Dipartimento di Scienze Economiche, Matematiche e Statistiche

Università degli Studi di Foggia

Strategie Competitive e Opzioni Reali

Rosalba Padalino

Quaderno n. **10/2005**

Quaderno riprodotto al
Dipartimento di Scienze Economiche, Matematiche e Statistiche
nel mese di aprile 2005 e
depositato ai sensi di legge

Dipartimento di Scienze Economiche, Matematiche e Statistiche, Via IV Novembre, 1, 71100 Foggia (Italy), Phone +39 0881-77.61.97, Fax +39 0881-77.56.16

1 Introduzione

Nell' ultimo decennio la teoria delle opzioni reali unita alla teoria dei giochi (**Real Options Games**) ha assunto un ruolo fondamentale nelle scelte d' investimento effettuate in condizioni d' incertezza. Essa utilizza gli strumenti classici relativi al prezzaggio delle opzioni finanziarie, consentendo di valutare un elemento importante nei problemi d' investimento: **la flessibilità.**

Quest' ultima, infatti, viene ignorata dal metodo del VAN tradizionalmente utilizzato nella scelta del più conveniente tra progetti d' investimento alternativi. Esso, come ben noto, non è altro che la differenza tra il valore attuale lordo di un progetto e il costo necessario per la sua attuazione. Il valore attuale lordo si ottiene, a sua volta, scontando ad un certo tasso i (che tiene conto del rischio dell' investimento stesso) i flussi di cassa o entrate future derivanti dalla messa in opera del progetto. Formalizzando si ha:

$$V_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{CF_{t_k}}{(1+i)^{t_k - t}}$$

$$VAN = V_t - I$$

V_t = valore attuale lordo del progetto all' epoca $t,\ t \geq 0$;

CF_{t_k} = flusso di cassa relativo all' istante $t_k,\ k = 1, ..., n$;

I = costo del progetto.

Smit (1996) osserva che il metodo del VAN funziona in tutti quei problemi d' investimento in cui la scelta è del tipo *now or never*. Il contesto in cui si opera è statico e il valore della strategia del tipo *wait and see* non assume alcuna rilevanza. Tale strategia incide sulle decisioni da adottare nel momento in cui si hanno maggiori informazioni sul valore del progetto. La metodologia relativa ai Real Options Games considera, invece, la dinamicità dell' ambiente incerto in cui un' impresa svolge la propria attività e consente di adattare le decisioni d' investimento agli inattesi cambiamenti di mercato.

Il VAN presenta dei limiti sia nell' analisi di tutti quei progetti cosiddetti strategici, il cui valore deriva da future opzioni di crescita, sia nell' esame dei problemi in cui la scelta di investire può essere posticipata. La Ricerca e Sviluppo è un esempio di investimento strategico il cui valore dipende da opzioni successive (ad esempio la possibilità di avviare le fasi di produzione e commercializzazione di un determinato prodotto).

Molti progetti presentano le seguenti caratteristiche:

1. possono essere posticipati;

2. sono irreversibili nel senso che, una volta intrapresi, non possono essere annullati e le relative spese non possono essere recuperate.

La possibilità di posticipare un investimento irreversibile il cui valore è incerto può creare flessibilità per il management. L' irreversibilità e l' incertezza rappresentano una valida motivazione per essere più cauti, per *wait and see* ed accertarsi che il progetto sia effettivamente redditizio, mantenendo al tempo stesso l' opzione di riconsiderare la decisione d' investimento pianificata.

McDonald e Siegel (1986) osservano che l' opportunità di investire può essere considerata come un' opzione call. Quest' ultima conferisce al detentore il diritto di acquistare un bene (o *attività sottostante*) ad un prezzo prestabilito (*prezzo di esercizio*) ed entro (o in corrispondenza di) una prefissata scadenza temporale: l' esercizio del derivato è irreversibile. Poichè in questo caso l' opzione è reale, l' attività sottostante è il valore di mercato del progetto completato ed operativo, V_t, (ovvero il suo valore attuale lordo) mentre il prezzo di esercizio è equivalente al costo, I, del progetto.

Se all' epoca t la domanda di mercato evolve favorevolmente e $V_t > I$, allora l' impresa può investire realizzando un valore attuale netto positivo, $VAN_t = V_t - I > 0$. Se invece $V_t < I$, i manager possono decidere di non avviare il progetto per cui il valore di quest' ultimo è pari a zero.

Secondo Trigeorgis (1988) molte scelte d' investimento, tra cui quelle in Ricerca e Sviluppo (R&S), dovrebbero basarsi sul criterio del VAN esteso che include non solo il VAN diretto o statico dei flussi di cassa attesi derivanti dall' investimento immediato, ma anche il valore della flessibilità relativa alle opzioni insite nel progetto stesso. Cioè:

$$VAN \text{ esteso} = VAN \text{ statico} + \text{flessibilità o valore delle opzioni.}$$

Da un punto di vista strategico, tuttavia, non è sempre consigliabile posticipare un investimento in quanto aspettare può risultare vantaggioso ma può anche comportare svantaggi quali, ad esempio, la perdita di flussi di cassa causata dalla non immediata operatività di un certo impianto.

Kester (1984), Trigeorgis (1991a), Kulatilaka e Perotti (1992), e Smit e Ankum (1993) evidenziano che la metodologia delle opzioni reali dovrebbe essere esaminata nell' ambito di una determinata struttura di mercato. In un contesto dinamico e competitivo il valore di investimenti strategici può dipendere dalla capacità dell' impresa di appropriarsi dei relativi benefici. Ad esempio, imprese concorrenti possono beneficiare delle opportunità commerciali create da un investimento in R&S.

La letteratura standard sulle opzioni reali mette in risalto il valore dell' opzione *wait and see*, in condizioni d' incertezza riguardanti l' evoluzione della domanda di mercato, giustificando anche il rinvio di progetti con VAN positivo; altri studiosi e ricercatori, invece, evidenziano i benefici derivanti dall' investire subito, anticipando l' ingresso di concorrenti (Dixit, 1979, 1980; Dixit e Pindyck, 1994; Kulatilaka e Perotti, 1992).

Tali benefici possono tradursi in una riduzione dei costi realizzabile attraverso l' esperienza e la produzione cumulata.

In Smit e Trigeorgis (1997) un modo alternativo per ridurre i costi di produzione consiste nell' investire in R&S al fine di ottenere un processo produttivo più efficiente.

2 Il modello di Smit e Trigeorgis (1997)

I due autori esaminano un problema di investimento in R&S, problema che ha assunto un' importanza via via crescente nell' economia moderna, in quanto imprese leader in settori come quello farmaceutico o elettronico hanno guadagnato una posizione di vantaggio, rispetto ai concorrenti, proprio grazie all' innovazione. La scelta di investire in R&S è dunque cruciale per la posizione strategica a lungo termine di un' impresa. Essa avviene in un contesto competitivo caratterizzato da incertezza e viene esaminata attraverso una nuova metodologia basata sull' utilizzo delle opzioni reali e della teoria dei giochi.

Il tradizionale metodo del VAN, infatti, risulta poco adatto all' analisi del problema in quanto non coglie nè il valore dell' opzione di rinviare la decisione d' investimento, nè quello della strategia consistente nell' avviare subito il progetto di ricerca al fine di guadagnare una posizione migliore rispetto alla concorrenza.

Smit e Trigeorgis propongono un gioco a due fasi (o stadi), ricerca e produzione, e tre tempi ($t = 0,\ t = 1$ e $t = 2$) in un mercato duopolistico. Ciascuna delle due imprese considerate e denotate per semplicità con le lettere A e B può scegliere, all' epoca $t = 0$, se investire o meno in R&S, così come in $t = 1$ o in $t = 2$ può avviare la successiva fase produttiva.

Le imprese hanno quindi un' opzione del tipo *wait and see*; esse competono nella produzione e possono, invece, competere o collaborare nella R&S.

Le possibili azioni di A e B (I = investire, D = rinviare) determinano all' epoca $t = 2$ differenti output o valori attuali netti (*payoff*).

All' epoca $t = 0$ l' impresa $i\,(i = A,\, B)$ prende in considerazione la possibilità di investire nella ricerca e sviluppo di un processo produttivo più efficiente, tale da influire sulla sua posizione competitiva nei confronti del concorrente (A nei confronti di B e viceversa) attraverso una riduzione dei costi per unità di prodotto finito. L' impatto strategico di tale investimento si concretizza, quindi, nell' asimmetria dei costi di produzione, c_i, a vantaggio dell' impresa investitrice ($c_A \neq c_B$).

In particolare, se l' investimento in R&S si conclude con esito positivo i costi unitari si annullano. Se invece nessuna delle due imprese investe nella prima fase (la ricerca), la tecnologia produttiva continua ad essere quella già esistente con uguali costi di produzione, cioè $c_A = c_B$. Oltre all' incertezza relativa alla domanda di mercato (denotata con il parametro θ_t), vi è quella tecnica riguardante la probabilità di successo, η_i, dell' investimento in R&S, da parte dell' impresa i.

Le azioni alternative di ciascuna impresa, consistenti nell' investire (I) nella ricerca o nel posticiparla (D = defer), così come la scelta di produrre o meno, sono indicate dai rami di una struttura ad albero (analoga a quella del modello binomiale). La decisione di A e B di produrre dipende dalla evoluzione della domanda di mercato, ovvero dal parametro θ_t.

Si suppone che quest' ultimo evolva secondo un processo binomiale moltiplicativo in cui le variazioni in aumento e diminuzione sono denotate rispettivamente con le lettere u e d, cioè:

$$\theta_{t+1} = \theta_t \cdot u, \qquad t = 0,\, 1$$

oppure

$$\theta_{t+1} = \theta_t \cdot d, \qquad t = 0,\, 1$$

$$d \;<\; 1 \;<\; u; \qquad d \;=\; \frac{1}{u}\;.$$

Il prezzo di mercato, $P(Q, \theta_t)$, è espresso dalla seguente funzione lineare:

$$P(Q, \theta_t) = \theta_t - (Q_A + Q_B)$$

Q_A è la quantità prodotta dall' impresa A;

Q_B è la quantità prodotta dall' impresa B;

Q è la quantità totale prodotta dalle imprese.

