sigma(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

ed è

$$r_\sigma(A) = \alpha := \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|. \quad (2.46)$$

Il numero reale non negativo $r_\sigma(A)$ è detto **raggio spettrale** di A . La dimostrazione consiste nel far veder che, se $\lambda > \alpha$, allora la serie

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}$$

ammette limite uniforme in $B(E)$ ad un operatore che è evidentemente l'inverso di $A - \lambda$. Da ciò segue che tali λ sono nel risolvente $\rho(A)$ per cui $r_\sigma(A) \leq \alpha$. Facendo poi vedere che $\alpha \leq r_\sigma(A)$ si ottiene la tesi. Nel caso che A sia operatore normale si verifica che

$$r_\sigma(A) = \|A\|.$$

Proposizione 2.24 *Se U è operatore unitario, il suo spettro è un sottoinsieme chiuso della circonferenza $|\lambda| = 1$ di raggio 1 in \mathbf{C} cioè*

$$\sigma(U) \subset \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}.$$

Dimostr.: Poiché $\|U\| = 1$, è $r_\sigma(U) = 1$. Basta quindi dimostrare che, se $\lambda < 1$, allora λ è nel risolvente. Consideriamo la serie

$$U^* \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda U^*)^n, \quad \lambda < 1. \quad (2.47)$$

Essendo

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} (\lambda U^*)^k \right\| \leq \frac{|\lambda|^n}{1 - |\lambda|},$$

la serie in (2.47) ammette limite uniforme in $B(E)$ ad un operatore A . È facile verificare che

$$A(U - \lambda) = (U - \lambda)A = I$$

e quindi λ è nel risolvente di U .

QED

Un operatore $A \in B(E)$ si dice **compatto** se, $\forall \{x_n\}$ successione limitata in E , la successione $\{Ax_n\}$ contiene una sottosuccessione convergente. Si può dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché $A \in B(E)$ sia compatto, è che A trasformi ogni successione debolmente nulla in una successione fortemente nulla cioè, $\forall \{x_n\}$ tale che $w \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} Ax_n = 0$. Si dimostra che la combinazione lineare di operatori compatti è un operatore compatto, il prodotto di un operatore limitato per un operatore compatto è un operatore compatto e che l'aggiunto di un operatore compatto è un operatore compatto. Indichiamo con $B_\infty(E)$ l'insieme degli operatori compatti in E . Si dimostra che $B_\infty(E)$ è sottoinsieme chiuso di $B(E)$ (rispetto alla topologia della norma degli operatori) e quindi il limite uniforme di operatori compatti, se esiste, è un operatore compatto. Osserviamo che $B_\infty(E) = B(E)$ se E è finito-dimensionale. Lo spettro di un operatore compatto ha le caratteristiche descritte nel seguente teorema.

Teorema 2.25 *Sia A operatore compatto. Ogni numero complesso non nullo o appartiene al risolvente di A o è autovalore di A di molteplicità finita. Inoltre $\sigma_p(A)$ è insieme al massimo numerabile e, se ha infiniti elementi, l'unico punto di accumulazione (esiste perché $\sigma(A)$ è chiuso e limitato) è il numero 0.*

Dal teorema sopra segue che l'unico numero che può appartenere a $\sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$ è 0 e quindi una almeno di tali due parti dello spettro è vuota. Particolari operatori compatti sono gli **operatori degeneri** che sono gli operatori il cui range è di dimensione finita. Si ha anche che un operatore è compatto se e solo se è limite uniforme di una successione di operatori degeneri.

Esempio 2.12 *Sia A l'operatore tale che*

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \mapsto \{x_2, \frac{x_3}{2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{n}, \dots\}$$

è compatto e $\sigma_p(A) = \{0\}$ e quindi $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$ e $\rho(A) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Infatti, A è limite uniforme degli operatori degeneri A_n definiti da

$$A_n\{x_n\} = \{x_2, \frac{x_3}{2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{n}, 0, 0, \dots\}$$

e quindi è compatto. Non è difficile verificare il resto.

Il seguente teorema spettrale estende il teorema di diagonalizzazione per operatori autoaggiunti in spazi a dimensione finita agli operatori autoaggiunti compatti in spazi di Hilbert separabili di dimensione non finita.

Teorema 2.26 *Sia A operatore compatto autoaggiunto in uno spazio di Hilbert separabile E di dimensione non finita e sia*

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$$

l'insieme degli autovalori distinti di A ordinato per valori assoluti non crescenti. Allora, indicando con P_k il proiettore sull'autospazio (di dimensione finita se $\lambda_k \neq 0$) relativo all'autovalore λ_k , si ha

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k \quad (2.48)$$

(la somma intesa come limite uniforme delle somme parziali) se ci sono infiniti autovalori distinti, mentre si ha

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k \quad (2.49)$$

se ci sono solo n autovalori distinti.

Nel caso più generale di operatori normali vale ancora un teorema spettrale. Al fine di darne l'enunciato, premettiamo quanto segue. Indichiamo con \mathcal{B} una σ -algebra di sottoinsiemi di un insieme X . Si dice **risoluzione dell'identità** di E su \mathcal{B} una applicazione

$$P : \mathcal{B} \rightarrow B(E)$$

tale che

1. $P(S)$ è proiettore, $\forall S \in \mathcal{B}$;
2. $P(X) = I$;
3. per ogni sottoclasse $\{S_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ disgiunta e numerabile di \mathcal{B} si ha

$$P(\cup_{n=0}^{+\infty} S_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n) \quad (2.50)$$

essendo la somma intesa come limite forte della successione delle somme parziali.

Dalla definizione segue che, $\forall x, y \in E$, l'applicazione di \mathcal{B} in \mathbf{C} definita da

$$S \mapsto (x|P(S)y)$$

è una misura complessa su \mathcal{B} (ved. Rudin [24] o Lang [15] per proprietà delle misure complesse). Posto $P_{x,y}(S) := (x|P(S)y)$, si può dimostrare il seguente teorema spettrale per operatori normali.

Teorema 2.27 *Sia A operatore normale in E . Allora esiste una unica P^A risoluzione dell'identità di E sulla σ -algebra dei boreliani sottoinsiemi di $\sigma(A)$ tale che*

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in E \mid \int_{\sigma(A)} |\lambda|^2 dP_{x,x}^A(\lambda) < +\infty\}$$

e, $\forall x \in E, \forall y \in \mathcal{D}(A)$,

$$(x|Ay) = \int_{\sigma(A)} \lambda dP_{x,y}^A(\lambda).$$

Si verifica che, se λ è autovalore di A allora $P^A(\{\lambda\})$ è il proiettore sull'autospazio di A relativo all'autovalore λ . Si osservi che se λ è autovalore semplice, con autovettore φ normalizzato, allora

$$P^A(\{\lambda\}) = (\varphi|\cdot)\varphi.$$

La risoluzione dell'identità P^A è anche detta **decomposizione spettrale** di A ed ha la seguente applicazione alla meccanica quantistica. Quando lo stato del sistema in considerazione è descritto da $\psi \in E$ e si fa una misura dell'osservabile cui è associato l'operatore autoaggiunto A , la probabilità che si ottenga un valore nel boreliano S è data da

$$P_{\psi,\psi}^A(S) = (\psi|P^A(S)\psi).$$

In particolare, se $S = \{\lambda\}$ con λ autovalore semplice, con autovettore φ normalizzato, allora

$$P_{\psi,\psi}^A(\{\lambda\}) = |(\psi|\varphi)|^2.$$

Esempio 2.13 Sia Q operazione di posizione in $L^2(\mathbf{R})$. Indichiamo con χ_S la funzione caratteristica dell'insieme S cioè la funzione da \mathbf{R} in \mathbf{C} che è 1 su S e 0 su $\mathbf{R} \setminus S$. Indichiamo con $m(S)$ l'operatore di moltiplicazione delle funzioni in $L^2(\mathbf{R})$ per χ_S . È facile verificare che $m(S)$ è idempotente ed autoaggiunto ed è quindi operatore di proiezione. La decomposizione spettrale di Q è

$$P^Q : \mathcal{B} \rightarrow B(L^2(\mathbf{R})) \text{ tale che } S \mapsto m(S). \quad (2.51)$$

Infatti, $\forall f, g \in L^2(\mathbf{R})$, è

$$P_{f,g}^Q(S) = (f|P^Q(S)g) = (f|m(S)g) = (f|\chi_S g) = \int_S \bar{f}g dx$$

e quindi

$$dP_{f,g}^Q(x) = \bar{f}g dx.$$

Allora, $\forall f \in L^2(\mathbf{R})$, $\forall g \in \mathcal{D}(Q)$, si ha che

$$(f|Qg) = \int_{\mathbf{R}} \bar{f}xg dx = \int_{\mathbf{R}} x dP_{f,g}^Q(x)$$

e da ciò, per l'unicità della decomposizione spettrale, si ottiene che la (2.51) dà la decomposizione spettrale di Q . Quando lo stato è $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ e si fa una misura dell'osservabile posizione, la probabilità che si ottenga un valore nel boreliano S è data da

$$P_{\psi,\psi}^Q(S) = \int_S |\psi|^2 dx$$

e quindi la probabilità che la posizione sia fra x e $x+dx$ è data da $|\psi|^2(x)dx$.

Per applicazioni alla meccanica quantistica ved. [2], [3], [11]

Capitolo 3

Trasformate

3.1 Trasformata di Fourier

Stabiliamo alcune notazioni. Un **multi-indice** in dimensione n è una n -pla ordinata $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di interi non negativi. Il numero $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ è detto **lunghezza** di α . Se α è multi-indice, useremo la notazione

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

per indicare le derivate parziali rispetto alla variabile $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ e scriveremo semplicemente ∂^α quando tale variabile è sottointesa. In tal caso $|\alpha|$ è l'ordine di ∂^α . Se $|\alpha| = 0$, conveniamo che $\partial^\alpha f = f$, per ogni funzione f . Inoltre, $\forall x \in \mathbf{R}^n$,

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

e, $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$x \cdot y := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

In tutto questo capitolo l'integrazione è rispetto alla misura di Lebesgue. Indichiamo con $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ tali che $|f|^p$ è integrabile. Tali spazi sono spazi di Banach ed in particolare, nel Capitolo sugli spazi di Hilbert, abbiamo visto che $L^2(\mathbf{R}^n)$ è spazio di Hilbert. Indichiamo poi con $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ lo spazio delle funzioni quasi ovunque limitate su \mathbf{R}^n .

Esistono $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \setminus L^2(\mathbf{R}^n)$; ad esempio, per $n = 1$ una tale f è la funzione data da $x^{-3/4}$ per $x \in (0, 1]$ e nulla fuori di tale intervallo. Inoltre, esistono $f \in L^2(\mathbf{R}^n) \setminus L^1(\mathbf{R}^n)$; ad esempio, per $n = 1$ una tale f è la funzione data da $1/x$ per $x \geq 1$ e nulla per $x < 1$.

La **trasformata di Fourier** della funzione $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ è la funzione $Ff : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ definita da

$$Ff(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) e^{-ix \cdot y} dy.$$

La trasformata di Fourier è una operazione lineare cioè la trasformata di Fourier di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare delle trasformate. Inoltre la trasformata di Fourier di una funzione è una funzione limitata; infatti

$$|Ff(x)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)| dy, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (3.1)$$

Esempio 3.1 Se $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$, allora

$$(Ff)(x) = (2/\pi)^{1/2} (1 + x^2)^{-1}. \quad (3.2)$$

Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ tale che $f(x) = 1$ per $|x| \leq 1$ e $f(x) = 0$ per $|x| > 1$. Allora

$$(Ff)(x) = (2/\pi)^{1/2} \frac{\sin x}{x}.$$

La trasformata di Fourier della gaussiana è una gaussiana. Infatti, se $f(x) = \exp(-ax^2)$, $a > 0$, si ha

$$(Ff)(x) = (2a)^{-1/2} e^{-x^2/(4a)}.$$

Teorema 3.1 Sia α multi-indice e $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ tale che $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Allora esiste $\partial^\alpha Ff$ ed è

$$\partial^\alpha Ff = (-i)^{|\alpha|} F(x^\alpha f(x)). \quad (3.3)$$

Dimostr.: Essendo

$$|\partial_x^\alpha f(y) e^{-ix \cdot y}| = |y^\alpha f(y)|,$$

poiché $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbf{R}^n)$, si può applicare il teorema di derivazione sotto segno di integrale e si ottiene la tesi. **QED**

Teorema 3.2 Sia α multi-indice e sia $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ di classe C^k tale che $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $\forall \alpha$ con $|\alpha| \leq k$. Allora, $\forall \alpha$ con $|\alpha| \leq k$, è

$$(F\partial^\alpha f)(x) = i^{|\alpha|} x^\alpha (Ff)(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (3.4)$$

Dimostr.: Si può dimostrare che se $f, f' \in L^1(\mathbf{R})$, allora $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Tenendo conto di ciò, integrando per parti rispetto alle diverse variabili, si ottiene la tesi. **QED**

Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ infinitamente derivabili e tali che, $\forall \alpha, \beta$ multi-indici, $x^\alpha \partial^\beta f(x)$ è limitata. Le funzioni in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ sono dette **funzioni di rapida decrescita** e $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è anche detto **spazio di Schwartz**. Lo spazio \mathcal{S}_n è sottospazio denso sia di $L^1(\mathbf{R}^n)$ che di $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Proposizione 3.3 *La trasformata di Fourier è applicazione lineare di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.*

Dimostr.: Dal Teorema 3.1 segue che Ff è infinitamente derivabile. Dal Teorema 3.2 e dalla proprietà di limitatezza (3.1), essendo

$$x^\alpha (\partial^\beta Ff)(x) = x^\alpha (-i)^{|\beta|} F(x^\beta f)(x) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} F(\partial^\alpha (x^\beta f))(x),$$

segue che $x^\alpha (\partial^\beta Ff)(x)$ è limitata, $\forall \alpha, \beta$ multi-indici. **QED**

Un teorema importante per l'inversione della trasformata di Fourier è il seguente.

Teorema 3.4 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, allora*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} (Ff)(y) e^{ix \cdot y} dy. \quad (3.5)$$

Inoltre ogni funzione di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è trasformata di Fourier di una funzione di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ cioè la trasformata di Fourier come operatore su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è suriettivo. Infine, se $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ e anche $Ff \in L^1(\mathbf{R}^n)$, posto

$$f_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} (Ff)(y) e^{ix \cdot y} dy,$$

si ha che $f = f_0$ quasi ovunque, cioè tranne che su un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Da tale Teorema segue che se due funzioni f, g hanno la stessa trasformata di Fourier, allora $f = g$ quasi ovunque (proprietà di **unicità**). Da ciò segue che la trasformata di Fourier è iniettiva su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e quindi, essendo anche suriettiva, è **biiettiva** su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Un teorema di inversione della trasformata di Fourier in $L^1(\mathbf{R})$, con ipotesi meno restrittive, è il seguente.

Teorema 3.5 Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^1)$; se f è a variazione limitata in un intorno di $x \in \mathbf{R}^n$, allora è

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = (2\pi)^{-1/2} P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} (Ff)(y) e^{ixy} dy. \quad (3.6)$$

Applicheremo questo teorema per ottenere la formula di inversione della trasformata di Laplace.