Il costo totale variabile di produzione per ciascuna impresa è:

$$C(Q_i) = c_i\, Q_i \,+\, \frac{1}{2}\, q_i\, {Q_i}^2\,, \quad i = A,\, B$$

in cui c_i e q_i rappresentano rispettivamente i coefficienti fisso e variabile del costo marginale; per semplicità si suppone che $q_i = 0$.

Il profitto annuale, π_i, relativo all' impresa i è pari a:

$$\pi_i = P\, Q_i \,-\, C(Q_i) = [(\theta_t \,-\, c_i) \,-\, Q_j]\, Q_i \,-\, \left(1 \,+\, \frac{1}{2}\, q_i\right)\, {Q_i}^2$$

$$i = A,\, B; \quad j = A,\, B; \quad i \neq j\,.$$

Il valore attuale lordo, V_i, ed il valore attuale netto, VAN_i, del progetto (ricerca + produzione) dell' impresa i sono rispettivamente pari a:

$$V_i = \frac{\pi_i}{k}$$

$$VAN_i = V_i \,-\, I = \frac{\pi_i}{k} \,-\, I$$

in cui k è il tasso d' interesse adeguato al rischio dell' investimento. Si suppone che il profitto non sia soggetto a tassazione.

All' epoca $t = 2$ possono aversi le seguenti situazioni:

1. Entrambe le imprese iniziano a produrre (dopo aver rinviato la decisione in $t = 1$) per cui si ha una struttura di mercato duopolistica. La quantità prodotta da ciascuna di esse, al fine di ottimizzare il proprio profitto, dipende da quanto prodotto dal concorrente, cioè $Q_A^* \,=\, R_A(Q_B^*)$ e $Q_B^* \,=\, R_B(Q_A^*)$. R_A e R_B sono le funzioni di reazione rispettivamente di A e B.

2. All' epoca $t \,=\, 1$, una delle due imprese inizia a produrre, anticipando così l' altra. Quest' ultima investe nel periodo successivo, quando la domanda di mercato è aumen-

tata a tal punto da coprire i costi. Chi ha investito prima produrrà quella quantità che massimizza il proprio profitto data la funzione di reazione del concorrente.

3. In $t = 2$ l'impresa che aveva iniziato a produrre nel periodo precedente (per effetto ad esempio di costi più bassi), diventa monopolista. Il concorrente, infatti, presentando un VAN negativo abbandona il progetto.

4. Entrambe le imprese possono decidere di non produrre subito (in $t = 1$) se la domanda di mercato è talmente bassa da rendere negativo il valore dell'investimento. Attraverso l'opzione *wait and see*, esse mantengono la possibilità di investire nel periodo successivo se θ_t aumenta a tal punto da rendere redditizio il progetto. In caso contrario, all'epoca $t = 2$ la produzione non viene avviata, il progetto è quindi abbandonato e il suo valore è pari a zero.

A e B possono anche iniziare a produrre contemporaneamente al tempo 1; in questo caso il gioco termina ed il risultato è una struttura di mercato duopolistica.
Ad ogni possibile situazione sono associati dei payoff finali o VAN per ciascuna impresa (cfr. Smit e Trigeorgis, 1997, Appendix 1). Tali grandezze vengono calcolate sia nel caso in cui entrambe le imprese investano o meno in R&S, sia nel caso in cui soltanto una di esse decida di rendere operativa tale fase sostenendo un costo pari a K_i.
I valori intermedi, relativi al tempo $t = 1$, si ottengono attraverso il processo a ritroso proposto da Cox, Ross e Rubinstein [1] nella valutazione delle opzioni finanziarie. Cioè:

$$VAN_i(t) = \frac{VAN_i(t+1,\, u)\ \cdot p + VAN_i(t+1,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r}\,, \quad i = A,\, B;\ t = 1$$

- $VAN_i(t+1,\, u)$ rappresenta il payoff della strategia ottimale dell'impresa i, in caso di aumento della domanda di mercato.

- $VAN_i(t+1,\, d)$ rappresenta il payoff della strategia ottimale della stessa impresa, in caso di diminuzione della domanda di mercato.

[1] Cox, J.C., S.A. Ross and M. Rubinstein, 1979, *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics 7, 3 (September), pp. 229 – 263.

Nella formula sopra riportata compaiono le probabilità rischio-neutro p e $1 - p$ relative rispettivamente all' aumento e alla diminuzione del parametro θ_t :

$$p = \frac{(1+r) - (d+\delta)}{(u-d)};$$

- u e d rappresentano, come già precisato, le variazioni in aumento e diminuzione di θ_t;
- r è il tasso d' interesse di breve periodo vigente sul mercato e relativo ad investimenti privi di rischio;
- δ indica il profitto annuale costante derivante dalla produzione (analogo al dividendo di un'azione). [2]

Il valore attuale netto relativo all' epoca $t = 0$, $VAN^*(0)$, è detto *esteso* in quanto tiene conto sia del valore dell' opzione di investire in R&S, sia del valore dell' opzione di avviare o meno la fase produttiva:

$$VAN^*(0) = VAN \text{ statico o immediato} + \text{valore delle opzioni.}$$

Esso è pari a:

$$VAN_i^*(0) = \frac{VAN_i(t,\, u)\ \cdot p + VAN_i(t,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r} - K_i\,, \qquad i = A,\, B;\ t = 1$$

$$VAN_i^*(0) = \frac{VAN_i(t,\, u)\ \cdot p + VAN_i(t,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r} \qquad i = A,\, B;\ t = 1$$

[2] In particolare per progetti perpetui $\delta = k/(1+k)$ in cui k è il tasso di interesse adeguato al rischio o costo opportunità del capitale (cfr. Smit, H.T.J. and L.A. Ankum, 1993, *A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy Under Competition*, Financial Mangement 22, 3 (Autumn), pp. 241-250.)

a seconda che le imprese investano o meno in R&S.

Quest' ultima scelta dipende proprio dall' importo del VAN esteso.

3 Un' estensione del modello di Smit e Trigeorgis

Partendo da quanto proposto da Smit e Trigeorgis, supponiamo ancora di operare in un mercato duopolistico e consideriamo un gioco a due fasi, ricerca e produzione. Le due imprese, i e j, ($i = A, B$; $j = A, B$; $i \neq j$) all' epoca $t = 0$ (prima fase) decidono se investire o meno in R&S un importo rispettivamente pari a K_i e K_j. In $t = 1$ o in $t = 2$ (epoche relative alla fase produttiva) possono scegliere se iniziare o meno a produrre in base all' andamento della domanda di mercato θ_t. Quest' ultima, come già precisato, evolve secondo un processo binomiale moltiplicativo, cioè:

$$\theta_{t+1} = \theta_t \cdot u, \qquad t = 0,\, 1$$

oppure

$$\theta_{t+1} = \theta_t \cdot d, \qquad t = 0,\, 1$$

u e d sono le variazioni rispettivamente in aumento e diminuzione di θ_t, inoltre:

$$d < 1 < u; \quad d = \frac{1}{u}\,.$$

Osserviamo che la domanda di mercato è significativa dal punto di vista economico soltanto se è maggiore di zero.

L' investimento in R&S da parte dell' impresa $i - sima$ ha una probabilità di successo pari a η_i e, se concluso con esito positivo, permette all' impresa attuatrice dello stesso di produrre a costi più bassi, rispetto al concorrente, grazie ad un processo produttivo più efficiente.

Se in $t = 1$ entrambe le imprese iniziano a produrre, il gioco termina e la struttura di mercato è duopolistica. In caso contrario si osserva cosa accade in $t = 2$. A tale epoca può aversi che:

- entrambe iniziano a produrre;
- soltanto una delle due produce;
- nessuna delle due imprese produce (il valore attuale netto del progetto complessivo, R&S + produzione, è pari a zero).

Infine può accadere che in $t = 1$ soltanto una delle due imprese inizia a produrre e in $t = 2$ si osserva cosa fa l'altra.

Supponiamo che il prezzo di mercato, P, del prodotto finale di ciascuna impresa sia funzione della quantità totale $Q_i + Q_j$:

$$P = [\theta_t - (Q_i + Q_j)] \tag{1}$$

$$i = A,\, B; \quad j = A,\, B; \quad i \neq j; \quad Q_i,\, Q_j \geq 0; \quad \theta_t > 0.$$

Se $Q_i = Q_j = 0$ allora $P = \theta_t$. All'aumentare delle quantità prodotte il prezzo diminuisce. Affinchè tale prezzo sia strettamente positivo deve risultare:

$$\theta_t > Q_i + Q_j.$$

Siano $C(Q_i)$ e $C(Q_j)$ i costi totali di produzione delle imprese i e j :

$$C(Q_i) = c_i\, Q_i, \quad c_i > 0 \tag{2}$$

$$C(Q_j) = c_j\, Q_j, \quad c_j > 0 \tag{3}$$

c_i è il costo unitario variabile di produzione dell'impresa i;

c_j è il costo unitario variabile di produzione dell'impresa j;

$c_i = \alpha\, c, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad c > 0$

$c_j = \beta\, c, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad c > 0$

α e β sono i parametri secondo cui diminuiscono i costi unitari se l'investimento in R&S ha successo, mentre c è il costo unitario per entrambe le imprese, relativo alla tecnologia produttiva esistente.

Se all'epoca $t = 0$ sia i che j investono nella ricerca e quest'ultima si conclude con esito positivo, allora $\alpha = \beta < 1$ per cui $c_i = c_j = \alpha c$. In caso di fallimento o di mancata attivazione della fase di R&S, $\alpha = \beta = 1$ e quindi $c_i = c_j = c$.

Se invece soltanto l'impresa i (o l'impresa j) investe in R&S ottenendo un risultato positivo, il suo costo c_i (c_j) sarà pari a $\alpha\, c$ $(\beta\, c)$ e sarà inferiore al costo c del concorrente.

Siano inoltre:

- k il tasso d'interesse adeguato al rischio;
- r il tasso d'interesse di breve periodo vigente sul mercato;
- I la spesa necessaria per attivare la produzione;
- γ la percentuale d'imposizione fiscale.

Il profitto lordo, π_i, ed il profitto netto, g_i, relativi all'impresa i sono:

$$\pi_i = P\, Q_i - c_i\, Q_i = Q_i\, [(\theta_t - c_i) - Q_j] - Q_i^2 \tag{4}$$

$$g_i = (1 - \gamma)\, \pi_i = Q_i\, [(1 - \gamma)(\theta_t - c_i - Q_j)] + (\gamma - 1)\, Q_i^2\, . \tag{5}$$

Ipotizzando che tali profitti siano costanti e perpetui a partire dalla fine dell'epoca in cui il gioco termina ($t = 1$ se entrambe iniziano a produrre o $t = 2$ se nessuna delle due o soltanto una di esse produce nel periodo precedente), il valore attuale lordo V_i del progetto dell'impresa i è:

$$V_i = \frac{g_i}{k}\, . \tag{6}$$

Di conseguenza il valore attuale netto, VAN_i, è:

$$VAN_i = \frac{g_i}{k} - I\,. \tag{7}$$

Risultati analoghi si ottengono per l'impresa j.

Supponiamo che le due imprese siano in competizione per le quantità prodotte. L'impresa i produce quella quantità che massimizza il proprio profitto sapendo quanto prodotto dal concorrente. Annullando la derivata parziale di g_i rispetto a Q_i, si ottiene:

$$R_i(Q_j) = Q_i = \frac{\theta_t - c_i - Q_j}{2} \tag{8}$$

Analogamente Q_j è pari a:

$$R_j(Q_i) = Q_j = \frac{\theta_t - c_j - Q_i}{2}\,. \tag{9}$$

Osserviamo subito che tali grandezze non dipendono dalla percentuale di imposizione fiscale. Se entrambe le imprese iniziano a produrre nello stesso periodo ($t = 1$ o $t = 2$) le quantità di equilibrio, Q_i^* e Q_j^*, sono soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} Q_i^* = \dfrac{\theta_t - c_i - Q_j^*}{2} \\ \\ Q_j^* = \dfrac{\theta_t - c_j - Q_i^*}{2} \end{cases} \tag{10}$$

ovvero

$$Q_i^* = \frac{\theta_t - 2c_i + c_j}{3} \tag{11}$$

e

$$Q_j^* = \frac{\theta_t - 2c_j + c_i}{3}\,. \tag{12}$$

Affinchè prezzo e quantità siano strettamente positivi devono essere soddisfatte le seguenti disuguaglianze:

$$\theta_t > 2c_i - c_j$$

e

$$\theta_t > 2c_j - c_i \,.$$

Sostituendo Q_i^* nelle equazioni (5) e (7) si ottengono rispettivamente il profitto netto e il valore attuale netto dell'impresa i all'epoca in cui entrambe avviano la produzione (in $t = 1$ o in $t = 2$) :

$$g_i^{\,*} = \frac{(\theta_t - 2c_i + c_j)^2}{9}\,(1 - \gamma) \tag{13}$$

$$VAN_i^* = \frac{(\theta_t - 2c_i + c_j)^2}{9k}\,(1 - \gamma) - I \,. \tag{14}$$

Per l'impresa j si ha:

$$g_j^{\,*} = \frac{(\theta_t - 2c_j + c_i)^2}{9}\,(1 - \gamma) \tag{15}$$

$$VAN_j^* = \frac{(\theta_t - 2c_j + c_i)^2}{9k}\,(1 - \gamma) - I \,. \tag{16}$$

I rispettivi VAN sono positivi se:

$$\frac{(\theta_t - 2c_i + c_j)^2}{9k}\,(1 - \gamma) - I > 0$$

e

$$\frac{(\theta_t - 2c_j + c_i)^2}{9k}\,(1 - \gamma) - I > 0$$

ovvero se sono soddisfatte contemporaneamente le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \theta_t < 2c_i - c_j - 3\sqrt{\dfrac{kI}{1-\gamma}} \quad \cup \quad \theta_t > 2c_i - c_j + 3\sqrt{\dfrac{kI}{1-\gamma}} \\ \theta_t < 2c_j - c_i - 3\sqrt{\dfrac{kI}{1-\gamma}} \quad \cup \quad \theta_t > 2c_j - c_i + 3\sqrt{\dfrac{kI}{1-\gamma}} \\ \theta_t > 2c_i - c_j \\ \theta_t > 2c_j - c_i \,. \end{cases} \tag{17}$$

Supponiamo ora che in $t = 1$ entrambe le imprese abbiano deciso di non avviare la fase produttiva. Se all'epoca $t = 2$ soltanto l'impresa i produce, ovvero $Q_j = 0$, essa diventa monopolista; sostituendo Q_j nell'equazione (8) si avrà:

$$Q_i^* = \frac{\theta_t - c_i}{2} \,. \tag{18}$$

Affinchè prezzo e quantità siano strettamente positivi deve risultare:

$$\theta_t > c_i \,.$$

Il profitto netto e il VAN del monopolista sono rispettivamente:

$$g_i^* = \frac{(\theta_t - c_i)^2}{4} (1 - \gamma) \tag{19}$$

$$VAN_i^* = \frac{(\theta_t - c_i)^2}{4k} (1 - \gamma) - I \,. \tag{20}$$

Il valore attuale netto è positivo se:

$$\frac{(\theta_t - c_i)^2}{4k} (1 - \gamma) - I > 0 \tag{21}$$

ovvero se è soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} \theta_t < c_i - 2\sqrt{\dfrac{kI}{1-\gamma}} \quad \cup \quad \theta_t > c_i + 2\sqrt{\dfrac{kI}{1-\gamma}} \\ \theta_t > c_i \,. \end{cases} \tag{22}$$

Risultati analoghi si ottengono nel caso in cui j sia monopolista.

Se, infine, l'impresa i inizia a produrre in $t = 1$ e j in $t = 2$, quest'ultima fisserà la propria quantità Q_j dopo aver osservato quanto prodotto da i. A sua volta l'impresa che agisce per prima massimizza il proprio profitto assumendo nota la funzione di reazione di j. Ricordando che:

$$Q_j = \frac{\theta_t - c_j - Q_i}{2}$$

si ha che il profitto dell'impresa i è pari a:

$$g_i = Q_i \,(1-\gamma) \left(\frac{\theta_t - 2c_i + c_j + Q_i}{2} \right) + (\gamma - 1)\, Q_i^2 \,. \tag{23}$$

Annullando la derivata di g_i rispetto a Q_i si ottiene la quantità Q_i^* che massimizza il profitto, cioè:

$$Q_i^* = \frac{\theta_t - 2c_i + c_j}{2} \,. \tag{24}$$

Sostituendo tale grandezza nell'equazione (9) si ottiene la quantità Q_j^* che massimizza il profitto dell'impresa j:

$$Q_j^* = \frac{\theta_t + 2c_i - 3c_j}{4} \,. \tag{25}$$

Per far sì che P, Q_i^* e Q_j^* siano strettamente positivi deve risultare:

$$\theta_t > 2c_i - c_j$$

e

$$\theta_t > 3c_j - 2c_i \,.$$

All'epoca $t = 2$ il massimo profitto netto ed il VAN dell'impresa i sono rispettivamente:

$$g_i^* = \frac{(\theta_t\, -\, 2c_i + c_j)^2}{8}\,(1\, -\, \gamma) \tag{26}$$

$$VAN_i^* = \frac{(\theta_t\, -\, 2c_i + c_j)^2}{8k}\,(1\, -\, \gamma)\,. \tag{27}$$

Osserviamo che il VAN concide con il valore attuale lordo V_i dell'investimento in quanto l'impresa detrae la spesa I, necessaria per avviare la produzione, in $t = 1$.
In $t = 2$ il profitto massimo ed il valore attuale netto relativi all'impresa j sono rispettivamente pari a:

$$g_j^* = \frac{(\theta_t\, +\, 2c_i - 3c_j)^2}{16}\,(1\, -\, \gamma) \tag{28}$$

$$VAN_j^* = \frac{(\theta_t\, +\, 2c_i - 3c_j)^2}{16k}\,(1\, -\, \gamma)\, -\, I\,. \tag{29}$$

I payoff delle due imprese sono positivi se:

$$\frac{(\theta_t\, -\, 2c_i + c_j)^2}{8k}\,(1\, -\, \gamma)\, >\, 0 \tag{30}$$

e

$$\frac{(\theta_t\, +\, 2c_i - 3c_j)^2}{16k}\,(1\, -\, \gamma)\, -\, I\, >\, 0 \tag{31}$$

ovvero per quei valori di θ_t che soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} \theta_t\, <\, 3c_j\, -\, 2c_i - 4\sqrt{\dfrac{kI}{1\, -\, \gamma}} \quad \cup \quad \theta_t\, >\, 3c_j\, -\, 2c_i + 4\sqrt{\dfrac{kI}{1\, -\, \gamma}} \\ \theta_t\, >\, 2c_i\, -\, c_j \\ \theta_t\, >\, 3c_j\, -\, 2c_i\,. \end{cases} \tag{32}$$

Riepilogando, se entrambe le imprese decidono all' epoca $t = 2$ se iniziare o meno a produrre, possono aversi i valori attuali netti o payoff racchiusi nella seguente matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} \left[\frac{(\theta_t - 2c_i + c_j)^2}{9k}(1 - \gamma) - I, \quad \frac{(\theta_t - 2c_j + c_i)^2}{9k}(1 - \gamma) - I\right] & \left[\frac{(\theta_t - c_i)^2}{4k}(1 - \gamma) - I, \quad 0\right] \\ \\ \left[0, \quad \frac{(\theta_t - c_j)^2}{4k}(1 - \gamma) - I\right] & [0, \ 0] \end{pmatrix} \tag{33}$$

- L' elemento a_{11} rappresenta i VAN delle due imprese nel caso in cui entrambe decidono di produrre (I, I);
- l' elemento a_{12} rappresenta i VAN nel caso in cui soltanto l' impresa i inizia a produrre (I, D);
- l' elemento a_{21} rappresenta i VAN nel caso in cui soltanto l' impresa j avvia la produzione (D, I);
- infine l' elemento a_{22} rappresenta i VAN nel caso in cui entrambe le imprese abbandonano il progetto (D, D).