Date due funzioni $f, g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$, se la funzione

$$y \mapsto f(y)g(x-y)$$

è integrabile per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}^n$, allora si definisce **prodotto di convoluzione** di f e g l'applicazione, che si indica con $f * g$, definita da

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy.$$

Evidentemente se $f * g$ esiste, allora esiste $g * f$ ed è $f * g = g * f$ cioè il prodotto di convoluzione, se esiste, gode della proprietà commutativa. Ad esempio $f * g$ esiste se $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ e g è limitata (e misurabile). Si può dimostrare (ved. Treves [30] pag. 278, 280) il seguente teorema.

Teorema 3.6 Siano p, q, r numeri reali tali che $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ ed inoltre

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Se $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbf{R}^n)$, allora $f * g \in L^r(\mathbf{R}^n)$.

Da tale teorema segue che se $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$, allora $f * g \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 3.7 Sia $f, g, Fg \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Allora

$$F(fg) = (2\pi)^{-n/2} (Ff) * (Fg); \quad (3.7)$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}g = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{Ff} Fg \quad (\text{formula di Parseval}). \quad (3.8)$$

Dimostr.: Dal Teorema 3.4 segue che $g(x)$ è quasi ovunque eguale a

$$g_0(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} (Fg)(u) e^{iy \cdot u} du.$$

Quindi si può sostituire g_0 a g sotto segno di integrale. Allora

$$F(fg)(x) = F(fg_0)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \int_{\mathbf{R}^n} (Fg)(u) e^{iy \cdot u} du e^{-ixy} dy.$$

Essendo $f, Fg \in L^1(\mathbf{R}^n)$, si può applicare il teorema di Fubini e si ha

$$\begin{aligned} F(fg)(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} (Fg)(u) \int_{\mathbf{R}^n} f(y) e^{-i(x-u) \cdot y} dy du \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} (Fg)(u) (Ff)(x-u) du \\ &= (2\pi)^{-n/2} [(Ff) * (Fg)](x) \end{aligned}$$

e quindi l'equazione (3.7) è dimostrata. Da tale equazione valutata nell'origine $x = 0$, con \bar{f} in luogo di f , semplificando il fattore $(2\pi)^{-n/2}$, si ha

$$\int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(x) g(x) dx = [(F\bar{f}) * (Fg)](0) = \int_{\mathbf{R}^n} (Fg)(u) (F\bar{f})(-u) du. \quad (3.9)$$

Ma

$$\begin{aligned} (F\bar{f})(-u) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \bar{f}(x) e^{iu \cdot x} dx \\ &= \overline{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-iu \cdot x} dx} = \overline{(Ff)(u)}. \end{aligned}$$

Da ciò e da (3.9) segue la formula di Parseval. **QED**

Si osservi che se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, essendo $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset L^2(\mathbf{R}^n)$, la formula di Parseval si scrive anche nella forma

$$(f|g) = (Ff|Fg)$$

da cui risulta che F è isometrica su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 3.8 *Se $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$, allora*

$$F(f * g) = (2\pi)^{n/2} (Ff) \cdot (Fg). \quad (3.10)$$

Dimostr.: Si dimostra facilmente facendo uso del teorema di Fubini. **QED**

Teorema 3.9 *La trasformata di Fourier F , come operatore in $L^2(\mathbf{R}^n)$, è applicazione isometrica di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Indicando ancora con F l'estensione per continuità ad $L^2(\mathbf{R}^n)$ di tale applicazione, si ha che F è **operatore unitario** su $L^2(\mathbf{R}^n)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. per ogni $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ è $(F^2 f)(x) = f(-x)$ e quindi F^4 è l'operatore identità su $L^2(\mathbf{R}^n)$;

2. lo spettro di F è costituito dai numeri $1, -i, -1, i$, cioè da $(-i)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, che sono autovalori di F ;
3. per $n = 1$ cioè in $L^2(\mathbf{R})$, l'autospazio relativo a $(-i)^k$ è quello generato dall'insieme $\{\psi_{4m+k} \mid m \in \mathbf{N}\}$, $k = 0, 1, 2, 3$, in cui, $\forall r \in \mathbf{N}$, ψ_r è la funzione di Hermite di ordine r normalizzata cioè

$$\psi_r(x) = (\sqrt{\pi} 2^r r!)^{-1/2} H_r(x) e^{-x^2/2}$$

(H_r polinomio di Hermite di grado r).

Dimostr.: Da (3.5) segue subito che su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è $f(-x) = F(Ff)(x)$ e da ciò segue la prima proprietà. Da $F^4 = id$ segue che, se λ è autovalore di F , deve essere $\lambda^4 = 1$ e quindi che i possibili autovalori sono le quattro radici quarte dell'unità $(-i)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$. Per il resto della dimostrazione ved. Dym, McKean [9]. **QED**

Osserviamo che la trasformata di Fourier di $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ si ottiene come limite in norma di Ff_m essendo f_m una successione in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ che tende, in norma, ad f .

Per approfondimenti sulla trasformata di Fourier e su altre trasformate ved. Arsac [4], Davies [7], Sneddon [26].

3.2 Applicazioni della trasformata di Fourier

-(a)- Soluzione di problemi ai limiti

La trasformata di Fourier può essere usata per la soluzione di problemi ai limiti in cui per la funzione incognita $u(x, y)$ la variabile x varia fra $-\infty$ e $+\infty$. Sia dato ad esempio il problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.11)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad (3.12)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0 \text{ per } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty, y > 0 \quad (3.13)$$

nell'ipotesi che la funzione nota f sia di classe L^1 . Trasformando secondo Fourier la (3.11), posto

$$U(p, y) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-ipx} dx,$$

deve essere

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - p^2 U = 0, \quad (3.14)$$

$$U(p, 0) = Ff(p), \quad (3.15)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} U(p, y) = 0. \quad (3.16)$$

Da (3.14) e (3.16) segue che $U(p, y) = A(p) \exp(-|p|y)$ ed allora, per (3.15) deve essere

$$U(p, y) = Ff(p)e^{-|p|y}.$$

Tenendo conto di (3.2), si ha che l'antitrasformata di Fourier di $\exp(-|p|y)$ è

$$h(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad .$$

Allora per il Teorema 3.8 si ha (per ogni y , convoluzione rispetto ad x)

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * h)(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \quad .$$

Tale risultato si può ottenere facendo uso della formula di Poisson per il semipiano.

-(b)- Operatore impulso in meccanica quantistica

Come abbiamo visto nel Capitolo sugli operatori in spazi di Hilbert, l'operatore componente k -esima componente della posizione, $k = 1, 2, 3$, è l'operatore Q_k su $L^2(\mathbf{R}^3)$ definito da

$$\mathcal{D}(Q_k) = \{\psi \in L^2(\mathbf{R}^3) \mid x_k \psi(x_1, x_2, x_3) \in L^2(\mathbf{R}^3)\},$$

$$(Q_k \psi)(x_1, x_2, x_3) = x_k \psi(x_1, x_2, x_3), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q_k).$$

Le componenti P_k , $k = 1, 2, 3$, dell'operatore impulso in meccanica quantistica sono definite da (in unità in cui $\hbar = 1$)

$$P_k = F^{-1} Q_k F$$

essendo il dominio $\mathcal{D}(P_k)$ di P_k dato da $\mathcal{D}(P_k) = F^{-1}(\mathcal{D}(Q_k))$. Il dominio di P_k contiene $\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ e su tale spazio si ha la abituale espressione di P_k data da

$$P_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Infatti, ad esempio con $k = 1$, tenendo conto del Teorema 3.2 con $\alpha = (1, 0, 0)$, si ha che se $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$, è

$$P_1 f = F^{-1}(x_1 F f(x)) = F^{-1}(-i F \frac{\partial f}{\partial x_1}) = -i \frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Analogamente per $k = 2$ e $k = 3$.

-(c)- **Teorema della campionatura**

Ricordiamo che una serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \tag{3.17}$$

si dice C_1 -convergente se, posto

$$s_n = \sum_{k=1}^n b_k, \quad M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k,$$

è convergente la successione $\{M_n\}$ delle medie aritmetiche delle somme parziali. Non è difficile dimostrare che la C_1 -convergenza è più debole della convergenza perché si verifica che se la serie in (3.17) è convergente ed ha somma s allora è anche C_1 -convergente ed è

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n.$$

Però una serie può essere C_1 -convergente ma non convergente. Infatti la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

non è convergente ma è C_1 -convergente a $-1/2$. Il concetto di C_1 -convergenza è utile nella teoria delle serie di Fourier. Infatti si dimostra il seguente teorema.

Teorema 3.10 *Sia $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{C}$ funzione continua e tale che $f(-a) = f(a)$. Allora la serie di Fourier di f è uniformemente C_1 -convergente a f .*

Tenendo conto di ciò si può dimostrare il seguente teorema (della campionatura).

Teorema 3.11 *Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ funzione continua con trasformata di Fourier a supporto compatto e sia $Ff(x) = 0$ per $|x| \geq s$. Allora f è determinata dai valori in nl con n intero ed $l \leq \pi/s$.*

Dimostr.: Per il Teorema 3.4, tenuto conto che f è continua (f coincide quindi con f_0) si ha che

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-s}^s (Ff)(y) e^{ixy} dy. \quad (3.18)$$

La funzione Ff è continua ed inoltre $Ff(s) = Ff(-s) = 0$. Per le proprietà delle serie di Fourier, la serie di Fourier di Ff

$$Ff(y) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \frac{1}{\sqrt{2s}} e^{i\pi n y/s} \quad (3.19)$$

è uniformemente C_1 -convergente. Ma, tenuto conto della (3.18), è

$$a_n = (2s)^{-1/2} \int_{-s}^s (Ff)(y) e^{-i\pi n y/s} dy = \sqrt{\pi/s} f(-\pi n/s).$$

Allora, la conoscenza di f nell'infinità numerabile $\{\pi n/s \mid n \in \mathbf{Z}\}$ di punti dà i coefficienti a_n della serie di Fourier in (3.19). Quindi, tramite la C_1 -convergenza, si ottiene Ff e da ciò, con la (3.18), si determina la f ovunque.

QED

Si osservi che il passo di campionatura nella dimostrazione è $l = \pi/s$. La tesi è vera anche con $s' > s$ in luogo di s e quindi il passo deve essere $l \leq \pi/s$, se $(-s, s)$ è il minimo intervallo al di fuori del quale Ff è nulla. Si osservi anche che esempi di funzioni con trasformata di Fourier a supporto compatto sono le trasformate di Fourier di funzioni dello spazio $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ che vedremo nel prossimo capitolo.

Diamo solo un cenno al fatto che quando è disponibile solo un numero finito di valori $f(0), f(1), \dots, f(N-1)$ si fa uso della **trasformata di Fourier discreta** definita da

$$F(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) e^{-2\pi i \tau \nu/N}. \quad (3.20)$$

Questa ha una formula di inversione data da

$$f(\tau) = \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\nu) e^{2\pi i \tau \nu/N}, \quad (3.21)$$

che si ottiene nel seguente modo. Si osservi innanzitutto che, con α intero, $0 \leq \alpha < N$, è

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha \nu/N} = N, \text{ se } \alpha = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha \nu / N} = \frac{1 - e^{(2\pi i \alpha / N)N}}{1 - e^{2\pi i \alpha / N}} = 0, \text{ se } \alpha > 0,$$

($\exp(2\pi i \alpha) = 1$). Quindi

$$\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{2\pi i \alpha \nu / N} = N \delta_{0, \alpha}.$$

Allora moltiplicando la (3.20) (scritta con τ' in luogo di τ) per $\exp(2\pi i \tau \nu / N)$ e sommando su ν da 0 a $N - 1$, invertendo l'ordine delle somme e tenendo conto che $\delta_{0, \tau - \tau'} = \delta_{\tau, \tau'}$, si ottiene la formula di inversione.

3.3 Trasformata di Laplace

Indichiamo con \mathbf{R}_+ l'insieme dei numeri reali positivi. Data $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$, si dice che f è **trasformabile secondo Laplace** se esiste $z_0 \in \mathbf{C}$ tale che $\exp(-z_0 t) f(t)$ è integrabile su \mathbf{R}_+ , cioè $\exp(-z_0 t) f(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$. In tal caso, anche $\exp(-zt) f(t)$ con $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ è integrabile su \mathbf{R}_+ dal momento che

$$|\exp(-zt) f(t)| \leq |\exp(-z_0 t) f(t)|, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+.$$

Se f è trasformabile secondo Laplace, indichiamo con A_f l'insieme (non vuoto)

$$A_f := \{\operatorname{Re} z \mid \exp(-zt) f(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)\}.$$

Per quanto detto sopra, se $x \in A_f$, allora A_f contiene ogni numero reale y tale che $y > x$, mentre, se $x \notin A_f$, allora A_f non contiene i numeri reali y tale che $y < x$. Indichiamo con α_f l'estremo inferiore degli $x \in A_f$ se tale estremo esiste e poniamo $\alpha_f = -\infty$ se A_f non è limitato inferiormente. Indichiamo con S_f l'insieme

$$S_f := \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z > \alpha_f\}.$$

Osserviamo che $S_f = \mathbf{C}$ se $\alpha_f = -\infty$.

Sia $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ trasformabile secondo Laplace. Si dice **trasformata di Laplace** della funzione f la funzione $\mathcal{L}f : S_f \rightarrow \mathbf{C}$ definita da

$$\mathcal{L}f(z) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt, \quad \forall z \in S_f.$$

Il numero reale α_f (o semplicemente α se è chiaro quale è la funzione) è detto **ascissa di assoluta convergenza** della trasformata di Laplace di

f e S_f è detto **semipiano di assoluta convergenza** della trasformata di Laplace di f . La trasformata di Laplace è lineare; precisamente la trasformata di Laplace di una combinazione lineare di funzioni trasformabili secondo Laplace è la combinazione lineare delle trasformate con ascissa di assoluta convergenza eguale alla massima delle ascisse di assoluta convergenza delle singole funzioni.

Esempio 3.2 Si può verificare che

$$\mathcal{L}(1)(z) = \frac{1}{z}, \quad \alpha = 0. \quad (3.22)$$

Se θ è la funzione di Heaviside ed $a > 0$, allora

$$\mathcal{L}(\theta(t-a))(z) = \frac{e^{-az}}{z}, \quad \alpha = 0. \quad (3.23)$$

Se $k = a + ib$

$$\mathcal{L}(e^{kt})(z) = \frac{1}{z-k}, \quad \alpha = a. \quad (3.24)$$

Da (3.24) segue che:

$$\mathcal{L}(\sin at)(z) = \frac{a}{z^2 + a^2}, \quad \alpha = 0; \quad (3.25)$$

$$\mathcal{L}(\cos at)(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}, \quad \alpha = 0; \quad (3.26)$$

$$\mathcal{L}(\sinh at)(z) = \frac{a}{z^2 - a^2}, \quad \alpha = |a|; \quad (3.27)$$

$$\mathcal{L}(\cosh at)(z) = \frac{z}{z^2 - a^2}, \quad \alpha = |a|. \quad (3.28)$$

La trasformata di Laplace è una funzione di variabile complessa che è analitica in S_f come risulta dal seguente teorema.