Se in $t = 1$ soltanto l' impresa i inizia a produrre, i payoff finali ($t = 2$) sono:

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{(\theta_t - 2c_i + c_j)^2}{8k}(1 - \gamma), \quad \frac{(\theta_t + 2c_i - 3c_j)^2}{16k}(1 - \gamma) - I\right] \\ \\ \left[\frac{(\theta_t - c_i)^2}{4k}(1 - \gamma), \quad 0\right] \end{pmatrix} \tag{34}$$

Se invece all'epoca $t = 1$ soltanto j produce, i payoff in $t = 2$ sono:

$$\left(\begin{array}{l} \left[\dfrac{(\theta_t - 2c_j + c_i)^2}{8k} (1 - \gamma), \quad \dfrac{(\theta_t + 2c_j - 3c_i)^2}{16k} (1 - \gamma) - I \right] \\ \\ \left[\dfrac{(\theta_t - c_j)^2}{4k} (1 - \gamma), \quad 0 \right] \end{array} \right) \tag{35}$$

La prima riga di ciascuno dei vettori su indicati riporta i VAN delle due imprese nel caso in cui j (i) avvia la fase produttiva (in $t = 2$); la seconda riga, invece, mostra i payoff nel caso in cui j (i) abbandona il progetto.
Individuata la strategia ottimale (secondo il criterio del maxmin) si calcolano, attraverso un processo a ritroso, i valori attuali netti relativi al periodo precedente:

$$VAN_i(t) = \frac{VAN_i(t+1,\, u)\ \cdot p + VAN_i(t+1,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r}\,, \qquad t = 1$$

$$VAN_j(t) = \frac{VAN_j(t+1,\, u)\ \cdot p + VAN_j(t+1,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r}\,, \qquad t = 1\,.$$

Se l'impresa $i\,(j)$ inizia a produrre all'epoca $t = 1$, il suo valore attuale netto relativo a tale data è pari a:

$$VAN_i(t) = \frac{V_i(t+1,\, u)\ \cdot p + V_i(t+1,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r} - I + \frac{(\theta_t - c_i)^2}{4(k+1)} (1 - \gamma), \qquad t = 1$$

$$\left(VAN_j(t) = \frac{V_j(t+1,\, u)\ \cdot p + V_j(t+1,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r} - I + \frac{(\theta_t - c_j)^2}{4(k+1)} (1 - \gamma), \qquad t = 1 \right)\,.$$

Infine, all'epoca $t = 0$ il valore attuale netto, $VAN^*(0)$ (VAN esteso), è pari a:

$$VAN_i^*(0) = \frac{VAN_i(t,\, u)\ \cdot p + VAN_i(t,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r} - K_i\,, \qquad t = 1$$

$$VAN_j^*(0) = \frac{VAN_j(t,\, u)\ \cdot p + VAN_j(t,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r} - K_j\,, \qquad t = 1$$

$$VAN_i^*(0) = \frac{VAN_i(t,\, u)\ \cdot p + VAN_i(t,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r}\,, \qquad t = 1$$

$$VAN_j^*(0) = \frac{VAN_j(t,\, u)\ \cdot p + VAN_j(t,\, d)\ \cdot (1-p)}{1+r}\,, \qquad t = 1$$

a seconda che le imprese investano o meno in R&S.

La scelta dipende da quanto vale il VAN esteso.

4 Esempio numerico

Esaminiamo ora quali possibili situazioni possono verificarsi all'epoca $t = 2$ al variare del parametro θ_t.

4.1 Caso n. 1

Supponiamo che:

- entrambe le imprese, in $t = 0$, abbiano investito in R&S ottenendo un risultato positivo per cui $c_i = c_j = \alpha c = 0,6 \cdot 5 = 3$;
- $k = 0,13, \quad r = 0,10$;
- $I = 100$;
- $(1 - \gamma) = 0,6$

I valori dei parametri k, r, c ed I sono quelli utilizzati negli esempi di Smit e Trigeorgis (1997).

Analizziamo innanzitutto la situazione in cui entrambe le imprese decidono, in $t = 2$, se iniziare o meno a produrre; i possibili risultati sono riepilogati nella seguente matrice (ottenuta sostituendo nella (33) i valori su indicati):

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{(\theta_t - 3)^2}{1,17}\,0,6 - 100, \quad \dfrac{(\theta_t - 3)^2}{1,17}\,0,6 - 100\right] & \left[\dfrac{(\theta_t - 3)^2}{0,52}\,0,6 - 100, \quad 0\right] \\ & \\ \left[0, \quad \dfrac{(\theta_t - 3)^2}{0,52}\,0,6 - 100\right] & [0, \ 0] \end{pmatrix} \tag{36}$$

Il primo risultato di ogni coppia di valori si riferisce all'impresa i mentre il secondo all'impresa j.

- Se l' impresa i inizia a produrre, il concorrente farà lo stesso se:

$$\frac{(\theta_t - 3)^2}{1,17}\, 0,6 \,-\, 100 \,>\, 0 \tag{37}$$

ovvero se

$$\theta_t \,>\, 17. \tag{38}$$

- Se l' impresa i abbandona il progetto, j inizierà a produrre se:

$$\frac{(\theta_t \,-\, 3)^2}{0,52}\, 0,6 \,-\, 100 \,>\, 0 \tag{39}$$

ovvero se

$$\theta_t \,>\, 12\,. \tag{40}$$

Analogamente risulta che:

- se l' impresa j inizia a produrre, i farà lo stesso se:

$$\theta_t \,>\, 17. \tag{41}$$

- se l' impresa j abbandona il progetto, i inizierà a produrre se:

$$\theta_t \,>\, 12\,. \tag{42}$$

Quindi:

- se $0 \,<\, \theta_t \,\leq\, 12$ entrambe le imprese abbandonano il progetto (unico equilibrio di Nash in strategie pure);
- se $12 \,<\, \theta_t \,\leq\, 17$ vi sono 2 equilibri di Nash in strategie pure, (I, D) e (D, I);
- se $\theta_t \,>\, 17$ entrambe iniziano a produrre (unico equilibrio di Nash in strategie pure).

Supponiamo ora che l'impresa i decida di avviare la fase produttiva all'epoca $t = 1$, mentre j rinvia la decisione al periodo successivo. I possibili risultati sono (vedi vettore (34)):

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{(\theta_t - 3)^2}{1,04}\, 0,6, \quad \frac{(\theta_t - 3)^2}{2,08}\, 0,6 \, - 100\right] \\ \\ \left[\frac{(\theta_t \, - \, 3)^2}{0,52}\, 0,6, \quad 0\right] \end{pmatrix} \tag{43}$$

All'impresa j conviene avviare la produzione in $t = 2$ se:

$$\frac{(\theta_t - 3)^2}{2,08}\, 0,6 \, - 100 \, > \, 0 \tag{44}$$

cioè se:

$$\theta_t \, > \, 22\,. \tag{45}$$

Analogamente se l'impresa j inizia a produrre in $t = 1$, all'impresa i conviene produrre nel periodo successivo se:

$$\theta_t \, > \, 22\,. \tag{46}$$

Entrambe le imprese, quindi, iniziano a produrre se:

$$\theta_t \, > \, 22\,.$$

4.2 Caso n. 2

All' epoca $t = 0$ le imprese in questione non investono nella ricerca, per cui $c_i = c_j = 5$ (la situazione è analoga a quella in cui l' investimento in R&S si conclude con esito negativo); inoltre esse scelgono, in $t = 2$, se produrre o meno. I possibili risultati sono:

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{(\theta_t - 5)^2}{1,17}\, 0,6 - 100, \quad \dfrac{(\theta_t - 5)^2}{1,17}\, 0,6 - 100\right] & \left[\dfrac{(\theta_t - 5)^2}{0,52}\, 0,6 - 100, \quad 0\right] \\ \\ \left[0, \quad \dfrac{(\theta_t - 5)^2}{0,52}\, 0,6 - 100\right] & [0,\ 0] \end{pmatrix} \tag{47}$$

- Se l' impresa i inizia a produrre, j farà lo stesso se:

$$\frac{(\theta_t - 5)^2}{1,17}\, 0,6 - 100 > 0 \tag{48}$$

ovvero se

$$\theta_t > 19\,. \tag{49}$$

- Se l' impresa i abbandona il progetto, j inizierà a produrre se:

$$\frac{(\theta_t - 5)^2}{0,52}\, 0,6 - 100 > 0 \tag{50}$$

ovvero se

$$\theta_t > 14\,. \tag{51}$$

Analogamente si ha che:

- se l' impresa j inizia a produrre, i farà lo stesso se:

$$\theta_t > 19\,; \tag{52}$$

- se invece l'impresa j abbandona il progetto, i inizierà a produrre se:

$$\theta_t \; > \; 14\,. \tag{53}$$

Quindi:

- se $0 \; < \; \theta_t \; \leq \; 14$ entrambe le imprese abbandonano il progetto (unico equilibrio di Nash in strategie pure);

- se $14 \; < \; \theta_t \; \leq \; 19$ vi sono 2 equilibri di Nash in strategie pure, (I, D) e (D, I);

- se $\theta_t \; > \; 19$ entrambe iniziano a produrre (unico equilibrio di Nash in strategie pure).

Osserviamo che rispetto al caso precedente i valori soglia sono maggiori a causa dei più alti costi unitari di produzione.

Supponiamo ora che l'impresa i decida di avviare la fase produttiva in $t = 1$, mentre j rinvia la decisione al tempo 2. I possibili risultati sono:

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{(\theta_t - 5)^2}{1,04}\; 0,6, \quad \dfrac{(\theta_t - 5)^2}{2,08}\; 0,6\; - 100\right] \\ \\ \left[\dfrac{(\theta_t \; - \; 5)^2}{0,52}\; 0,6, \quad 0\right] \end{pmatrix} \tag{54}$$

L'impresa j inizia a produrre in $t = 2$ se:

$$\frac{(\theta_t - 5)^2}{2,08}\; 0,6\; - 100 > 0 \tag{55}$$

cioè se:

$$\theta_t \; > \; 24\,. \tag{56}$$

Analogamente se j inizia a produrre in $t = 1$, all'impresa i conviene produrre nel periodo successivo se:

$$\theta_t > 24\,. \tag{57}$$

Entrambe le imprese, quindi, iniziano a produrre se:

$$\theta_t > 24\,.$$

4.3 Caso n. 3

All' epoca $t = 0$ soltanto i investe in R&S ottenendo poi un risultato positivo, quindi $c_i = 3$ e $c_j = 5$.

Se entrambe le imprese decidono all' epoca $t = 2$ se produrre o meno, si hanno i seguenti payoff:

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{(\theta_t - 1)^2}{1,17}\,0,6 - 100, \quad \frac{(\theta_t - 7)^2}{1,17}\,0,6 - 100\right] & \left[\frac{(\theta_t - 3)^2}{0,52}\,0,6 - 100, \quad 0\right] \\ \\ \left[0, \quad \frac{(\theta_t - 5)^2}{0,52}\,0,6 - 100\right] & [0,\ 0] \end{pmatrix} \tag{58}$$

- Se l' impresa i inizia a produrre, l' impresa j farà lo stesso se:

$$\frac{(\theta_t - 7)^2}{1,17}\,0,6 - 100 > 0 \tag{59}$$

ovvero se

$$\theta_t > 21\,. \tag{60}$$

- Se l' impresa i abbandona il progetto, j inizierà a produrre se:

$$\frac{(\theta_t - 5)^2}{0,52}\,0,6 - 100 > 0 \tag{61}$$

ovvero se

$$\theta_t > 14\,. \tag{62}$$

- Se invece l' impresa j inizia a produrre, i farà lo stesso se:

$$\frac{(\theta_t - 1)^2}{1,17}\,0,6 - 100 > 0 \tag{63}$$

cioè se

$$\theta_t \, > \, 15\,. \tag{64}$$

- Se infine l'impresa j decide di non produrre, i darà inizio alla fase produttiva se:

$$\frac{(\theta_t - 3)^2}{1,17}\, 0,6 \, - 100 \, > \, 0 \tag{65}$$

cioè se

$$\theta_t \, > \, 12\,. \tag{66}$$

Riassumendo:

- se $0 \, < \, \theta_t \, \leq \, 12$ entrambe le imprese abbandonano il progetto (unico equilibrio di Nash in strategie pure);
- se $12 \, < \, \theta_t \, \leq \, 14$ soltanto l'impresa i inizia a produrre (unico equilibrio di Nash in strategie pure);
- se $14 \, < \, \theta_t \, \leq \, 15$ vi sono 2 equilibri di Nash in strategie pure, (I, D) e (D, I);
- se $15 \, < \, \theta_t \, \leq \, 21$ soltanto l'impresa i produce (unico equilibrio di Nash in strategie pure);
- se $\theta_t \, > \, 21$ entrambe iniziano a produrre (unico equilibrio di Nash in strategie pure).

Supponiamo ora che l'impresa i decida di iniziare a produrre in $t = 1$, mentre j rinvia la decisione al tempo 2. I possibili risultati sono:

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{(\theta_t - 1)^2}{1,04}\, 0,6, \quad \dfrac{(\theta_t - 9)^2}{2,08}\, 0,6 \, - 100\right] \\ \\ \left[\dfrac{(\theta_t \, - \, 3)^2}{0,52}\, 0,6, \quad 0\right] \end{pmatrix} \tag{67}$$

L' impresa j inizia a produrre in $t = 2$ se:

$$\frac{(\theta_t - 9)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100\ >\ 0 \tag{68}$$

cioè se:

$$\theta_t\ >\ 28\,. \tag{69}$$

Se invece j inizia a produrre in $t = 1$, i possibili payoff sono:

$$\begin{pmatrix} \left[\dfrac{(\theta_t - 7)^2}{1,04}\ 0,6, \quad \dfrac{(\theta_t + 1)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100\right] \\ \\ \left[\dfrac{(\theta_t\ - 5)^2}{0,52}\ 0,6, \quad 0\right] \end{pmatrix} \tag{70}$$

L'impresa i, in $t = 2$, deciderà di produrre se:

$$\frac{(\theta_t + 1)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 > 0 \tag{71}$$

ovvero se:

$$\theta_t\ >\ 18\,. \tag{72}$$

Risultati analoghi si ottengono nel caso in cui soltanto l' impresa j investa in R&S conseguendo un risultato positivo.

Nell' analisi effettuata i valori del parametro θ_t sono approssimati a volte per eccesso, altre per difetto. Inoltre, poichè la presenza di più equilibri di Nash comporta problemi di scelta, si adotta il criterio del maxmin per risolvere l' intero gioco.

Fissiamo ora la domanda di mercato θ_0 all'epoca $t = 0$.

Siano $\theta_0 = 17,5$, $u = 1,25$, $d = 0,80$ e siano A e B le due imprese considerate. Entrambe hanno la possibilità di investire 100 in R&S ($K_A = K_B = 100$), le probabilità di successo, η_A ed η_B, sono pari a $0,5$ e vi è informazione completa circa il risultato dell'investimento stesso. All'epoca $t = 0$ i rispettivi payoff P_A e P_B al lordo dei costi K_A e K_B variano al verificarsi delle seguenti situazioni (vedi figura 1 e appendice A per i calcoli dettagliati):

- se soltanto l'impresa A (B) investe in R&S conseguendo un risultato positivo (o, equivalentemente, se entrambe investono nella ricerca ma B (A) fallisce) i payoff sono:

$$P_A\,(P_B) = 74$$

$$P_B\,(P_A) = 5$$

- se entrambe investono con successo in R&S:

$$P_A = P_B = 33$$

- se infine nessuna delle due imprese avvia la fase della ricerca (o, equivalentemente, entrambe investono in R&S conseguendo però un risultato negativo o soltanto una delle due investe in R&S, fallendo) risulta che:

$$P_A = P_B = 17.$$

I valori attuali netti in $t = 0$ si ottengono secondo quanto segue:

1. se soltanto una delle due imprese (A o B) investe in R&S si ha (vedi figura 1):

$$VAN_A(VAN_B) = [0,5 \cdot 74 + 0,5 \cdot 17] - 100 = -54$$

$$VAN_B(VAN_A) = [0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 17] = 11$$

2. se nessuna delle due imprese investe in R&S si ha :

$$VAN_A = VAN_B = 17$$

3. se entrambe investono in R&S i valori attuali netti sono pari a $(-67, -67)$. Le possibili quattro coppie di payoff, P_A e P_B, sono:

   - $(33, 33)$ se per entrambe l' investimento si conclude con successo, per cui i costi unitari di produzione si riducono a 3 (vedi figura 5);
   - $(74, 5)$ o $(5, 74)$ a seconda che l' impresa A o B termini con esito positivo la ricerca, mentre l' altra fallisce (i risultati sono identici a quelli che si ottengono se soltanto una delle due imprese investe in R&S - vedi figure 8 e 11);
   - $(17, 17)$ se entrambe falliscono (la situazione è uguale a quella in cui nessuna delle due imprese investe nella ricerca - vedi figura 2).

   Ricordando che le probabilità di successo η_A e η_B sono pari a $0,5$ si hanno i seguenti valori medi:

$$0,5 \cdot 33 + 0,5 \cdot 74 = 54$$

$$0,5 \cdot 33 + 0,5 \cdot 5 = 19$$

$$0,5 \cdot 5 + 0,5 \cdot 17 = 11$$

$$0,5 \cdot 74 + 0,5 \cdot 17 = 46$$

   e di conseguenza i VAN sono pari a :

$$VAN_A = [54 \cdot 0,5 + 11 \cdot 0,5] - 100 = -67$$

$$VAN_B = [19 \cdot 0,5 + 46 \cdot 0,5] - 100 = -67.$$

Applicando il criterio del maxmin si ha che la strategia migliore per entrambe le imprese consiste nel rinviare l' investimento in R&S con un risultato complessivo pari a $(17, 17)$ come da figura 1.

5 Conclusioni

La metodologia dei Real Options Games tiene conto dell' ambiente dinamico in cui le imprese svolgono la propria attività. Esse non sono più obbligate a decidere subito ma possono scegliere, in tempi successivi, se avviare o meno un determinato progetto in base alle nuove informazioni riguardanti l' evoluzione del mercato.

Se, nell' esempio considerato, le imprese A e B non investono in R&S e mantengono l' opzione di iniziare o meno a produrre, il VAN all' epoca $t = 0$ (VAN esteso) si ottiene sommando il valore dell' opzione (avviare o meno la fase produttiva) ed il valore relativo al VAN statico ottenuto ipotizzando che all' epoca $t = 0$ entrambe le imprese decidano di produrre.

In particolare:

- se in $t = 1$ la domanda di mercato aumenta, cioè $\theta_1 = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$ e $c_A = c_B = 5$, si ha:

$$VAN_A = VAN_B = \frac{(21,875 - 5)^2}{1,17}\, 0,6 - 100 = 46$$

- se invece in $t = 1$ la domanda di mercato diminuisce, cioè $\theta_1 = 17,5 \cdot 0,80 = 14$ e $c_A = c_B = 5$, si ha:

$$VAN_A = VAN_B = \frac{(14 - 5)^2}{1,17}\, 0,6 - 100 = -58\,.$$

All' epoca $t = 0$ avremo:

$$VAN_A = VAN_B = \frac{46\,(0,41) - 58\,(0,59)}{1,10} = -14\,.$$

Ricordando che:

$$VAN\,\text{esteso} = VAN\,\text{statico} + \text{flessibilità o valore dell' opzione}$$

si ha che:

$$\text{flessibilità} \,=\, 17 \,+\, 14 \,=\, 31.$$

Secondo il VAN statico nessuna delle due imprese dovrebbe iniziare a produrre; sfruttando invece l'opzione risulta vantaggioso per entrambe avviare la fase produttiva se la domanda di mercato aumenta.