Teorema 3.12 Sia $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ trasformabile secondo Laplace con ascissa di assoluta convergenza α_f . La sua trasformata di Laplace $\mathcal{L}f$ è olomorfa in S_f e la sua derivata m -esima $(\mathcal{L}f)^{(m)}$ è la trasformata di Laplace, con la stessa ascissa di assoluta convergenza α_f , della funzione $(-t)^m f(t)$.

Dimostr.: Si verifica che $\mathcal{L}f$ è derivabile sotto segno di integrale rispetto ad x e rispetto ad y . Le derivate sono continue e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \mathcal{L}f}{\partial x} = -i \frac{\partial \mathcal{L}f}{\partial y}$$

per cui $\mathcal{L}f$ è olomorfa. Per derivazione sotto segno di integrale si ottiene il resto della tesi. **QED**

Teorema 3.13 Sia $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ derivabile n volte e sia $f^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n$ trasformabile secondo Laplace con ascissa di assoluta convergenza α_k . Allora, per $k = 0, 1, \dots, n-1$, esiste finito $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$ e, $\forall z$ tale che $\operatorname{Re} z > \alpha = \max\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, è

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}f(z) - z^{n-1} f(0) - z^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (3.29)$$

Dimostr.: Per $n = 1$, si verifica che $f(t) \exp(-zt) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ e $\operatorname{Re} z > \alpha$. Allora integrando per parti si ottiene la (3.29) per $n = 1$. Per induzione si ottiene poi la tesi. **QED**

Esempio 3.3 Tenendo conto del Teorema 3.13 e dei risultati (3.22), (3.24) si ha che

$$\mathcal{L}(t^n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}, \quad \alpha = 0 \quad (3.30)$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{kt})(z) = \frac{n!}{(z-k)^{n+1}}, \quad \alpha = \operatorname{Re} k \quad (3.31)$$

Dal Teorema 3.13 segue che, se f è trasformabile secondo Laplace, allora

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(x) dx\right)(z) = \frac{(\mathcal{L}f)(z)}{z} \quad (3.32)$$

con ascissa di assoluta convergenza α_f . Infatti, posto $g(x) = \int_0^x f(x) dx$, è quasi ovunque

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x) dx = g'(x) = f(x).$$

Applicando il Teorema 3.13 a $g(x)$ si ottiene

$$\mathcal{L}f(z) = z(\mathcal{L}g)(z)$$

e quindi si ha la (3.32).

La trasformata di Laplace può essere ricondotta ad una trasformata di Fourier come segue. Data $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$, indichiamo con \tilde{f} la funzione $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ che su \mathbf{R}_+ coincide con f ed è 0 su $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_+$. Allora, $\forall x > \alpha_f$, $\forall y \in \mathbf{R}$, è

$$\mathcal{L}f(x + iy) = F(\sqrt{2\pi} \tilde{f}(t) e^{-xt})(y), \quad (3.33)$$

cioè, $\forall x > \alpha_f$, il valore in $z = x + iy$ di $\mathcal{L}f$ è il valore in y della trasformata di Fourier di $\sqrt{2\pi} \tilde{f}(t) e^{-xt}$. Da ciò e dalla proprietà di unicità della trasformata di Fourier segue che se due funzioni f, g hanno la stessa trasformata di Laplace, allora $f = g$ quasi ovunque. Inoltre si può dimostrare il seguente teorema di inversione.

Teorema 3.14 Sia $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ trasformabile secondo Laplace con ascissa di assoluta convergenza α_f . Allora, se f è a variazione limitata in un intorno di $t > 0$, è

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = \frac{1}{2\pi i} P.V. \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} (\mathcal{L}f)(z) e^{zt} dz, \quad x > \alpha_f. \quad (3.34)$$

Sia poi γ_n , $n = 1, 2, \dots$, una successione di Jordan di archi di circonferenza, a sinistra della retta $z = x$ in \mathbf{C} , con centro nell'origine non passanti per eventuali singolarità di $\mathcal{L}f$. Se $|\mathcal{L}f(z)| \leq M_n$ su γ_n e $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$, allora, per $t > 0$, è

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n, \quad (3.35)$$

in cui R_n è la somma dei residui della funzione $\mathcal{L}f(z) \exp(zt)$ nelle singolarità di $\mathcal{L}f$ comprese fra γ_n e γ_{n+1} .

Dimostr.: Tenuto conto di (3.33) e del Teorema 3.5, si ha che nelle ipotesi fatte è

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\beta_k} (\mathcal{L}f)(z) e^{zt} dz, \quad x > \alpha_f. \quad (3.36)$$

essendo β_k il segmento parallelo all'asse immaginario $[x-ik, x+ik]$. Si ottiene quindi la (3.34). Indichiamo con Γ_n il cammino chiuso ottenuto chiudendo γ_n con un cammino rettilineo λ_n del tipo β_k . Posto $z = iw$, nel piano w i cammini sono ruotati di $-\pi/2$ ed indichiamo con γ'_n il cammino nel piano w corrispondente a γ_n . Nelle ipotesi fatte, applicando il lemma di Jordan agli integrali nel piano w , si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_n} (\mathcal{L}f)(z) e^{zt} dz = \lim_{n \rightarrow +\infty} i \int_{\gamma'_n} (\mathcal{L}f)(iw) e^{itw} dw = 0. \quad (3.37)$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\lambda_n} (\mathcal{L}f)(z) e^{zt} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_n} (\mathcal{L}f)(z) e^{zt} dz, \quad x > \alpha_f \end{aligned}$$

e si ottiene la tesi applicando il teorema dei residui. **QED**

Date $f, g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$, il prodotto di convoluzione $f * g$ di f e g è definito da

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y) g(x-y) dy,$$

$\forall x \in \mathbf{R}_+$. Tenendo conto del Teorema 3.8 si ottiene il seguente analogo teorema di convoluzione per la trasformata di Laplace.

Teorema 3.15 *Siano f, g trasformabili secondo Laplace e sia $\alpha = \max\{\alpha_f, \alpha_g\}$. Allora, se $\operatorname{Re} z > \alpha$, è*

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}f(z) \cdot \mathcal{L}g(z) . \quad (3.38)$$

3.4 Applicazioni della trasformata di Laplace

-(a) Soluzione di problemi di Cauchy

Dato il problema di Cauchy

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1$$

in cui a_0, a_1, a_2 sono costanti note e f è assegnata, si procede trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale. Posto $X = \mathcal{L}x$ e $F = \mathcal{L}f$, dal Teorema 3.13 si ha

$$(a_0 z^2 + a_1 z + a_2)X(z) - a_0(x_0 z + x_1) - a_1 x_0 = F(z)$$

da cui

$$X(z) = \frac{F(z) + a_0 x_0 z + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Quindi $X(z)$ è funzione nota. Antitrasformando si ottiene la soluzione.

Esempio 3.4 *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 1 + \cos 2t$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Trasformando secondo Laplace si ottiene

$$(z^2 - 3z + 2)X(z) = \frac{1}{z} + \frac{z}{z^2 + 4}$$

da cui

$$X(z) = \frac{2z^2 + 4}{z(z-1)(z-2)(z^2+4)}.$$

Tenuto conto che

$$\operatorname{Res}_0 X(z)e^{zt} = 1/2, \quad \operatorname{Res}_1 X(z)e^{zt} = -\frac{6}{5}e^t, \quad \operatorname{Res}_2 X(z)e^{zt} = \frac{3}{4}e^{2t},$$

$$\operatorname{Res}_{2i} X(z)e^{zt} = -\frac{1-3i}{40}e^{2it}, \quad \operatorname{Res}_{-2i} X(z)e^{zt} = -\frac{1+3i}{40}e^{-2it},$$

si ottiene la soluzione

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{6}{5}e^t + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{3}{20}\sin 2t.$$

A volte può essere più semplice non trasformare la funzione nota f ed applicare il teorema di convoluzione come nel seguente esempio.

Esempio 3.5 Consideriamo il problema di Cauchy

$$x''(t) - x'(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Trasformando secondo Laplace, indicando con $F(z)$ la trasformata di Laplace di $f(t) = 1/(1+\exp(t))$ si ottiene

$$X(z) = \frac{F(z)}{z(z-1)}.$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1},$$

si ha che $1/(z(z-1))$ è trasformata di Laplace di $g(t) = \exp(t) - 1$. Allora, per il teorema di convoluzione,

$$x(t) = \int_0^t f(\theta)g(t-\theta)d\theta = \int_0^t \frac{e^{t-\theta} - 1}{1+e^\theta}d\theta$$

e facendo l'integrale si ottiene la soluzione

$$x(t) = -1 + e^t - (1+e^t)(t+\ln 2) + (1+e^t)\ln(1+e^t).$$

-(b) Soluzione di sistemi di equazioni integrali

Data l'equazione di Volterra del tipo di convoluzione

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-u)x(u)du$$

in cui f ed il nucleo k sono funzioni note, si procede trasformando secondo Laplace l'equazione integrale. Posto $X = \mathcal{L}x$, $F = \mathcal{L}f$ e $K = \mathcal{L}k$, facendo uso del teorema di convoluzione, si ha

$$X(z) = \frac{F(z)}{1 - K(z)}.$$

Quindi $X(z)$ è funzione nota. Antitrasformando si ottiene la soluzione.

Esempio 3.6 *Consideriamo l'equazione di Volterra del tipo di convoluzione*

$$x(t) = \cosh t + \int_0^t x(u) du.$$

Trasformando secondo Laplace si ottiene ($k(t) = 1$)

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)}.$$

Tenuto conto che

$$Res_1 X(z)e^{zt} = \frac{3+2t}{4}e^t, \quad Res_{-1} X(z)e^{zt} = \frac{1}{4}e^{-t},$$

si ottiene la soluzione

$$x(t) = \frac{3+2t}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

In modo analogo si procede per la soluzione di sistemi di equazioni integrali di Volterra del tipo di convoluzione.

-(c) Soluzione di problemi ai limiti

La trasformata di Laplace può essere applicata alla soluzione di problemi ai limiti di conduzione termica, delle corde vibranti e per altri problemi più generali. In ogni caso si procede trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale e le condizioni ai limiti e determinando la trasformata di Laplace della funzione incognita. La soluzione del problema si ottiene antitrasformando tale trasformata di Laplace. Vediamo un esempio.

Esempio 3.7 *Supponiamo di avere il seguente problema di conduzione termica unidimensionale in un semispazio:*

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x > 0,$$

$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0, \quad \forall t > 0.$$

Trasformiamo secondo Laplace rispetto alla variabile t , ponendo $U = \mathcal{L}u$ e $F = \mathcal{L}f$. Si ottiene

$$k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, z) = zU(x, z),$$

$$U(0, z) = F(z), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x, z) = 0.$$

Da ciò segue che

$$U(x, z) = F(z)e^{-x\sqrt{z/k}}.$$

Ma si può dimostrare che

$$\mathcal{L}(t^{-3/2}e^{-c/t})(z) = \sqrt{\pi/c}e^{-2\sqrt{cz}}, \quad \alpha = 0$$

e quindi ($c = x^2/(4k)$)

$$\mathcal{L}\left(\frac{x}{2\sqrt{\pi k}}t^{-3/2}e^{-x^2/(4kt)}\right)(z) = e^{-x\sqrt{z/k}}.$$

Applicando il teorema di convoluzione si ottiene quindi

$$u(x, t) = f(t) * \left(\frac{x}{2\sqrt{\pi k}}t^{-3/2}e^{-x^2/(4kt)}\right)$$

cioè

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t f(u)(t-u)^{-3/2}e^{-x^2/(4k(t-u))}du.$$

Capitolo 4

Distribuzioni

Una distribuzione o funzione generalizzata è un funzionale lineare e continuo su uno spazio vettoriale topologico di funzioni test. Tale nozione permette in fisica di trattare in modo matematicamente preciso le “densità” concentrate in punti. In matematica la teoria delle distribuzioni ha applicazione alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

Nella Sezione 1 viene introdotta la nozione di spazio vettoriale topologico (abbreviato SVT) e sono indicati gli SVT importanti per la teoria delle distribuzioni. Queste vengono definite nella Sezione 2, mentre nella Sezione 3 sono descritte le operazioni più importanti sulle distribuzioni. Per le distribuzioni temperate un'altra operazione importante è la trasformata di Fourier che viene studiata nella Sezione 4. Infine nella Sezione 5 viene considerata l'applicazione alle equazioni differenziali alle derivate parziali con soluzioni fondamentali e funzioni di Green.

In tutto il capitolo gli spazi vettoriali sono complessi.

4.1 Spazi vettoriali topologici

Uno **spazio vettoriale topologico** (abbreviato SVT) è uno spazio vettoriale X con una topologia su X tale che le operazioni di somma fra vettori

$$+ : X \times X \rightarrow X \text{ tale che } (x, y) \mapsto x + y$$

e di prodotto per numeri complessi

$$\cdot : \mathbf{C} \times X \rightarrow X \text{ tale che } (c, x) \mapsto cx$$

sono continue, essendo inteso che su $X \times X$ e $\mathbf{C} \times X$ ci sono le topologie prodotto. Uno SVT si dice **localmente convesso** se, $\forall x \in X$, ogni intorno

di x contiene un intorno convesso. Si dice **spazio di Fréchet** uno SVT localmente convesso, metrizzabile e completo.

Esempio 4.1 Sia (X, p) uno spazio normato. Verifichiamo che (X, p) è SVT localmente convesso. Come di consueto indichiamo $p(x)$ con $\|x\|$. Indichiamo con $B_p(x, r)$, o semplicemente con $B(x, r)$, l'insieme

$$B(x, r) := \{y \in X \mid \|y - x\| < r\},$$

che è detto **sfera aperta** con centro in $x \in X$ e raggio r . Per definizione di topologia indotta dalla metrica $d(x, y) = \|y - x\|$, un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se, $\forall x \in A$, esiste r reale positivo tale che $B(x, r) \subset A$. Verifichiamo che l'operazione di somma è continua. $\forall x_0, y_0 \in X$, $\forall B(x_0 + y_0, r)$, basta prendere $B(x_0, r/2)$, $B(y_0, r/2)$ intorno rispettivamente di x_0 e y_0 perché allora è

$$\|x + y - x_0 - y_0\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < r,$$

$\forall x \in B(x_0, r/2)$, $\forall y \in B(y_0, r/2)$. Ciò indica che

$$B(x_0, r/2) + B(y_0, r/2) \subset B(x_0 + y_0, r)$$

e quindi l'operazione somma è continua. In modo analogo si verifica che l'operazione di prodotto per numeri complessi è continua. Infine ogni sfera aperta è sottoinsieme convesso di X e quindi ogni spazio normato è SVT localmente convesso metrizzabile. Uno spazio di Banach (spazio vettoriale normato completo) è quindi uno spazio di Fréchet. Evidentemente anche ogni spazio seminormato è SVT localmente convesso (però non di Hausdorff).