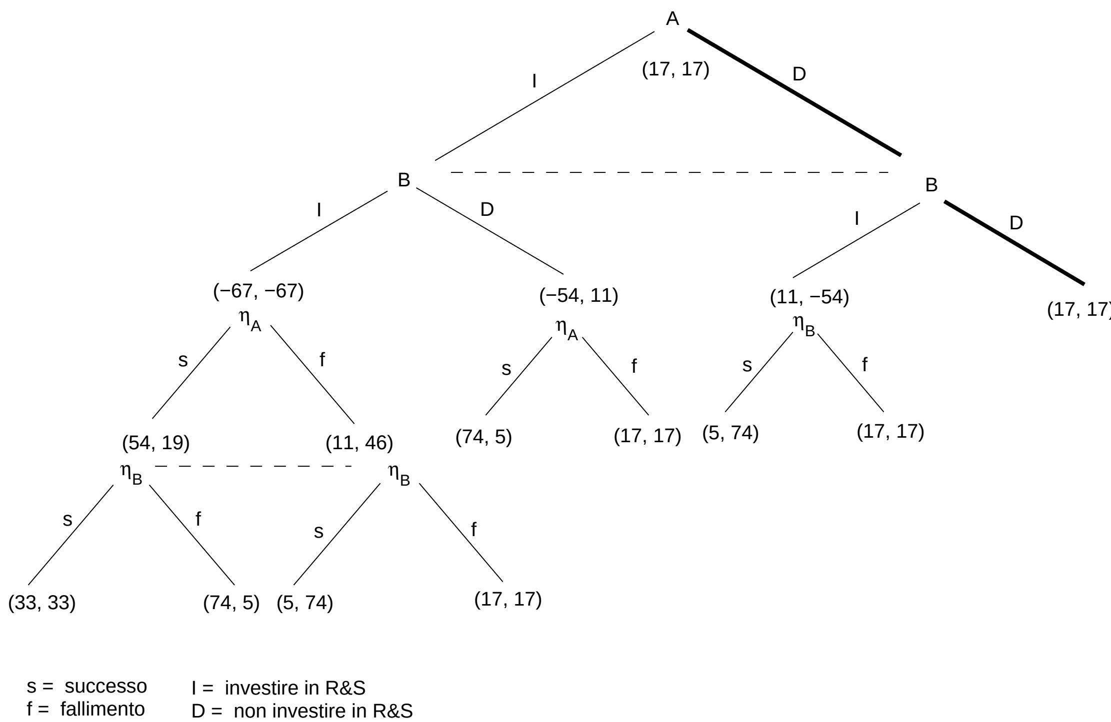

Figura 1: *la strategia ottimale per entrambe le imprese consiste nel non investire in R&S (come risulta dai rami in neretto).*

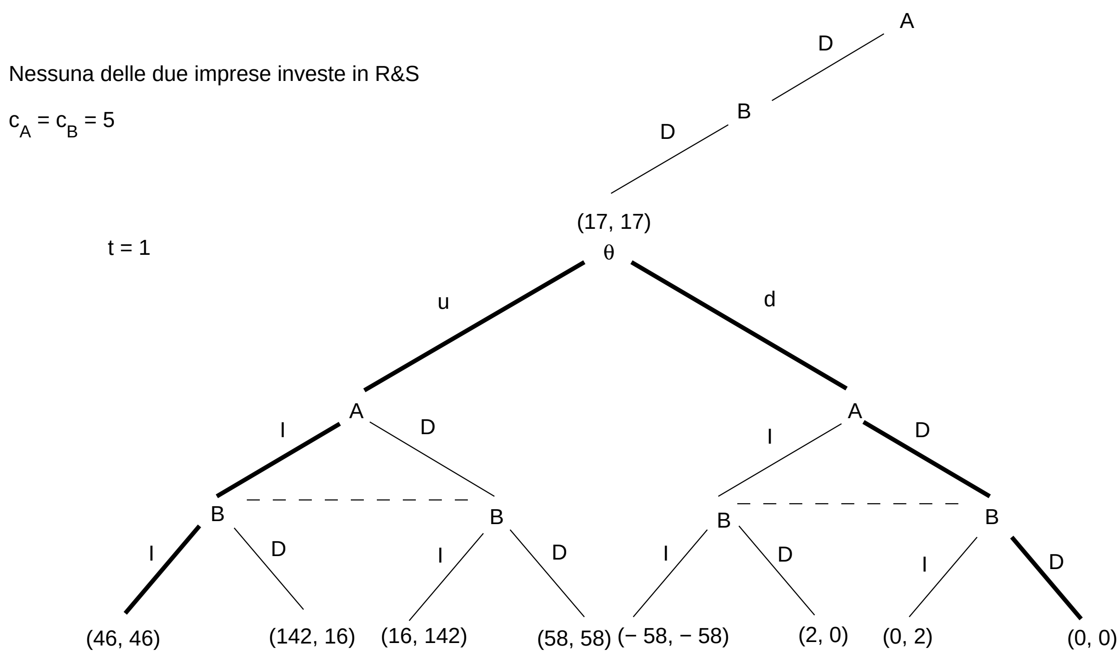

Figura 2: *la struttura ad albero riporta i VAN delle due imprese, all'epoca $t = 1$, a seconda delle azioni intraprese; la coppia $(17, 17)$ rappresenta il valore attuale netto in $t = 0$; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per le imprese A e B.*

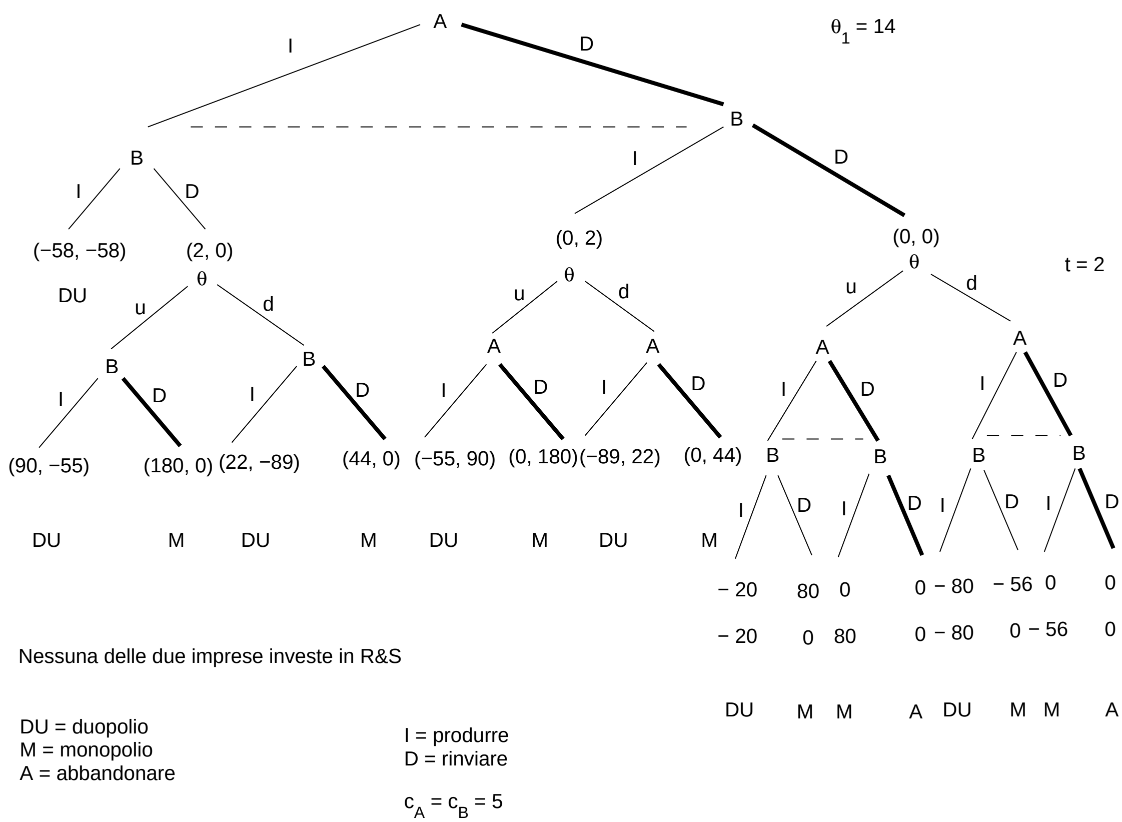

Figura 3: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di una diminuzione della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

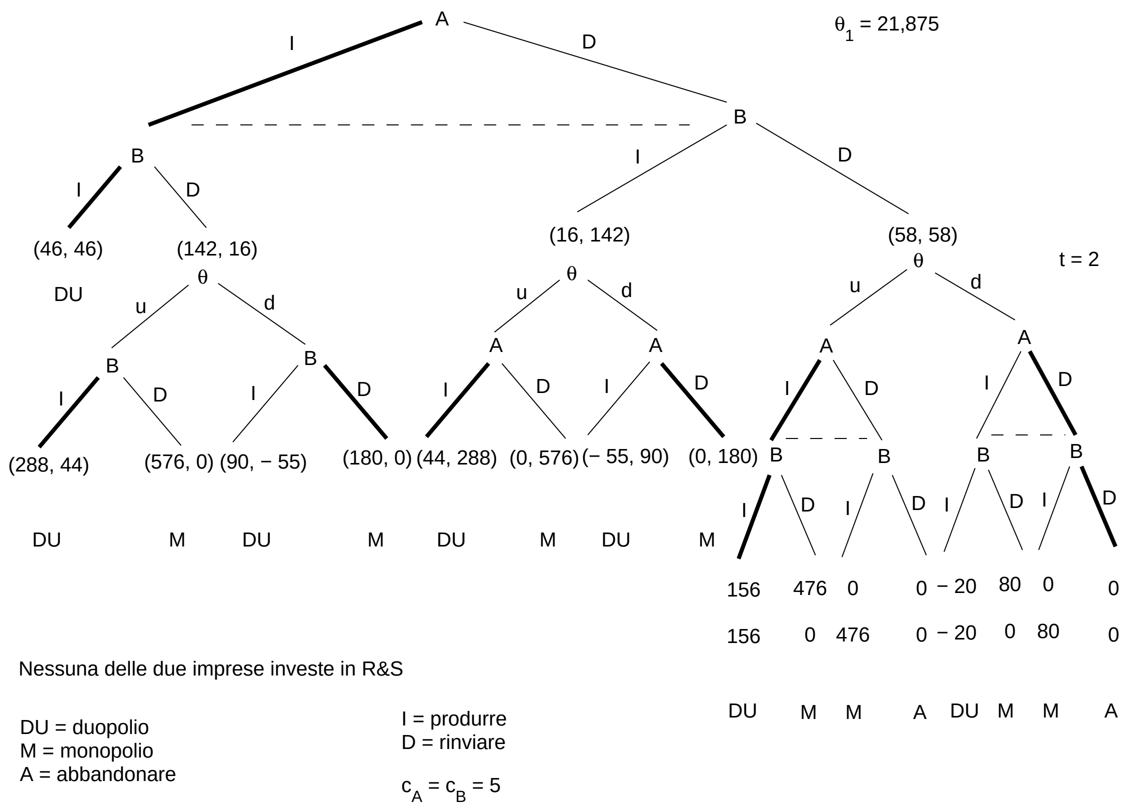

Figura 4: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di un aumento della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