Esempio 4.2 L'esempio precedente può essere generalizzato nel seguente modo. Sia X spazio vettoriale e sia $\{p_j\}_{j \in I}$ una famiglia di norme su X . Scriviamo $B_{j_k}(x, r)$ invece di $B_{p_{j_k}}(x, r)$ e $\|y - x\|_j$ invece di $p_j(y - x)$. Definiamo aperto un sottoinsieme A di X se, $\forall x \in A$, esistono $j_1, \dots, j_n \in I$ e r_1, \dots, r_n reali positivi tali che

$$\bigcap_{k=1}^n B_{j_k}(x, r_k) \subset A.$$

È facile rendersi conto che in questo modo abbiamo una topologia su X . In modo analogo a quanto visto nell'esempio precedente si verifica che, con tale topologia, X è SVT localmente convesso. Ciò è vero anche se la famiglia $\{p_j\}_{j \in I}$ è una famiglia di seminorme però non sarà spazio di Hausdorff in generale. Lo sarà se la famiglia è **separante** cioè se, $\forall x, y \in X$, con $x \neq y$, esiste $j \in I$ tale che $\|y - x\|_j \neq 0$.

L'esempio ora considerato è molto importante perché gli SVT di tale tipo sono i più generali SVT localmente convessi. Ciò risulta dal seguente teorema.

Teorema 4.1 *Sia X SVT localmente convesso; allora*

1. *esiste una famiglia di seminorme \mathcal{P} che ne genera la topologia;*
2. *X è spazio di Hausdorff se e solo se \mathcal{P} è separante;*
3. *X è pseudometrizzabile (risp. metrizzabile) se e solo se esiste una famiglia numerabile (risp. numerabile e separante) di seminorme che ne genera la topologia.*

Dimostr.: Ved. [R] pag. 24-28.

QED

Due importanti esempi di SVT localmente convessi sono gli spazi $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ che ora descriviamo.

Esempio 4.3 *Indichiamo con $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle funzioni da \mathbf{R}^n in \mathbf{C} che sono infinitamente derivabili. Una $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ si dice **funzione di rapida decrescita** se, $\forall m, r \in \mathbf{N}$,*

$$\|f\|_{m,r} := \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbf{R}^n} (1 + |x|^2)^r |\partial^\alpha f(x)| < +\infty,$$

essendo $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Le funzioni di rapida decrescita sono uno spazio vettoriale e $\|\cdot\|_{m,r}$ è norma su tale spazio, $\forall m, r \in \mathbf{N}$. Indichiamo con $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ lo SVT localmente convesso ottenuto munendo lo spazio delle funzioni di rapida decrescita della topologia generata dalla famiglia di norme $\{\|\cdot\|_{m,r}\}_{m,r \in \mathbf{N}}$. Tale famiglia è numerabile e separante e quindi $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è metrizzabile. Si può dimostrare che $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è completo e quindi è spazio di Fréchet. Si può dimostrare che una successione $\{\phi_k\}$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ converge a 0 nella topologia di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se e solo se, $\forall r \in \mathbf{N}$, $\forall \alpha$ multi-indice, la successione $\{(1 + |x|^2)^r \partial^\alpha \phi_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge a zero uniformemente in \mathbf{R}^n . Quando non c'è possibilità di equivoco o non è necessario specificare lo spazio \mathbf{R}^n in considerazione scriviamo anche semplicemente \mathcal{S} in luogo di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Esempio 4.4 *Sia K compatto di \mathbf{R}^n . Data $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ definiamo, $\forall m \in \mathbf{N}$,*

$$\|f\|_{m,K} := \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|.$$

$\|\cdot\|_{m,K}$, $\forall m, r \in \mathbf{N}$, è norma sullo spazio delle funzioni in $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ che hanno supporto contenuto in K . Indichiamo con $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ lo SVT localmente

convesso ottenuto munendo tale spazio di funzioni della topologia generata dalla famiglia di norme $\{\|\cdot\|_{m,K}\}_{m \in \mathbf{N}}$. Tale famiglia è numerabile e separante e quindi $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ è metrizzabile. Si può dimostrare che $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ è completo e quindi è spazio di Fréchet. Si può dimostrare che una successione $\{\phi_k\}$ in $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ converge a 0 nella topologia di $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ se e solo se, $\forall \alpha$ multi-indice, la successione $\{\partial^\alpha \phi_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge a zero uniformemente su K .

Esempio 4.5 Indichiamo con $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ il sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ costituito dalle funzioni infinitamente derivabili ed a supporto compatto. Si osservi che ogni spazio $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ è sottospazio di $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Si può dare a $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ una topologia massima tale che la sua relativizzazione a $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ è più debole della topologia di $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ cioè tale che l'iniezione naturale di $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$ in $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ è continua ed inoltre tale che con tale topologia $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ è SVT localmente convesso. Indichiamo con $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ tale SVT. La sua topologia è caratterizzata dalla seguente proprietà. Una successione $\{\phi_k\}$ in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ converge a 0 nella topologia di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ se e solo se, esiste un compatto K tale che le funzioni della successione hanno tutte supporto in K ed inoltre la successione $\{\phi_k\}$ converge a zero in $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$. Si dice che $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ è limite induttivo stretto degli spazi $\mathcal{D}_K(\mathbf{R}^n)$. Si può dimostrare che $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ è completo ma non è metrizzabile. Quando non c'è possibilità di equivoco o non è necessario specificare lo spazio \mathbf{R}^n in considerazione scriviamo anche semplicemente \mathcal{D} in luogo di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Osserviamo che si possono definire in modo completamente analogo gli spazi $\mathcal{D}(\Omega)$ (risp. $\mathcal{S}(\Omega)$) delle funzioni infinitamente derivabili ed a supporto compatto (risp. di rapida decrescita) su di un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Del tutto analoga è la teoria delle distribuzioni relativa a tali spazi.

4.2 Distribuzioni e distribuzioni temperate

Dato uno SVT X , un **funzionale** su X è una applicazione di X in \mathbf{C} . Indichiamo con X' lo spazio vettoriale dei funzionali *lineari* e *continui* su X , che è detto **duale** di X . Una **distribuzione** (risp. **distribuzione temperata**) su \mathbf{R}^n è un elemento del duale $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (risp. $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$). Le distribuzioni sono dette anche **funzioni generalizzate**. Le funzioni di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (risp. di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$) sono anche dette **funzioni test** per le distribuzioni (risp. per le distribuzioni temperate). Si osservi che $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Si può verificare che l'applicazione naturale $j : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ è continua. Questo significa che la topologia di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

è più forte della relativizzazione a $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ della topologia di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Per tale motivo ogni funzionale lineare e continuo T su $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dà un funzionale lineare e continuo, $T \circ j$, su $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ che si indica ancora con T . Anzi si dimostra (ved. [24] pag. 173 e 174 o [5] pag.49) che $j(\mathcal{D})$ è denso in \mathcal{S} e che \mathcal{S}' si identifica con il sottospazio di \mathcal{D}' delle distribuzioni che hanno estensione continua ad \mathcal{S} . Quando non c'è possibilità di equivoco o non è necessario specificare lo spazio \mathbf{R}^n in considerazione scriveremo anche semplicemente \mathcal{D}' in luogo di $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ e \mathcal{S}' in luogo di $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Se T è distribuzione o distribuzione temperata e ϕ è funzione test, indicheremo con

$$(T, \phi) \quad \text{o anche} \quad T(\phi)$$

il numero complesso che T associa a ϕ .

Dato un funzionale T su \mathcal{D} (risp. su \mathcal{S}) è in genere facile verificare se T è lineare. Per verificarne la continuità, e quindi che T è distribuzione (risp. distribuzione temperata), è utile la seguente proposizione.

Proposizione 4.2 *Sia T funzionale lineare su \mathcal{D} (risp. su \mathcal{S}). T è continuo se e solo se $\forall \{\phi_k\}$ successione in \mathcal{D} (risp. in \mathcal{S}) convergente a 0 in \mathcal{D} (risp. in \mathcal{S}), allora*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (T, \phi_k) = 0,$$

cioè T è sequenzialmente continua in 0.

Dimostr.: Se T è distribuzione temperata la tesi segue dal fatto che la topologia di \mathcal{S} è metrizzabile. Se T è distribuzione la tesi segue dal fatto che la topologia di \mathcal{D} è limite induttivo stretto di topologie metrizzabili. **QED**

Esempio 4.6 *Indichiamo con $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni da \mathbf{R}^n in \mathbf{C} che sono localmente integrabili in \mathbf{R}^n rispetto alla misura di Lebesgue su \mathbf{R}^n cioè che sono integrabili su ogni compatto. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ indichiamo con T_f il funzionale lineare su $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ definito da*

$$T_f : \phi \mapsto \int f \phi dx. \quad (4.1)$$

Dalla Proposizione 2 segue che T_f è continuo ed è quindi una distribuzione che si indica spesso semplicemente con f e si dice anche distribuzione associata alla funzione f . Se per $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ tale che $T = T_f$, si dice che T è una funzione o che è una distribuzione regolare. Evidentemente se $T = T_f$ è anche $T = T_g$, $\forall g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ funzione quasi ovunque eguale (rispetto alla misura di Lebesgue) su \mathbf{R}^n ad f .

La stessa definizione (4.1) vale per distribuzione temperata regolare ma in tal caso è necessaria una condizione più stringente su f affinché $f\phi$ sia integrabile $\forall \phi \in \mathcal{S}$. Ad esempio T_f è distribuzione temperata regolare se f soddisfa la seguente condizione:

(i) $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ ed esiste un intero positivo s tale che

$$\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^s} \in L^1(\mathbf{R}^n).$$

Infatti se f soddisfa tale condizione, $f\phi$ è integrabile $\forall \phi \in \mathcal{S}$ e si può verificare che T_f definita da (4.1) è (lineare e) continua e quindi è distribuzione temperata. Una distribuzione regolare che non è distribuzione temperata regolare è $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ con $f(x) = e^x$.

Una distribuzione che non è regolare è detta **singolare**.

Esempio 4.7 Indichiamo con δ il funzionale lineare su $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ definito da

$$(\delta, \phi) = \phi(0).$$

È facile verificare che δ è continuo ed è quindi una distribuzione che è detta **distribuzione di Dirac in \mathbf{R}^n** . La δ di Dirac è distribuzione singolare. Infatti, se fosse regolare e quindi $\delta = T_f$, poiché $(\delta, |x|^2\phi) = 0, \forall \phi$, si avrebbe

$$0 = (\delta, |x|^2\phi) = (T_f, |x|^2\phi) = \int_{\mathbf{R}^n} f|x|^2\phi dx,$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}$. Ma allora $f|x|^2 = 0$ quasi ovunque e quindi $f = 0$ quasi ovunque. Da ciò segue $T_f = 0$ e quindi si cade in assurdo perché $T_f = \delta \neq 0$.

Diciamo che due distribuzioni $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ sono **eguali su un aperto $U \subset \mathbf{R}^n$** se $(S, \phi) = (T, \phi)$, $\forall \phi$ con supporto in U . Diciamo **supporto** di una distribuzione T il complemento del massimo aperto sul quale T è eguale alla distribuzione nulla. Indichiamo con $\text{supp } T$ il supporto di T . Quindi $\text{supp } T$ è il più piccolo chiuso al di fuori del quale la distribuzione T è nulla. Ad esempio, $\text{supp } \delta = \{0\}$. Si osservi che $(T, \phi) = 0$ se $\text{supp } T \cap \text{supp } \phi = \emptyset$.

4.3 Operazioni sulle distribuzioni

Siano X e Y SVT e sia $f : X \rightarrow Y$ lineare e continua. La **trasposta** di f è l'applicazione

$${}^t f : Y' \rightarrow X' \quad \text{tale che} \quad {}^t f(T) = T \circ f.$$

Molte operazioni sulle distribuzioni sono collegate alla trasposta (come l'operazione di derivazione) o sono proprio la trasposta (come la moltiplicazione per una funzione e la trasformata di Fourier) di operazioni sullo spazio delle funzioni test. *Non si può definire il prodotto di distribuzioni* (ved. Vladimirov p. 29 e Szmydt p. 65).

(1) - **Moltiplicazione per una funzione.** Sia $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Evidentemente $f\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Si può poi verificare che l'applicazione

$$m_f : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \text{ tale che } \phi \mapsto f\phi$$

è lineare e continua. Ciò permette di definire la moltiplicazione di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ per f come la distribuzione fT data da

$$(fT, \phi) = (T, f\phi).$$

Infatti $fT = T \circ m_f$ e quindi fT è lineare e continua essendo composizione delle applicazioni T e m_f che sono lineari e continue. La stessa definizione vale se T è distribuzione temperata, però in tal caso f deve essere di **lenta crescita all'infinito** cioè tale che $\forall \alpha$ esistono m_α e C_α tali che

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C_\alpha(1 + |x|^2)^{m_\alpha},$$

$\forall x \in \mathbf{R}^n$. Infatti, se tale condizione è soddisfatta, $f\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ e quindi ha senso $(T, f\phi)$. Si osservi che se T è distribuzione regolare ed è $T = T_g$ allora $fT_g = T_{fg}$.

(2) - **Cambiamento di variabile.** Sia $\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ diffeomorfismo di classe C^∞ . Allora, con il cambiamento di variabile $y = \Phi^{-1}(x)$, essendo $x = \Phi(y)$ ed indicando con $|J(\Phi)|$ il valore assoluto dello Jacobiano $J(\Phi)$ di x rispetto ad y , si ottiene

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\Phi^{-1}(x))\phi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\phi(\Phi(y))|J(\Phi)|dy.$$

Ciò suggerisce la definizione

$$(T_{f(\Phi^{-1}(x))}, \phi) = (T_f, (\phi \circ \Phi)|J(\Phi)|)$$

per il “cambiamento di variabile” nel caso di una distribuzione regolare. In effetti, si può verificare che l'applicazione

$$c_\Phi : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \text{ tale che } \phi \mapsto (\phi \circ \Phi)|J(\Phi)|$$

è lineare e continua. Ciò permette di definire la distribuzione $T(\Phi^{-1}(x))$ come la distribuzione data da

$$(T(\Phi^{-1}(x)), \phi) = (T, (\phi \circ \Phi)|J(\Phi)|).$$

Si dice che T è **invariante** per Φ se $T(\Phi^{-1}(x)) = T$. Se T è distribuzione temperata, si può dare la stessa definizione ma in tal caso le Φ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ di $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ devono essere di lenta crescita. Si osservi che, con tale definizione, se T è distribuzione regolare ed è $T = T_f$ allora $T_f(\Phi^{-1}(x)) = T_{f(\Phi^{-1}(x))}$.

Casi particolari:

1. $T(x-a)$ definita da $(T(x-a), \phi) = (T, \phi(x+a))$. Con $T = \delta$ si ottiene $(\delta(x-a), \phi) = \phi(a)$.
2. Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$ con $a_k \neq 0$, $\forall k = 1, \dots, n$. Allora la distribuzione $T(a_1x_1, \dots, a_nx_n)$ è definita da

$$(T(a_1x_1, \dots, a_nx_n), \phi) = |a_1a_2 \cdots a_n|^{-1}(T, \phi(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)).$$

Con $T = \delta$, in dimensione 1, si ottiene $\delta(ax) = |a|^{-1}\delta$.

Le formule sopra per la δ si generalizzano nel seguente modo. Se f , funzione reale di una variabile reale, è derivabile e con zeri solo del primo ordine nei punti (in numero finito) x_1, \dots, x_n , allora

$$\delta(f(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|f'(x_k)|} \delta(x - x_k). \quad (4.2)$$

(3) - **Derivata di una distribuzione.** Si può verificare che

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \text{ tale che } \phi \mapsto \partial^\alpha \phi$$

è lineare e continua, qualunque sia il multi-indice α . Ciò permette di definire la derivata di ordine α di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ come la distribuzione $\partial^\alpha T$ data da

$$(\partial^\alpha T, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \partial^\alpha \phi).$$

La ragione del fattore $(-1)^{|\alpha|}$ è dovuta al seguente fatto. Per $T = T_f$, con f di classe C^∞ , con tale definizione integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha T_f, \phi) &= (-1)^{|\alpha|} (T_f, \partial^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \int f(\partial^\alpha \phi) dx \\ &= \int (\partial^\alpha f) \phi dx = (T_{\partial^\alpha f}, \phi) \end{aligned}$$

e quindi (per f di classe C^∞)

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f} \quad (4.3)$$

cioè la derivata della distribuzione regolare associata ad una funzione è eguale alla distribuzione (regolare) associata alla derivata di tale funzione.

Esempio 4.8 Indichiamo con θ la funzione di Heaviside definita, quasi ovunque in \mathbf{R} da

$$\theta(x) = 1, \text{ per } x > 0, \quad \theta(x) = 0, \text{ per } x < 0.$$

Calcoliamo la derivata T'_θ della distribuzione temperata associata a θ che indicheremo semplicemente con θ' . Per definizione di derivata di una distribuzione è

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int_0^{+\infty} \phi' dx = \phi(0) = (\delta, \phi),$$

$\forall \phi \in \mathcal{S}$. Quindi

$$\theta' = \delta. \quad (4.4)$$

Analogamente, più in generale, si verifica che, se $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^1)$ è continua e derivabile salvo un numero finito di punti x_1, \dots, x_n e, $\forall k = 1, 2, \dots, n$, il salto in x_k è $s_k := f(x_k+) - f(x_k-)$, allora

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^n s_k \delta(x - x_k), \quad (4.5)$$

in cui $T_{f'}$ indica la distribuzione regolare associata alla funzione eguale ad f' tranne che nei punti x_1, \dots, x_n .

Esempio 4.9 Indichiamo con $Pv \frac{1}{x}$ la distribuzione temperata su \mathbf{R} definita da

$$(Pv \frac{1}{x}, \phi) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right], \quad (4.6)$$

$\forall \phi \in \mathcal{S}$. Calcoliamo la derivata della distribuzione temperata $\ln|x|$. Per definizione di derivata di una distribuzione è

$$\begin{aligned} ((\ln|x|)', \phi) &= -(\ln|x|, \phi') \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \ln|x| \phi'(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \ln|x| \phi'(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx + (\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)) \ln \epsilon \right] \\ &= (Pv \frac{1}{x}, \phi), \end{aligned}$$

essendo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} (\phi(\epsilon) - \phi(-\epsilon)) \ln \epsilon = 0$. Quindi

$$(\ln|x|)' = Pv \frac{1}{x}. \quad (4.7)$$

(4) - **Distribuzioni dipendenti da un parametro.** Sia T_y distribuzione dipendente da un parametro y che varia su un insieme I del quale y_0 è punto di accumulazione. Diciamo che **esiste il limite** di T_y per $y \rightarrow y_0$ se esiste

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

In tale caso, si può dimostrare (ved. [6] pag. 38 o [29] Th. 3 pag. 38) che il funzionale $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{C}$ definito da

$$T : \phi \mapsto \lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \phi)$$

è lineare e continuo ed è quindi una distribuzione, che si dice **limite** di T_y per $y \rightarrow y_0$, e si scrive

$$T := \lim_{y \rightarrow y_0} T_y.$$

Diciamo che T_y tende alla distribuzione S per $y \rightarrow y_0$ se esiste il limite di T_y per $y \rightarrow y_0$ ed è

$$\lim_{y \rightarrow y_0} T_y = S,$$

cioè se

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \phi) = (S, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Una definizione del tutto analoga vale per una successione di distribuzioni; tale caso corrisponde al caso in cui $I = \mathbf{N}$ e $y_0 = +\infty$. A volte si scrive $T(x, y)$ in luogo di T_y , essendo x la variabile delle funzioni test. Analoga definizione vale per distribuzioni temperate; l'unica differenza è che c'è \mathcal{S} in luogo di \mathcal{D} . Un caso particolare è descritto nella seguente proposizione.

Proposizione 4.3 *Sia $f(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in I$, tale che $f(\cdot, y) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$, qualunque sia $y \in I$ e sia y_0 punto di accumulazione di I . Sia*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = g(x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n) \quad (4.8)$$

e sia $|f(x, y)| \leq h(x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $\forall y \in I$. Allora la (4.8) è vera nel senso delle distribuzioni cioè

$$\lim_{y \rightarrow y_0} T_f = T_g.$$

Dimostr.: Basta osservare che, $\forall \phi \in \mathcal{D}$, è

$$|f(x, y)\phi(x)| \leq h(x)|\phi(x)| \in L^1(\mathbf{R}^n)$$

ed applicare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Si ottiene

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_f, \phi) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int f \phi dx = \int g \phi dx = (T_g, \phi)$$

e da ciò segue la tesi. **QED**

Una proposizione del tutto analoga vale per distribuzioni temperate però con $f(\cdot, y)$, g e h che soddisfano la condizione (i) dell'Esempio 6.6.

È facile verificare la tesi della seguente proposizione.

Proposizione 4.4 *Se $\lim_{y \rightarrow y_0} T_y = S$, allora, $\forall \alpha$ multi-indice,*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \partial^\alpha T_y = \partial^\alpha S.$$

Dimostr.: Tenendo conto delle definizioni di limite e derivata si ha

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow y_0} (\partial^\alpha T_y, \phi) &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \partial^\alpha \phi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (S, \partial^\alpha \phi) = (\partial^\alpha S, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

e si ottiene la tesi. **QED**

Esempio 4.10 *Indichiamo con $\ln(x + iy)$ la distribuzione regolare, dipendente dal parametro y , associata alla funzione $\ln(x + iy)$ (intesa come ramo principale con taglio secondo l'asse reale negativo). Evidentemente, per la funzione $\ln(x + iy)$ (ramo principale con taglio secondo l'asse reale negativo) è*

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \ln(x + iy) = \ln|x| + i\pi\theta(-x), \quad (4.9)$$

quasi ovunque su \mathbf{R} (tranne che in $x = 0$). Per la Proposizione 3 la (4.9) è vera anche nel senso delle distribuzioni, cioè, nel senso delle distribuzioni, è

$$\ln(x + i0) := \lim_{y \rightarrow 0+} \ln(x + iy) = \ln|x| + i\pi\theta(-x). \quad (4.10)$$

Derivando la (4.9), tenuto conto della Proposizione 4.4, di (4.4) e di (4.7), si ottiene

$$\frac{1}{x + i0} := \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{x + iy} = Pv \frac{1}{x} - i\pi\delta. \quad (4.11)$$

Analogamente, nel senso delle distribuzioni, è (taglio come sopra)

$$\ln(x - i0) := \lim_{y \rightarrow 0+} \ln(x - iy) = \ln|x| - i\pi\theta(-x). \quad (4.12)$$

e derivando si ottiene

$$\frac{1}{x - i0} := \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{x - iy} = Pv \frac{1}{x} + i\pi\delta. \quad (4.13)$$

Proposizione 4.5 Sia $f \in L^1(\mathbf{R})$ tale che $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = 1$. Allora è

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \nu f(\nu x).$$

Dimostr.: Sia F_ν la funzione su \mathbf{R} definita da

$$F_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \nu f(\nu y) dy.$$

F_ν è assolutamente continua ed è quasi ovunque

$$(F_\nu)'(x) = \nu f(\nu x). \quad (4.14)$$

Usando la definizione di derivata di una distribuzione, integrando per parti, è facile rendersi conto che tale relazione vale anche nel senso delle distribuzioni. D'altra parte, ponendo $\nu y = u$, si ha

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} F_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\nu x} f(u) du.$$

Da ciò segue che il limite è 0 se $x < 0$ ed è 1 se $x > 0$ per cui,

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} F_\nu(x) = \theta(x). \quad (4.15)$$

Si osservi che $|F_\nu(x)\phi(x)| \leq \|f\| |\phi(x)|$, con $\|f\| = \int_{\mathbf{R}} |f| dx$. Tenendo conto di ciò si può passare al limite sotto segno di integrale e si verifica che la (4.15) è vera nel senso delle distribuzioni. Ma allora, per la Proposizione 4.4, tenuto conto che la derivata della θ è la δ , si ottiene la tesi. **QED**

Da questa proposizione, con f eguale a $1/\sqrt{\pi} e^{-x^2}$ si ottiene

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\sqrt{\pi}} e^{-\nu^2 x^2}.$$

Con f eguale a $1/2 e^{-|x|}$ si ottiene

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{2} e^{-\nu|x|}.$$

Con f eguale a $1/(\pi(1+x^2))$ si ottiene

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{\pi(1+\nu^2 x^2)}.$$

Se $h_{[a,b]}$ indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[a, b]$, con f eguale a $1/2 h_{[-1,1]}$ si ottiene

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{2} h_{[-1/\nu, 1/\nu]}.$$

Infine, con f data da $\sin x/(\pi x)$, si ottiene

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\sin \nu x}{\pi x}.$$

Poiché

$$\frac{\sin \nu x}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \int_0^\nu \cos tx dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^\nu e^{itx} dt,$$

si scrive anche

$$\delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\nu \cos tx dt, \quad \text{e} \quad \delta = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^\nu e^{itx} dt$$

e quindi anche

$$\delta = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos tx dt, \quad \text{e} \quad \delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dt. \quad (4.16)$$

La seconda di queste relazioni può anche essere verificata direttamente come segue. Applicando il teorema di Fubini per l'inversione dell'ordine delle integrazioni e tenendo conto della formula di inversione per la trasformata di Fourier si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dt, \phi \right) &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\nu}^{+\nu} e^{itx} \phi(x) dt dx \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{+\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \phi(x) dx dt \\ &= \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\nu}^{+\nu} F\phi(-t) dt = \phi(0) = (\delta, \phi). \end{aligned}$$

Le precedenti relazioni danno rappresentazioni della δ , che è una distribuzione singolare, come limite di distribuzioni regolari. Se nelle rappresentazioni sopra riportate si fa variare ν sui numeri naturali si ottengono delle successioni di distribuzioni regolari che sono dette **successioni di tipo δ** .

(5) - **Prodotto tensoriale.** Siano $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ distribuzioni e sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$. Per ogni $y \in \mathbf{R}^n$, l'applicazione $x \mapsto \phi(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^m$, è elemento di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$. Si può dimostrare (ved. [30] Teorema 27.1 pag. 284) che l'applicazione

$$\phi_S : y \mapsto (S, \phi(\cdot, y)) \equiv (S(x), \phi(x, y))$$

è elemento di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Inoltre, si può dimostrare (ved. [30] Teorema 40.3 pag. 416) che l'applicazione

$$\Phi_S : \phi \mapsto \phi_S$$

è lineare e continua. Ciò permette di definire la distribuzione $T \circ \Phi_S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{m+n})$ con la relazione

$$(T \circ \Phi_S, \phi) = (T, \phi_S) = (T(y), (S(x), \phi(x, y))).$$

In modo del tutto analogo si ha che l'applicazione $\phi_T : x \mapsto (T, \phi(x, \cdot))$ è elemento di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ e che l'applicazione $\Phi_T : \phi \mapsto \phi_T$ è lineare e continua. Si ha quindi la distribuzione $S \circ \Phi_T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{m+n})$ definita da

$$(S \circ \Phi_T, \phi) = (S, \phi_T) = (S(x), (T(y), \phi(x, y))).$$

Si può poi verificare una specie di teorema di Fubini per distribuzioni e cioè che (ved. [30] pag. 416-417)

$$S \circ \Phi_T = T \circ \Phi_S.$$

Tale distribuzione è detta **prodotto tensoriale** delle distribuzioni S e T e la si indica con $S \otimes T$. Si osservi che, in particolare, se $\phi(x, y) = u(x)v(y)$, è

$$(S \otimes T, uv) = (S, u)(T, v). \quad (4.17)$$

Il sottospazio generato dalle funzioni ϕ di tale tipo è un sottoinsieme denso in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$. Tenendo conto di ciò e della (4.17) si dimostra che, se α, β sono multi-indici rispettivamente in \mathbf{R}^m e \mathbf{R}^n , si ha

$$\partial^\alpha \partial^\beta (S \otimes T) = (\partial^\alpha S) \otimes (\partial^\beta T); \quad (4.18)$$

e che, se $V \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^p)$, vale la proprietà associativa

$$(S \otimes T) \otimes V = S \otimes (T \otimes V). \quad (4.19)$$

Spesso si scrive anche $S(x)T(y)$ in luogo di $S \otimes T$ (useremo sempre tale notazione per distribuzioni regolari). Un esempio è la distribuzione (funzione di Green ritardata; ved. Esempi 14 e 16)

$$E_{rit} = \frac{\theta(t)}{4\pi} \frac{1}{r} \delta(r - t),$$

soluzione fondamentale del d'Alembertiano in 3 dimensioni spaziali che vedremo più avanti. Questa è quindi distribuzione in \mathbf{R}^4 che ha il seguente significato

$$(E_{rit}, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(t)}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \delta(r-t), \phi \right) dt,$$

essendo $\delta(r-t)$ la distribuzione in \mathbf{R}^3 , dipendente dal parametro t , definita più avanti nell'Esempio 14.

(6) - **Prodotto di convoluzione.** Indichiamo con σ l'applicazione

$$\sigma : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \text{ tale che } (x, y) \mapsto x + y.$$

Indichiamo con $Conv(\mathbf{R}^n)$ il sottoinsieme di $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ delle coppie ordinate di distribuzioni S, T per le quali

$$C(S, T, \phi) := (supp S \times supp T) \cap supp (\phi \circ \sigma)$$

è compatto, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Si può verificare che se S è a supporto compatto allora $C(S, T, \phi)$ è compatto, $\forall T$ ed analogamente con S e T scambiati. Quindi la coppia (S, T) è in $Conv(\mathbf{R}^n)$ se una delle due distribuzioni è a supporto compatto. Analogamente si può verificare che la coppia (S, T) è in $Conv(\mathbf{R}^n)$ se le due distribuzioni hanno ambedue supporto limitato a destra oppure a sinistra. Si osservi che, se $\chi \equiv \chi(S, T, \phi)$ è una funzione a supporto compatto e di classe C^∞ eguale ad 1 in un intorno di $C(S, T, \phi)$, allora $\chi(\phi \circ \sigma)$ è una funzione in \mathcal{D} se la coppia (S, T) è in $Conv(\mathbf{R}^n)$. Sia allora $(S, T) \in Conv(\mathbf{R}^n)$. Si può verificare che l'applicazione

$$\phi \mapsto (S \otimes T, \chi(\phi \circ \sigma))$$

è applicazione lineare e continua ben definita perché, per ogni ϕ , il suo valore non dipende dalla scelta di una particolare $\chi(S, T, \phi)$. Ciò permette di definire, per (S, T) in $Conv(\mathbf{R}^n)$, il **prodotto di convoluzione** di S e T come la distribuzione $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ definita da

$$(S * T, \phi) = (S \otimes T, \chi(\phi \circ \sigma)).$$

Si usa anche scrivere semplicemente $(S \otimes T, \phi(x+y))$ in luogo di $(S \otimes T, \chi(\phi \circ \sigma))$ dal momento che i valori di $\phi(x+y)$ fuori di $C(S, T, \phi)$ non contano. Si può verificare che il prodotto di convoluzione è commutativo. Si osservi che, se $f, g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ hanno supporti tali che le distribuzioni associate sono in $Conv(\mathbf{R}^n)$ (si ricordi che $supp T_f = supp f$), allora si può dimostrare (ved., ad esempio, [29] pag. 127) che $f * g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ ed è

$$T_f * T_g = T_{f*g}. \quad (4.20)$$

Due importanti proprietà del prodotto di convoluzione sono date nella seguente proposizione.