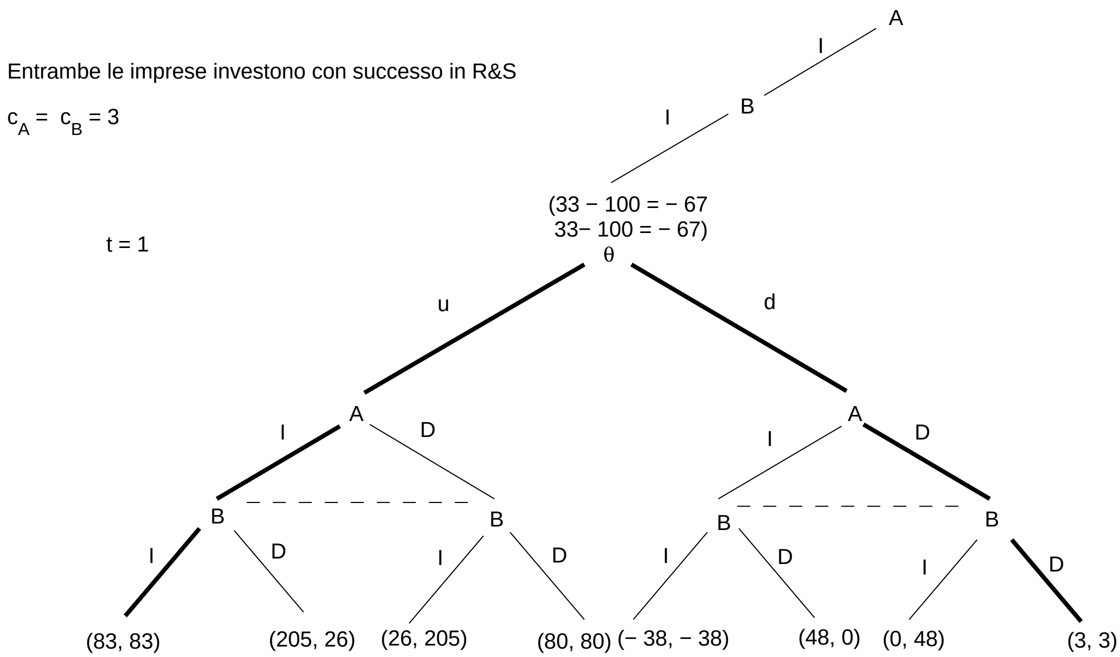

Figura 5: *la struttura ad albero riporta i VAN delle due imprese, all'epoca $t = 1$, a seconda delle azioni intraprese; la coppia $(-67, -67)$ rappresenta il valore attuale netto in $t = 0$; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per le imprese A e B.*

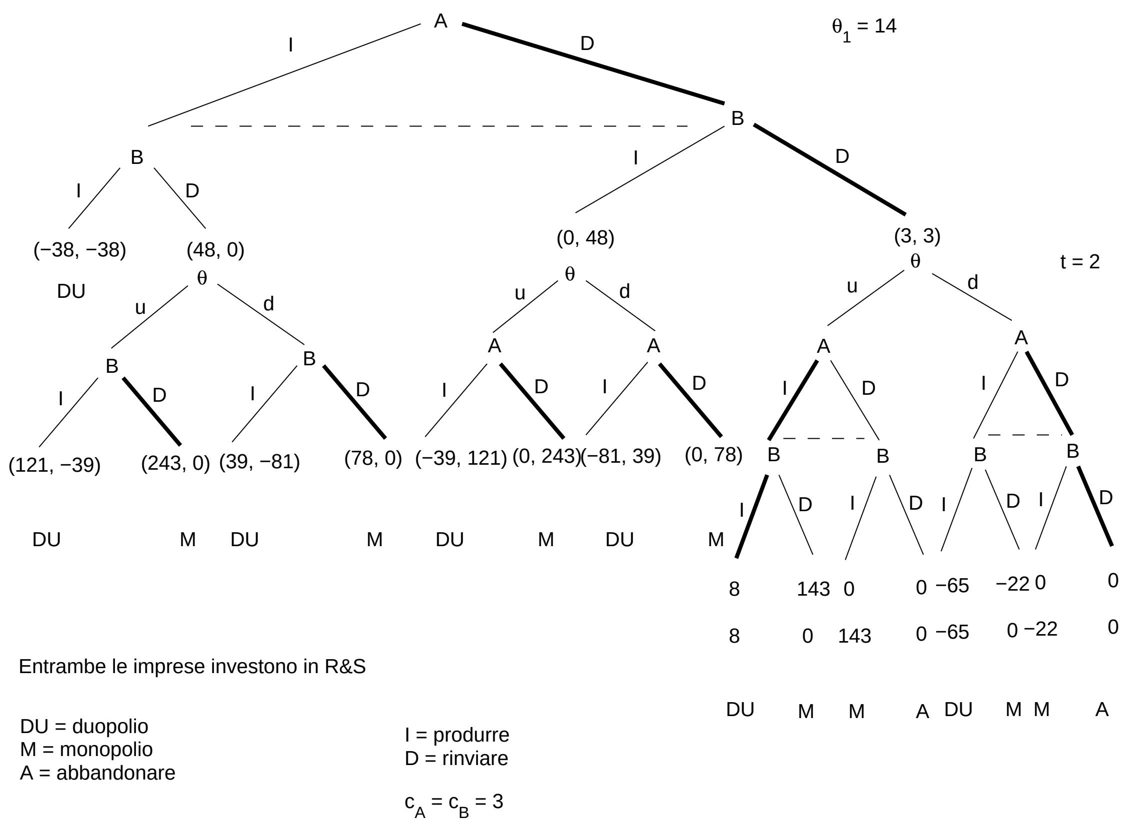

Figura 6: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di una diminuzione della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

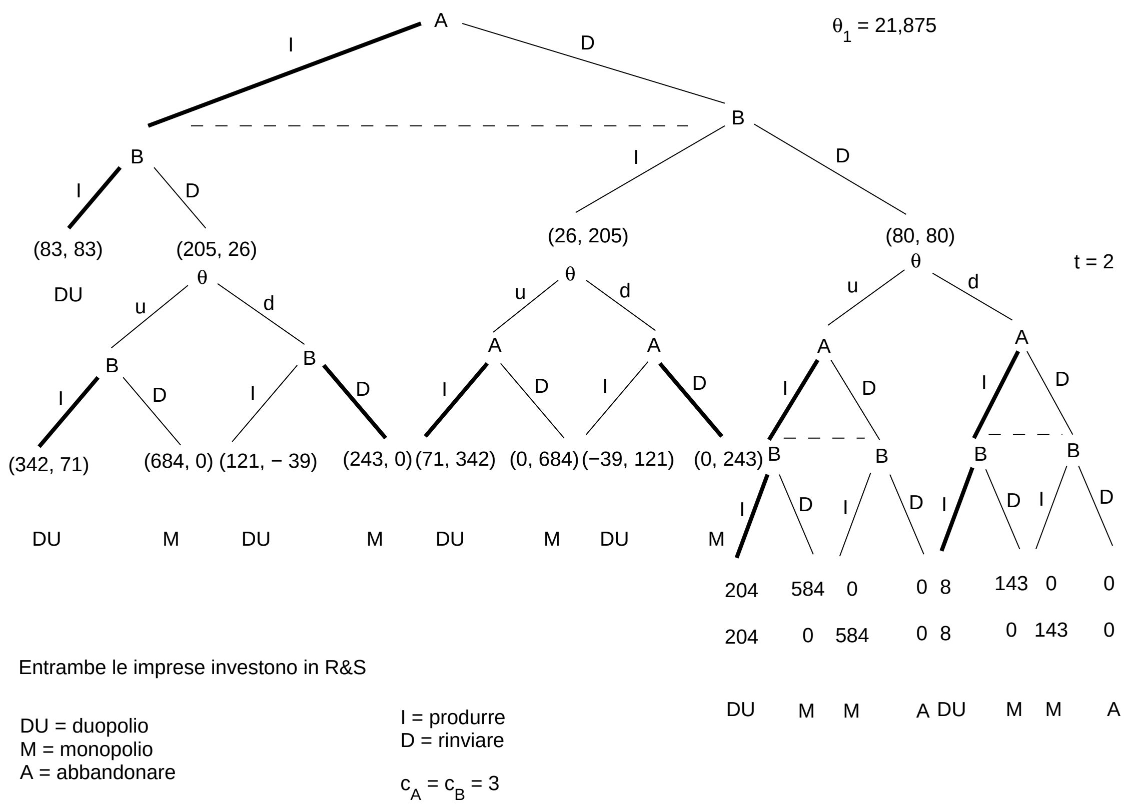

Figura 7: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di un aumento della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