Proposizione 4.6 *La δ è unità per il prodotto di convoluzione cioè*

$$S * \delta = S. \quad (4.21)$$

Inoltre

$$\partial^\alpha(S * T) = (\partial^\alpha S) * T = S * (\partial^\alpha T). \quad (4.22)$$

Dimostr.: Infatti è $C(S, \delta, \phi) = (\text{supp } S \cap \text{supp } \phi) \times \{0\}$ e si può sempre prendere $\chi(x, y) = \chi_1(x)\chi_2(y)$ in cui χ_2 è 1 su un intorno di $y = 0$ e χ_1 è 1 in un intorno di $\text{supp } \phi$ che contiene $\text{supp } S \cap \text{supp } \phi$. Allora

$$(S * \delta, \phi) = (S(x), (\delta(y), \chi_1(x)\chi_2(y)\phi(x+y))) = (S(x), \chi_1(x)\phi(x)) = (S, \phi),$$

da cui si ottiene la (4.21). Tralasciando le funzioni χ e tenendo conto che $(\partial^\alpha \phi)(x+y) = \partial_y^\alpha(\phi(x+y))$, si ha poi

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha(S * T), \phi) &= (-1)^{|\alpha|}(S * T, \partial^\alpha \phi) = \\ &= (-1)^{|\alpha|}(S(x), (T(y), (\partial^\alpha \phi)(x+y))) = (-1)^{|\alpha|}(S(x), (T(y), \partial_y^\alpha(\phi(x+y)))) = \\ &= (S(x), (\partial_y^\alpha T(y), \phi(x+y))) = (S * (\partial^\alpha T), \phi), \end{aligned}$$

da cui si ottiene la (4.22).

QED

Il prodotto di convoluzione è importante per le applicazioni alle equazioni alle derivate parziali come vedremo nella Sezione 5.

4.4 Trasformata di Fourier

Abbiamo visto, nel capitolo sulla trasformata di Fourier, che la trasformata di Fourier F in \mathbf{R}^n è applicazione biunivoca di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Si può verificare che F è applicazione continua rispetto alla topologia di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Allora, $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, $T \circ F$ è lineare e continua e quindi $T \circ F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Ciò permette di definire la **trasformata di Fourier di una distribuzione temperata** come la distribuzione temperata FT data da

$$(FT, \phi) := (T, F\phi).$$

In modo del tutto analogo si definisce l'inversa della trasformata di Fourier di una distribuzione temperata come la distribuzione temperata $F^{-1}T$ data da

$$(F^{-1}T, \phi) := (T, F^{-1}\phi).$$

Si osservi che tali definizioni non sono possibili per $T \in \mathcal{D}'$ perchè, se $\phi \in \mathcal{D}$, non sempre $F\phi$ e $F^{-1}\phi$ sono in \mathcal{D} . Si osservi inoltre che se $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, allora $FT_f = T_F f$.

Esempio 4.11 *Calcoliamo la trasformata di Fourier di $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Essendo*

$$(F\delta, \phi) = (\delta, F\phi) = F\phi(0) = (2\pi)^{-n/2} \int \phi dx = ((2\pi)^{-n/2}, \phi),$$

si ottiene

$$F\delta = (2\pi)^{-n/2}. \quad (4.23)$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione regolare associata alla funzione costante $1 \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Facendo uso della formula per l'inversione della trasformata di Fourier per funzioni di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, abbiamo

$$(F1, \phi) = (1, F\phi) = \int F\phi dx = (2\pi)^{n/2} \phi(0) = ((2\pi)^{n/2} \delta, \phi),$$

da cui si ottiene

$$F1 = (2\pi)^{n/2} \delta. \quad (4.24)$$

Osserviamo che la funzione costante 1 non è trasformabile secondo Fourier mentre lo è la distribuzione temperata ad essa associata.

Alcune utili proprietà elementari sono riportate nella seguente proposizione.

Proposizione 4.7 *Sia T distribuzione temperata in \mathbf{R}^n . Allora*

1. $FF^{-1}T = F^{-1}FT = T$;
2. $F^2T \equiv F(FT) = T(-x)$;
3. $F(e^{iax}T) = (FT)(x - a)$, $\forall a \in \mathbf{R}^n$;
4. $F(T(x - a)) = e^{-iax}FT$, $\forall a \in \mathbf{R}^n$;
5. $F(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|} x^\alpha FT$, $\forall \alpha$ multi-indice in \mathbf{R}^n ;
6. $\partial^\alpha FT = (-i)^{|\alpha|} F(x^\alpha T)$, $\forall \alpha$ multi-indice in \mathbf{R}^n .

Dimostr.: Tali relazioni si dimostrano riportando le varie operazioni sulle funzioni test e tenendo conto che tali proprietà sono vere per funzioni di \mathcal{S} . Ad esempio dimostriamo la terza. Applicando l'analoga della 4 per funzioni, si ha

$$\begin{aligned}(F(e^{iax}T), \phi) &= (e^{iax}T, F\phi) = (T, e^{iax}F\phi) \\ &= (T, F(\phi(x+a))) = (FT, \phi(x+a)) = ((FT)(x-a), \phi),\end{aligned}$$

da cui segue la 3.

QED

Si osservi che, applicando la 2 della Proposizione 4.7, le relazioni (4.23) e (4.24) si ottengono l'una dall'altra applicando la trasformazione di Fourier F .

Esempio 4.12 *Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione di Heaviside θ (in \mathbf{R}). Osserviamo innanzitutto che, per il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale, è*

$$\int_0^{+\infty} \phi(y)dy = \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-py} \phi(y)dy.$$

L'introduzione del fattore di convergenza e^{-py} rende possibile l'applicazione del teorema di Fubini in quanto segue. Si ottiene

$$\begin{aligned}(F\theta, \phi) &= (\theta, F\phi) = \int_0^{+\infty} (F\phi)(y)dy \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-py} (F\phi)(y)dy \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-py} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-ixy} dx dy \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \int_0^{+\infty} e^{-(p+ix)y} dy dx \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \frac{1}{p+ix} dx \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-ip} \phi(x) dx = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x-i0}, \phi \right).\end{aligned}$$

Abbiamo quindi, facendo uso della (4.13),

$$F\theta = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x-i0} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} P_v \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta. \quad (4.25)$$

Da questa, applicando ad ambo i membri F e facendo uso di 2 della Proposizione 4.7, si ottengono i seguenti risultati ($\theta(x) + \theta(-x) = 1$)

$$F \frac{1}{x-i0} = i\sqrt{2\pi} \theta(-x),$$

$$F(Pv\frac{1}{x}) = i\sqrt{2\pi}[\theta(-x) - \frac{1}{2}] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\theta(x) - \theta(-x)].$$

Esempio 4.13 *Facendo uso di 3 della Proposizione 4.7, di (4.24) per $n = 1$ e di (4.25) si ottengono i seguenti risultati la cui verifica lasciamo per esercizio:*

$$F \sin ax = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(x+a) - \delta(x-a)];$$

$$F(\theta \sin ax) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} [\frac{1}{x+a-i0} - \frac{1}{x-a-i0}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-a}{(x-i0)^2 - a^2}. \quad (4.26)$$

Esempio 4.14 *Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione temperata in \mathbf{R}^3 $\delta(r-a)$, $r^2 = |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, a reale positivo, definita da*

$$(\delta(r-a), \phi) := \int_{S_a} \phi dS_a.$$

Si osservi che tale distribuzione ha per supporto la superficie S_a della sfera con centro nell'origine e di raggio a . Si ottiene

$$\begin{aligned} (F\delta(r-a), \phi) &= (\delta(r-a), F\phi) = \int_{S_a} F\phi(y) dS_a(y) \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{S_a} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) e^{-ix \cdot y} dx dS_a(y) \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) \int_{S_a} e^{-ix \cdot y} dS_a(y) dx. \end{aligned}$$

Essendo su S_a $x \cdot y = a|x| \cos \theta$, $dS_a = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, posto $u = -\cos \theta$ nell'integrale su θ , si ottiene

$$\begin{aligned} (F\delta(r-a), \phi) &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) \int_{-1}^1 e^{ia|x|u} du dx \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) 2 \frac{\sin a|x|}{a|x|} dx = (\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a|x|}{|x|}, \phi), \end{aligned}$$

da cui risulta che

$$F\delta(r-a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a|x|}{|x|}. \quad (4.27)$$

Applicando F a questa si ha anche (facendo uso di 2 della Proposizione 4.7 essendo $\delta(r-a)$ pari)

$$F \frac{\sin a|x|}{|x|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(r-a)}{a}. \quad (4.28)$$

Esempio 4.15 Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione temperata in \mathbf{R}^1 regolare $\exp(-iax^2)$, $a > 0$. Osserviamo che tale trasformata esiste in senso distribuzionale ma non come funzione, perché tale funzione non è in $L^1(\mathbf{R})$. Innanzitutto ricordiamo gli integrali di Fresnel (che sono integrali di Riemann e non di Lebesgue)

$$\mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{i\pi/4}, \quad b > 0,$$

in cui $\mathcal{R} \int$ indica l'integrale di Riemann. Per coniugazione complessa si ha quindi che

$$\mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-i\pi/4}, \quad a > 0.$$

Si ha poi che

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iax^2} e^{-ixy} dy &= \mathcal{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\sqrt{a}y+x/(2\sqrt{a}))^2} e^{ix^2/(4a)} dy = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-i\pi/4} e^{ix^2/(4a)}, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Allora (nell'ultimo passaggio si usa la proprietà di eguaglianza fra integrali di Riemann e di Lebesgue su intervalli finiti di integrazione)

$$\begin{aligned} (Fe^{-iax^2}, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^{+k} e^{-iax^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-ixy} dx dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \int_{-k}^{+k} e^{-iax^2} e^{-ixy} dy dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-i\pi/4} e^{ix^2/(4a)}, \phi \right) \end{aligned}$$

da cui

$$Fe^{-iax^2} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-i\pi/4} e^{ix^2/(4a)}. \quad (4.29)$$

4.5 Soluzioni fondamentali

Sia dato l'operatore differenziale in \mathbf{R}^n

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha.$$

Se le funzioni a_α sono di classe C^∞ tale operatore ha senso come operatore su \mathcal{D}' e se inoltre sono di lenta crescita L ha senso anche come operatore su \mathcal{S}' . Se si considera quindi l'equazione

$$Lu = g \quad (4.30)$$

con g funzione continua, questa ha senso sia classicamente che in senso distribuzionale. Si dice **soluzione classica** o **soluzione in senso stretto** una soluzione di (4.30) nel senso delle funzioni (quindi u deve essere funzione di classe C^m). Si dice **soluzione distribuzionale** o **soluzione debole** una soluzione di (4.30) nel senso delle distribuzioni (quindi u deve essere distribuzione tale che $Lu = T_g$). Una relazione fra i due tipi di soluzione è data dalla seguente proposizione (ved. [29] pag. 240 e [20] pag.149).

Proposizione 4.8 *Data l'equazione (4.30) con L di grado m e g continua, se u è soluzione classica allora è soluzione distribuzionale. Viceversa, se u è soluzione distribuzionale ed è di classe C^m , allora u è soluzione classica.*

Dimostr.: La prima parte è di facile verifica tenendo conto che, se u è di classe $C^{|\alpha|}$, allora

$$a(x)\partial^\alpha T_u = T_{a(x)\partial^\alpha u}.$$

Infatti, se $(\sum a_\alpha(x)\partial^\alpha)u = g$, è anche

$$(\sum a_\alpha(x)\partial^\alpha)T_u = T_{(\sum a_\alpha(x)\partial^\alpha)u} = T_g,$$

per cui T_u è soluzione distribuzionale. Viceversa sia $P(\partial)T_u = T_g$ e sia u di classe C^m . Allora $T_g = P(\partial)T_u = T_{P(\partial)u}$ e quindi $T_{P(\partial)u-g} = 0$. Si ha quindi $P(\partial)u - g = 0$ quasi ovunque e quindi, essendo tale funzione continua, essa è nulla ovunque per cui u è soluzione classica. **QED**

Per particolari operatori si possono avere ulteriori proprietà relative al confronto fra soluzioni classiche e soluzioni distribuzionali come ad esempio il Lemma di Weyl per il Laplaciano (ved. [21] pag. 53).

Al fine di studiare le proprietà di derivabilità e analiticità delle soluzioni dell'equazione (4.30) sono utili le seguenti definizioni. L'operatore differenziale L è **ipoellittico** (risp. **ipoellittico analitico**) se per ogni aperto Ω ed ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, T è funzione di classe C^∞ (risp. analitica) se tale è LT . L'utilità di tali concetti sta nel fatto che, quando si considera l'equazione distribuzionale (4.30), se g è funzione di classe C^∞ (risp. analitica), allora *ogni soluzione debole di tale equazione è soluzione classica di classe C^∞ (risp. analitica)*. Vedremo più avanti un criterio necessario e sufficiente per stabilire quando L è ipoellittico o ipoellittico analitico nel caso degli operatori differenziali a coefficienti costanti che adesso consideriamo.

Sia

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$$

un operatore differenziale a coefficienti costanti ($a_\alpha \in \mathbf{C}$) di grado m in \mathbf{R}^n . Si dice **soluzione fondamentale** per $P(\partial)$ una distribuzione $E \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ tale che

$$P(\partial)E = \delta. \quad (4.31)$$

La soluzione fondamentale non è unica perché è definita a meno di una soluzione u di $P(\partial)u = 0$. L'importanza delle soluzioni fondamentali risulta dal seguente teorema.

Teorema 4.9 *Sia E soluzione fondamentale per l'operatore differenziale a coefficienti costanti $P(\partial)$ in \mathbf{R}^n e sia $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ tale che E ed S ammettono convoluzione cioè $(E, S) \in \text{Conv}(\mathbf{R}^n)$. Allora $T = S * E$ è soluzione dell'equazione alle derivate parziali*

$$P(\partial)T = S. \quad (4.32)$$

Dimostr.: Tenendo conto di (4.22), (4.31) e (4.21) si ottiene

$$P(\partial)(S * E) = S * (P(\partial)E) = S * \delta = S.$$

QED

L'esistenza di soluzioni fondamentali è stata dimostrata da Malgrange e Ehrenpreis (ved. [21] pag. 48-49 o [32] pag. 212-214 per la dimostrazione) nel seguente teorema.

Teorema 4.10 *(Malgrange e Ehrenpreis) Ogni operatore differenziale a coefficienti costanti ammette una soluzione fondamentale.*

In tale teorema si dimostra che una soluzione fondamentale esiste in \mathcal{D}' . Successivamente Hörmander ha dimostrato (Ark. Math. 3, (1958) pag. 555-568; ved. anche [32] pag. 214-216) che *almeno una* soluzione fondamentale esiste in \mathcal{S}' . Questo risultato è importante perché sarà allora permesso (come in effetti faremo negli esempi seguenti) usare la trasformata di Fourier per la determinazione di soluzioni fondamentali. Per le proprietà di derivabilità e analiticità delle soluzioni dell'equazione (4.32) è importante il seguente risultato dovuto a L. Schwarz per la parte ipoellittica (ved. [31] pag. 18,19 e 23 o anche [29] pag. 257).

Teorema 4.11 *L'operatore differenziale a coefficienti costanti $P(\partial)$ è ipoellittico (risp. ipoellittico analitico) se e solo se $P(\partial)$ ammette una soluzione fondamentale di classe C^∞ (risp. analitica) nel complemento dell'origine.*

Da tale teorema segue che ogni operatore differenziale a coefficienti costanti che è ipoellittico analitico è anche ipoellittico. È conveniente sottolineare il seguente fatto. Sia data l'equazione

$$P(\partial)g = f \quad (4.33)$$

con $P(\partial)$ operatore ipoellittico ed f funzione di classe C^∞ e sia E soluzione fondamentale di classe C^∞ nel complemento dell'origine. Tenuto conto di (4.20) ed indicando con E sia la funzione che la distribuzione ad essa associata, se f, E hanno supporti tali che le distribuzioni associate sono in $\text{Conv}(\mathbf{R}^n)$, si ha

$$P(\partial)T_{f*E} = P(\partial)(T_f * E) = T_f * \delta = T_f.$$

Quindi T_{f*E} è soluzione debole ma allora $(P(\partial)$ è ipoellittico) $f*E$ è funzione di classe C^∞ che è soluzione classica della (4.33).

Nei seguenti esempi troviamo soluzioni fondamentali per importanti operatori differenziali.

Esempio 4.16 *Troviamo una soluzione fondamentale per il Laplaciano Δ in \mathbf{R}^3 . Applicando la trasformata F ad ambo i membri dell'equazione $\Delta E = \delta$ si ottiene*

$$-|x|^2 FE = (2\pi)^{-3/2},$$

in cui $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Si osservi che $|x|^{-2}$ è localmente integrabile in \mathbf{R}^3 (lo si vede subito usando coordinate polari) ed è perciò una distribuzione regolare. Si ha quindi che una soluzione dell'equazione sopra è data da

$$FE = -(2\pi)^{-3/2}|x|^{-2}.$$

Usando F^{-1} si ottiene

$$\begin{aligned} (E, \phi) &= (F^{-1}FE, \phi) = (FE, F^{-1}\phi) \\ &= -(2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|y|^2} (F^{-1}\phi)(y) dy \\ &= -(2\pi)^{-3} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{|y|^2} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) e^{iy \cdot x} dx dy \\ &= -(2\pi)^{-3} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{V_R} \frac{1}{|y|^2} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) e^{iy \cdot x} dx dy, \end{aligned}$$

in cui V_R è la sfera di raggio R . Applicando il teorema di Fubini, passando a coordinate polari, posto $r = |x|$, $\rho = |y|$, si ottiene

$$(E, \phi) = -(2\pi)^{-3} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{ir\rho \cos \theta} \sin \theta d\varphi d\theta d\rho dx$$

$$\begin{aligned}
&= -(2\pi)^{-2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) \int_0^R \frac{e^{ir\rho} - e^{-ir\rho}}{ir\rho} d\rho dx \\
&= -(2\pi)^{-2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^3} \phi(x) \int_0^R \frac{2 \sin r\rho}{r} d(r\rho) dx.
\end{aligned}$$

Tenendo conto che $\int_0^{+\infty} (\sin u)/u \, du = \pi/2$, si ottiene

$$(E, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\phi(x)}{r} dx = \left(-\frac{1}{4\pi r}, \phi\right),$$

da cui

$$E = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (4.34)$$

Procedendo in modo del tutto analogo, tenendo conto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

si ottiene che una soluzione fondamentale per l'operatore di Helmholtz $\Delta - \mu^2$ è

$$E = -\frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}. \quad (4.35)$$

Per il Laplaciano in \mathbf{R}^2 le cose sono più complicate per il fatto che $|x|^{-2}$ non è localmente integrabile in \mathbf{R}^2 in un intorno dell'origine. Si può dimostrare (ved. [29] pag. 212-214) che una soluzione fondamentale del Laplaciano in \mathbf{R}^2 è

$$E = \frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (4.36)$$

Tenendo conto del Teorema 4.11 si ha che il Laplaciano è un operatore ipoellittico analitico. Le soluzioni fondamentali per il Laplaciano hanno applicazione alla soluzione del **problema di Dirichlet** per un aperto Ω (in \mathbf{R}^2 o in \mathbf{R}^3) con frontiera $\partial\Omega$. Tale problema consiste nella determinazione della funzione u tale che

$$\Delta u = f \quad (4.37)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g \quad \text{cioè} \quad u = g \quad \text{su} \quad \partial\Omega. \quad (4.38)$$

Si dice **funzione di Green** per il problema di Dirichlet per Ω la distribuzione $G(x, x')$ (è una funzione essendo il Laplaciano ipoellittico) tale che

$$\Delta_x G(x, x') = \delta(x - x'), \quad x' \in \Omega, \quad (4.39)$$

$$G(x, x') = 0 \quad \text{per} \quad x \in \partial\Omega, \quad x' \in \Omega. \quad (4.40)$$

Si può dimostrare (ved. [13]; ved. anche [34] pag. 197-199 e pag. 225) che, con opportune ipotesi per Ω , la funzione di Green suddetta esiste. Tenendo conto del principio del massimo per funzioni armoniche (ved., ad esempio, [34] pag.194) si ha poi che (se esistesse un'altra funzione di Green G_1 la differenza $G - G_1$ sarebbe armonica in Ω e nulla sul bordo di Ω) la funzione di Green per il problema di Dirichlet per un assegnato Ω è *unica*. Si può dimostrare infine che la suddetta funzione di Green $G(x, x')$ è *simmetrica* nello scambio di x con x' e quindi è anche

$$\Delta_{x'} G(x, x') = \delta(x - x'), \quad x \in \Omega,$$

$$G(x, x') = 0 \quad \text{per } x \in \Omega, \quad x' \in \partial\Omega.$$

Se E è soluzione fondamentale, $E(x - x')$ è soluzione di (4.39). La funzione di Green si ottiene aggiungendo ad $E(x - x')$ una funzione armonica (in x' , $\forall x \in \Omega$) $\psi(x, x')$ tale da compensare i valori di $E(x - x')$ per $x' \in \partial\Omega$, $\forall x \in \Omega$. La conoscenza della funzione di Green permette di trovare la soluzione u del problema di Dirichlet (4.37), (4.38). Ciò si ottiene dal seguente teorema.

Teorema 4.12 *Dato il problema di Dirichlet (4.37), (4.38), se $G(x, x')$ è la funzione di Green per Ω , la soluzione del problema è*

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, x') f(x') dx' + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, x')}{\partial \nu} g(x') d\sigma(x'), \quad (4.41)$$

in cui $\frac{\partial}{\partial \nu}$ indica la derivata in direzione della normale esterna ν a $\partial\Omega$.

Dimostr.: Sia T la distribuzione definita da

$$(T, \phi) = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \phi \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\sigma.$$

Ricordiamo che vale la formula di Green

$$\int_{\Omega} (u \Delta \phi - \phi \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \phi \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\sigma. \quad (4.42)$$

Allora

$$\begin{aligned} (\Delta(u\chi_{\Omega}), \phi) &= (u\chi_{\Omega}, \Delta\phi) = \int_{\Omega} u \Delta\phi dx = \\ &= \int_{\Omega} \phi \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \phi \frac{\partial u}{\partial \nu}) d\sigma = \\ &= (\chi_{\Omega} \Delta u, \phi) + (T, \phi) \end{aligned}$$

e quindi

$$\Delta(u\chi_\Omega) = \chi_\Omega \Delta u + T. \quad (4.43)$$

Facciamo il prodotto di convoluzione di ambo i membri per la soluzione fondamentale E del Laplaciano. È

$$E * \Delta(u\chi_\Omega) = \Delta E * u\chi_\Omega = \delta * u\chi_\Omega = u\chi_\Omega$$

e quindi

$$u\chi_\Omega = E * (\chi_\Omega \Delta u) + E * T. \quad (4.44)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} (E * T, \phi) &= (T(x'), (E(w), \phi(w + x'))) = (T(x'), \int E(w) \phi(w + x') dw) = \\ &= (T(x'), \int E(x - x') \phi(x) dx) = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[u(x') \frac{\partial}{\partial \nu} \int E(x - x') \phi(x) dx - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \int E(x - x') \phi(x) dx \right] d\sigma(x') = \\ &= \int \left[\int_{\partial\Omega} \left(u(x') \frac{\partial E(x - x')}{\partial \nu}(x') - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') E(x - x') \right) d\sigma(x') \right] \phi(x) dx, \end{aligned}$$

da cui

$$(E * T)(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(x') \frac{\partial E(x - x')}{\partial \nu}(x') - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') E(x - x') \right] d\sigma(x').$$

Allora, se u è soluzione di (4.37), da (4.44) in un punto $x \in \Omega$ si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} E(x - x') f(x') dx' + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[u(x') \frac{\partial E(x - x')}{\partial \nu}(x') - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') E(x - x') \right] d\sigma(x'). \end{aligned} \quad (4.45)$$

D'altra parte, dalla formula di Green (4.42) con la funzione $\psi(x, x')$ vista sopra (è armonica) in luogo di ϕ e con u soluzione di (4.37), si ha

$$0 = \int_{\Omega} \psi(x, x') f(x') dx' + \int_{\partial\Omega} [u(x') \frac{\partial \psi(x, x')}{\partial \nu}(x') - \psi(x, x') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x')] d\sigma(x').$$

Sommando questa alla (4.45), tenuto conto che $G(x, x') = E(x - x') + \psi(x, x')$ è 0 per $x' \in \partial\Omega$, $\forall x \in \Omega$, si ottiene la tesi. **QED**

L'utilità della funzione di Green sta nel fatto che la soluzione del problema di Dirichlet (4.37), (4.38) con dati f, g , è ricondotta a quella di un

problema di Dirichlet con $f = 0$ e $g = -E(x - x')$. Si osservi infine che dall'espressione (4.41) si ha che la funzione di Green è, in un certo senso, il nucleo dell'operatore A^{-1} che inverte l'operatore

$$A \equiv (\Delta, |_{\partial\Omega}) \quad \text{tale che} \quad Au := (\Delta u, u|_{\partial\Omega}).$$

Esempio 4.17 Funzione di Green per il disco di raggio R in dimensione 2. Ricordiamo che la soluzione fondamentale per il Laplaciano in dimensione 2 è

$$E = \frac{1}{2\pi} \ln r.$$

La funzione $h : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$h(x, x') = \frac{R}{|x'|} x' - \frac{|x'|}{R} x,$$

per ogni x nel disco (e quindi $|x| < R$) si annulla per

$$x' = \frac{R^2}{|x|^2} x$$

che è fuori del disco e $\ln|h(x, x')|$ è armonica nel disco. Inoltre, sul bordo del disco, cioè per $|x'| = R$, è $h(x, x') = x' - x$. Allora

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \ln|x - x'| - \frac{1}{2\pi} \ln|h(x, x')|$$

è la funzione di Green cercata. Se θ e φ sono gli angoli di x e, rispettivamente, x' con l'asse delle ascisse e $|x| = r$, $|x'| = r'$, si ha

$$|x - x'| = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \varphi)]^{1/2},$$

$$\left| \frac{R}{|x'|} x' - \frac{|x'|}{R} x \right| = [R^2 + \frac{r^2 r'^2}{R^2} - 2rr' \cos(\theta - \varphi)]^{1/2}.$$

In ogni punto x' sul bordo (e quindi con $|x'| = R$), la normale esterna al disco è in direzione radiale e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, x')}{\partial \nu} \Big|_{|x'|=R} &= \frac{\partial G(x, x')}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R - r \cos(\theta - \varphi)}{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)} - \frac{(r^2 R / R^2) - r \cos(\theta - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)}$$

che è il nucleo di Poisson già visto nello studio delle funzioni di variabile complessa. La soluzione del problema di Dirichlet (4.37), (4.38) per il disco è quindi $(x = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}, d\sigma(x') = R d\varphi)$

$$u(x) = \int_0^R \int_0^{2\pi} G(x, x') f(x') r' d\varphi dr' + \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi) d\varphi}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi)}.$$

Esempio 4.18 Funzione di Green per il semipiano $y > 0$ in dimensione 2. Procediamo in modo analogo a quanto visto nell'esempio precedente. Posto $v = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $v' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$, abbiamo

$$E(v - v') = \frac{1}{4\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2].$$

La funzione

$$\psi(v, v') = \frac{1}{4\pi} \ln[(x - x')^2 + (y + y')^2]$$

è eguale ad $E(v - v')$ sul contorno del semipiano cioè per $y' = 0, \forall v$. Inoltre tale funzione è armonica in tutto il semipiano $y' > 0$ perché l'unica singolarità è, per ogni v in tale semipiano, in $v' = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ che è nel semipiano $y' < 0$. Allora

$$G(v, v') = \frac{1}{4\pi} \{\ln[(x - x')^2 + (y - y')^2] - \ln[(x - x')^2 + (y + y')^2]\}.$$

è la funzione di Green cercata. La normale esterna al semipiano, in ogni punto v' sul bordo (e quindi con $y' = 0$) è in direzione $-\mathbf{j}$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(v, v')}{\partial \nu} \Big|_{y'=0} &= - \frac{\partial G(v, v')}{\partial y'} \Big|_{y'=0} = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-2(y - y')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} - \frac{2(y + y')}{(x - x')^2 + (y + y')^2} \right] \Big|_{y'=0} = \\ &= \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x - x')^2 + y^2} \end{aligned}$$

che è il nucleo di Poisson per il semipiano già visto nello studio delle funzioni di variabile complessa. La soluzione del problema di Dirichlet (4.37), (4.38) per il semipiano è quindi

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G(v, v') f(x', y') dy' dx' + \\ + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x') dx'}{(x - x')^2 + y^2}.$$

Con la seguente proposizione calcoliamo la soluzione fondamentale per un operatore differenziale a coefficienti costanti.

Proposizione 4.13 *Se f è soluzione del problema di Cauchy*

$$f^{(m)} + a_1 f^{(m-1)} + \dots + a_m f = 0$$

$$f(0) = f'(0) = \dots f^{(m-2)}(0) = 0, \quad f^{(m-1)}(0) = 1,$$

allora la distribuzione regolare

$$E = \theta f$$

è soluzione di

$$f^{(m)} + a_1 f^{(m-1)} + \dots + a_m f = \delta.$$

cioè $E = \theta f$ è soluzione fondamentale dell'operatore differenziale

$$\frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_m.$$

Dimostr.: Applicando (4.5), poiché $(\theta f)^{(k)}$ è continua anche in 0 (essendo $f^{(k)}(0) = 0$) per $k = 0, 1, \dots, m-2$, si ha

$$(\theta f)^{(k)} = \theta f^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Inoltre, poiché $(\theta f)^{(m-1)}$ ha salto 1 in 0, sempre da (4.5) si ottiene

$$(\theta f)^{(m)} = ((\theta f)^{(m-1)})' = (\theta f^{(m-1)})' = \delta + \theta f^{(m)}.$$

Da ciò segue la tesi.

QED

Prima di passare al prossimo esempio osserviamo quanto segue. Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ e consideriamo l'equazione

$$(x - a)T = 1.$$

È facile rendersi conto che

$$T = Pv \frac{1}{x-a}, \quad T = \frac{1}{x-a+i0}, \quad T = \frac{1}{x-a-i0}$$

sono soluzioni di tale equazione. In effetti tali soluzioni differiscono fra loro per un multiplo della distribuzione $\delta(x-a)$ che, si può dimostrare, è la più generale soluzione di $(x-a)T=0$. Analogo discorso vale per l'equazione

$$(x-a)(x-b)T=1, \quad (4.46)$$

per la quale le distribuzioni

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{x-b \pm i0} - \frac{1}{x-a \pm i0} \right] \\ &= \frac{1}{(x-a \pm i0)(x-b \pm i0)} \end{aligned} \quad (4.47)$$

sono soluzioni della (4.46).

Osserviamo anche che per distribuzioni in $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ si possono definire le trasformate parziali F_{x_i} con la relazione

$$(F_{x_i}T, \phi) := (T, F_{x_i}\phi),$$

in cui la funzione $F_{x_i}\phi$ è la funzione (di $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$) ottenuta facendo la trasformata di Fourier di ϕ secondo la variabile x_i . È facile verificare che

$$F = F_{x_1}F_{x_2} \cdots F_{x_n}.$$

Esempio 4.19 *Troviamo una soluzione fondamentale per il d'Alembertiano*

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

in 3 dimensioni spaziali, cioè con Δ Laplaciano in \mathbf{R}^3 .

Applicando la trasformata $F = F_t F_{\mathbf{x}}$ ad ambo i membri dell'equazione $\square E = \delta$ si ottiene

$$-(t^2 - |\mathbf{x}|^2)F_t F_{\mathbf{x}}E = (2\pi)^{-2},$$

in cui $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Quindi, per (4.47), una soluzione è

$$FE = F_t F_{\mathbf{x}}E = \frac{-(2\pi)^{-2}}{(t-i0)^2 - |\mathbf{x}|^2}. \quad (4.48)$$

La soluzione fondamentale del d'Alembertiano che si ottiene da tale FE è detta funzione di Green causale o ritardata per la ragione che vedremo più

avanti ed è indicata con E_{rit} . Facendo uso di (4.26), da (4.48), applicando F_t^{-1} , si ha che

$$F_{\mathbf{x}}E_{rit} = (2\pi)^{-3/2} \frac{\theta(t) \sin |\mathbf{x}|t}{|\mathbf{x}|}. \quad (4.49)$$

Questa si poteva ottenere anche nel modo seguente. Applicando la trasformata $F_{\mathbf{x}}$ ad ambo i membri dell'equazione $\square E = \delta$ si ottiene

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + |\mathbf{x}|^2\right) F_{\mathbf{x}}E = (2\pi)^{-3/2} \delta(t).$$

Ma la soluzione dell'equazione $y'' + a^2y = 0$ con condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 1$ è $y(t) = \sin at/a$. Da ciò, applicando la Proposizione 4.13, si ha la (4.49). Questa si può anche ottenere in un altro modo descritto nell'Esempio 6.20.

Tenendo conto di (4.27) con t in luogo di a e $|\mathbf{x}|$ in luogo di r , si ottiene

$$F_{\mathbf{x}}E_{rit} = (2\pi)^{-3/2} \theta(t) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} F_{\mathbf{x}}\delta(|\mathbf{x}| - t)$$

e quindi

$$E_{rit} = \frac{\theta(t)}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(|\mathbf{x}| - t). \quad (4.50)$$

Si osservi che $\theta(t)\delta(|\mathbf{x}| + t) = 0$ perché $\theta(t)$ e $\delta(|\mathbf{x}| + t)$ hanno supporti disgiunti. Tenuto conto di ciò e della formula (4.2), essendo

$$\delta(t^2 - |\mathbf{x}|^2) = \frac{1}{2|\mathbf{x}|} [\delta(|\mathbf{x}| + t) + \delta(|\mathbf{x}| - t)],$$

si ha anche

$$E_{rit} = \frac{\theta(t)}{2\pi} \delta(x^2), \quad (4.51)$$

in cui $x^2 := t^2 - |\mathbf{x}|^2$. Da tale espressione, essendo $\theta(t)$ invariante per trasformazioni proprie di Lorentz, risulta che E_{rit} è invariante per trasformazioni proprie di Lorentz. La ragione dell'aggettivo ritardato per E_{rit} è la seguente. Innanzitutto osserviamo che, essendo $r = |\mathbf{x}| = t$, è $dt = dr$ e quindi $\int_0^{+\infty} dt = \int_0^{+\infty} dr$. Quindi

$$\begin{aligned} (E_{rit}, \phi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) \int_{S_t} \frac{\phi(t = |\mathbf{x}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} dS_t dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} \int_{S_t} \frac{\phi(t = |\mathbf{x}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} dS_t dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\phi(t = |\mathbf{x}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Tenendo conto di ciò si ottiene

$$\begin{aligned}(g * E_{rit}, \phi) &= (g(y), (E_{rit}(v), \phi(v + y))) \\ &= \int g(y_0, \mathbf{y}) \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\phi(y_0 + |\mathbf{v}|, \mathbf{v} + \mathbf{y})}{|\mathbf{v}|} d^3 \mathbf{v} dy_0 d^3 \mathbf{y}.\end{aligned}$$

Ponendo $\mathbf{v} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$ e, successivamente, $y_0 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = t$, si ottiene

$$\begin{aligned}(g * E_{rit}, \phi) &= \int g(y_0, \mathbf{y}) \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\phi(y_0 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 \mathbf{x} dy_0 d^3 \mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \int \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \phi(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} dt d^3 \mathbf{y} \\ &= \left(\int_{\mathbf{R}^3} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 \mathbf{y}, \phi(t, \mathbf{x}) \right).\end{aligned}$$

Quindi

$$f(t, \mathbf{x}) \equiv (g * E_{rit})(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y})}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3 \mathbf{y}.$$

Questa f , per il Teorema 4.9, è soluzione distribuzionale dell'equazione

$$\square f = g \quad (4.52)$$

e, per la Proposizione 4.8, con opportune ipotesi su g è anche soluzione classica. Si osservi che il valore al tempo t di f in \mathbf{x} è determinato dai valori della sorgente g nei vari punti \mathbf{y} ai tempi precedenti $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ e questa è la ragione dell'aggettivo ritardato.

Esempio 4.20 In questo esempio otteniamo per altra via la (4.49) dalla (4.48). Applicando $F_{x_0}^{-1}$ ad ambo i membri della (4.48) si ha

$$F_{\mathbf{x}} E_{rit} = F_{x_0}^{-1} \frac{-(2\pi)^{-2}}{(x_0 - i0)^2 - |\mathbf{x}|^2}.$$

Per funzioni f in L^1 è $FT_f = T_F f$ e quindi il secondo membro si può valutare come antitrasformata $I(t)$ di una funzione della variabile x_0 . Si ottiene quindi

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-(2\pi)^{-5/2} e^{ix_0 t}}{(x_0 - i0)^2 - |\mathbf{x}|^2} dx_0 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+, R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} \frac{(2\pi)^{-5/2} e^{izt}}{z^2 - |\mathbf{x}|^2} dz,$$

in cui $\gamma(x_0) = x_0 - i\epsilon$, $x_0 \in [-R, R]$. Applichiamo il lemma di Jordan. La funzione integranda ha poli del primo ordine in $\pm |\mathbf{x}|$ e l'integrazione è su un

asse parallelo all'asse reale "immediatamente sotto". Per $t < 0$ l'integrale va chiuso al di sotto affinché l'arco di circonferenza all'infinito che si aggiunge non dia contributo e quindi si ottiene 0, perché il cammino così chiuso non racchiude singolarità. Per $t > 0$ si deve chiudere al di sopra e si ottiene $2\pi i$ per la somma dei residui nei due poli suddetti cioè

$$-(2\pi)^{-5/2} 2\pi i \frac{e^{i|\mathbf{x}|t} - e^{-i|\mathbf{x}|t}}{2|\mathbf{x}|} = (2\pi)^{-3/2} \frac{\sin |\mathbf{x}|t}{|\mathbf{x}|}.$$

Si ha quindi, inserendo $\theta(t)$ per tenere conto che per $t < 0$ l'integrale è 0,

$$F_{\mathbf{x}} E_{rit} = (2\pi)^{-3/2} \frac{\theta(t) \sin |\mathbf{x}|t}{|\mathbf{x}|}$$

cioè si ottiene la (4.49).

Osserviamo che in fisica si usa spesso la trasformata di Fourier in \mathbf{R}^4 con prodotto scalare

$$x \cdot y = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Le formule sono essenzialmente le stesse salvo qualche cambiamento di segno che può far apparire diverse formule che producono gli stessi risultati quando usate coerentemente nei calcoli.

Esempio 4.21 *Troviamo una soluzione fondamentale per l'operatore del calore*

$$\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n, \quad k > 0$$

in n dimensioni spaziali, cioè con Δ_n Laplaciano in \mathbf{R}^n . Applicando la trasformata F_x rispetto alle variabili spaziali ad ambo i membri dell'equazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta_n\right)E = \delta$$

si ottiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + k|\mathbf{x}|^2\right)F_x E = (2\pi)^{-n/2} \delta(t), \quad (4.53)$$

in cui $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Quindi, per la Proposizione 4.13, poiché $f(t) = \exp(-k|\mathbf{x}|^2 t)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$f' + k|\mathbf{x}|^2 f = 0, \quad f(0) = 1,$$

si ottiene

$$F_x E = (2\pi)^{-n/2} \theta(t) e^{-k|\mathbf{x}|^2 t}. \quad (4.54)$$

Dalla trasformata di Fourier

$$F_{x_i} e^{-x_i^2/(4kt)} = \sqrt{2kte}^{-kt x_i^2}, \quad (4.55)$$

della gaussiana, applicando $F_{x_i}^{-1}$, si ottiene che, $\forall i = 1, \dots, n$, è

$$F_{x_i}^{-1} e^{-kt x_i^2} = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-x_i^2/(4kt)}. \quad (4.56)$$

Tenuto conto di ciò, applicando F_x^{-1} alla (4.54), si ottiene

$$E(t, \mathbf{x}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi kt)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4kt}\right). \quad (4.57)$$

Da tale soluzione fondamentale e dal Teorema 4.11 risulta che l'operatore del calore è ipoellittico ma non analitico.

Esempio 4.22 Troviamo infine una soluzione fondamentale per l'operatore di Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta_n$$

in n dimensioni spaziali, cioè con Δ_n Laplaciano in \mathbf{R}^n . Applicando la trasformata F_x rispetto alle variabili spaziali ad ambo i membri dell'equazione

$$(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \Delta_n) E = \delta$$

e moltiplicando per $-i$ si ottiene la (4.53) con $i/(2m)$ in luogo di k ed un fattore $-i$ a secondo membro. Quindi in luogo di (4.54) si ottiene adesso

$$F_x E = -(2\pi)^{-n/2} i \theta(t) \exp\left(-\frac{i}{2m} |\mathbf{x}|^2 t\right). \quad (4.58)$$

Si procede come nell'esempio precedente, tenendo conto della (4.29) con $a = t/(2m)$. Si ottiene

$$E(t, \mathbf{x}) = -i \theta(t) \left(\frac{m}{2\pi t}\right)^{n/2} e^{-in\pi/4} \exp\left(i \frac{m |\mathbf{x}|^2}{2t}\right). \quad (4.59)$$

La quantità $E(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ è il **propagatore libero** che si usa in teoria dello scattering (ved. [2] pag. 122 o [3] pag. 122).

Bibliografia

- [1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [2] W. O. Amrein. *Non-relativistic Quantum Dynamics*. Reidel, Dordrecht, 1981.
- [3] W. O. Amrein, J. M. Jauch, and K. B. Sinha. *Scattering Theory in Quantum Mechanics*. Benjamin, Reading, 1977.
- [4] J. Arsac. *Fourier Transforms and the Theory of Distributions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [5] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov. *General Principles of Quantum Field Theory*. Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1990.
- [6] Y. Choquet-Bruhat. *Distributions*. Masson, Paris, 1973.
- [7] B. Davies. *Integral Transforms and their Applications*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [8] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, 1947.
- [9] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Academic Press, New York, 1972.
- [10] H. Hochstadt. *The Functions of Mathematical Physics*. Wiley-Interscience, New York, 1971.
- [11] J. M. Jauch. *Foundations of Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, 1968.
- [12] S. Kaczmarz and H. Steinhaus. *Theorie der Orthogonalreihen*. Chelsea, New York, 1951.

- [13] O. D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Dover Pub., New York, 1953.
- [14] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, Reading, 1964.
- [15] S. Lang. *Real Analysis*. Addison-Wesley, Reading, 1969.
- [16] S. Lang. *Complex Analysis*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.
- [17] G. Martucci. *Spazi di Hilbert con Elementi di Meccanica Quantistica*. Pitagora, Bologna, 1982.
- [18] I. G. Petrovskii. *Partial Differential Equations*. Saunders, Philadelphia, 1967.
- [19] E. Prugovečki. *Quantum Mechanics in Hilbert Space*. Academic Press, New York, 1971.
- [20] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I*. Academic Press, New York, 1972.
- [21] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. II*. Academic Press, New York, 1975.
- [22] C. Rossetti. *Metodi Matematici della Fisica*. Levrotto e Bella, Torino, 1972.
- [23] W. Rudin. *Analisi Reale e Complessa*. Boringhieri, Torino, 1974.
- [24] W. Rudin. *Functional Analysis*. Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1974.
- [25] G. Sansone. *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di una Variabile Complessa, vol. I*. CEDAM, Padova, 1963.
- [26] I. N. Sneddon. *The Use of Integral Transforms*. Tata Mc Graw-Hill, New-Delhi, 1974.
- [27] B. Spain and M. G. Smith. *Functions of Mathematical Physics*. Van Nostrand Reinhold, London, 1970.
- [28] M. R. Spiegel. *Variabili Complesse*. Schaum, Mc Graw-Hill, New York, 1975.
- [29] Z. Szmydt. *Fourier Transformation and Linear Differential Equations*. Reidel, Dordrecht, 1977.

- [30] F. Trèves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Academic Press, New York, 1967.
- [31] F. Trèves. *Basic Linear Partial Differential Equations*. Academic Press, New York, 1975.
- [32] V. S. Vladimirov. *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Mir, Moscow, 1979.
- [33] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [34] E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover Pub., New York, 1986.