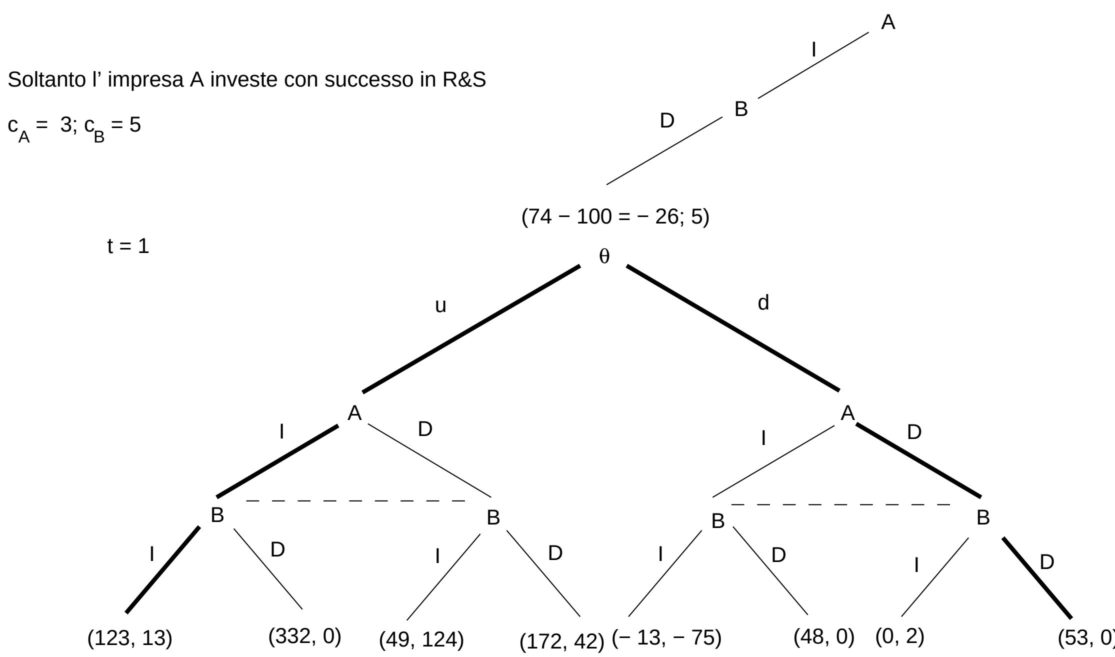

Figura 8: *la struttura ad albero riporta i VAN delle due imprese, all'epoca $t = 1$, a seconda delle azioni intraprese; la coppia $(-26, 5)$ rappresenta il valore attuale netto in $t = 0$; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

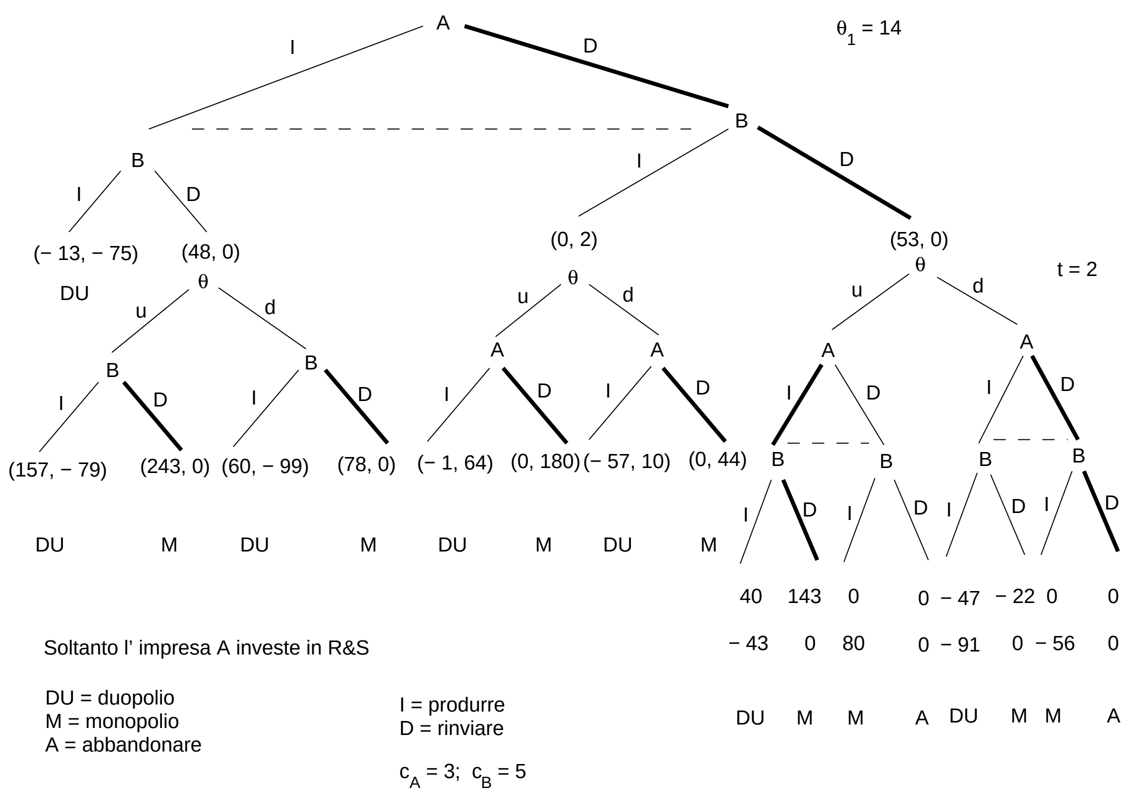

Figura 9: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di una diminuzione della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

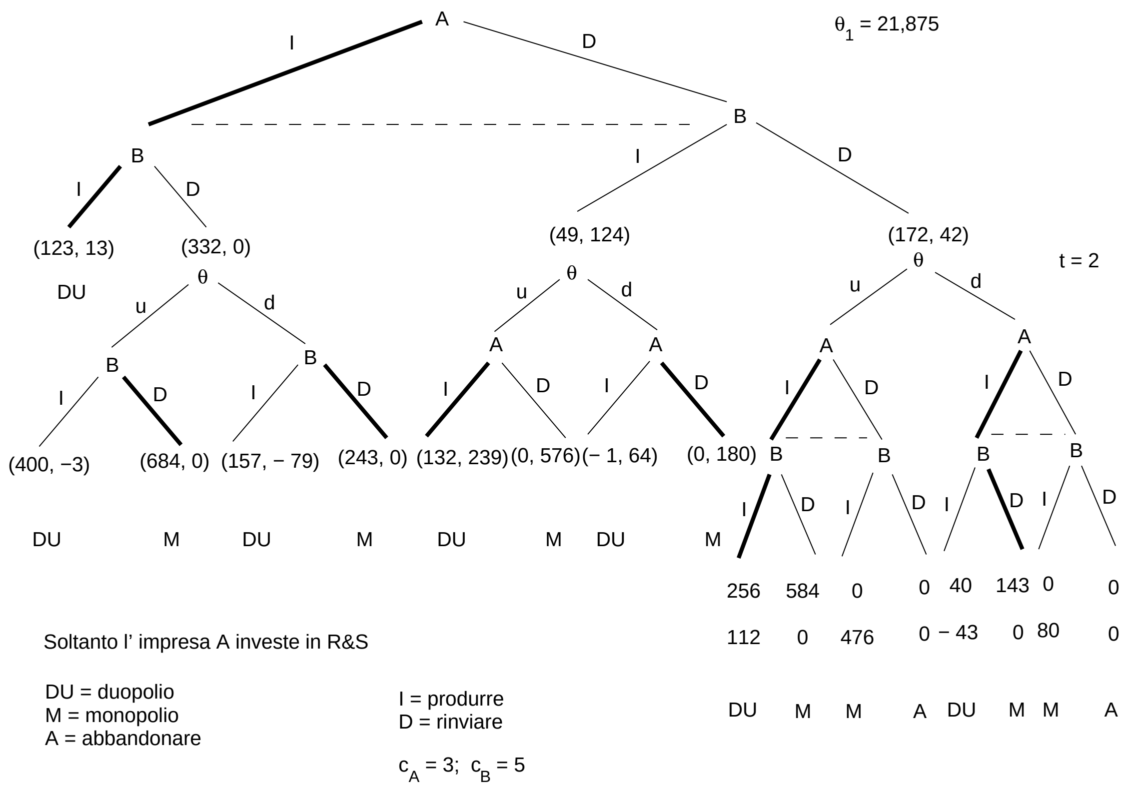

Figura 10: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di un aumento della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

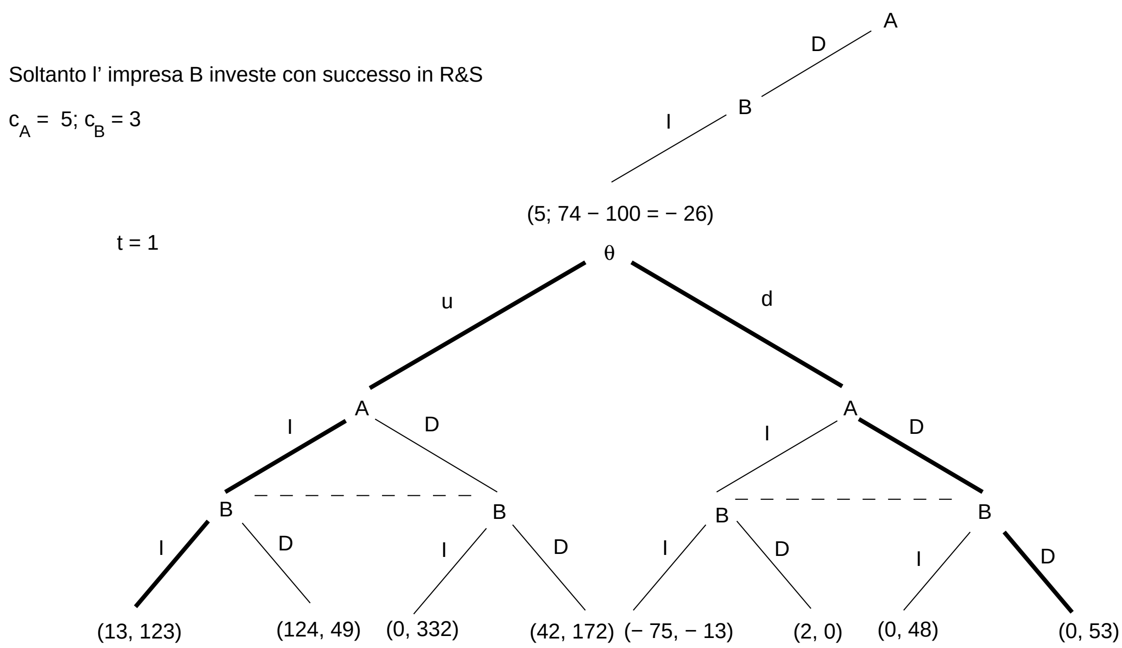

Figura 11: *la struttura ad albero riporta i VAN delle due imprese, all'epoca* $t = 1$*, a seconda delle azioni intraprese; la coppia* $(5, -26)$ *rappresenta il valore attuale netto in* $t = 0$*; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per* A *e* B*.*

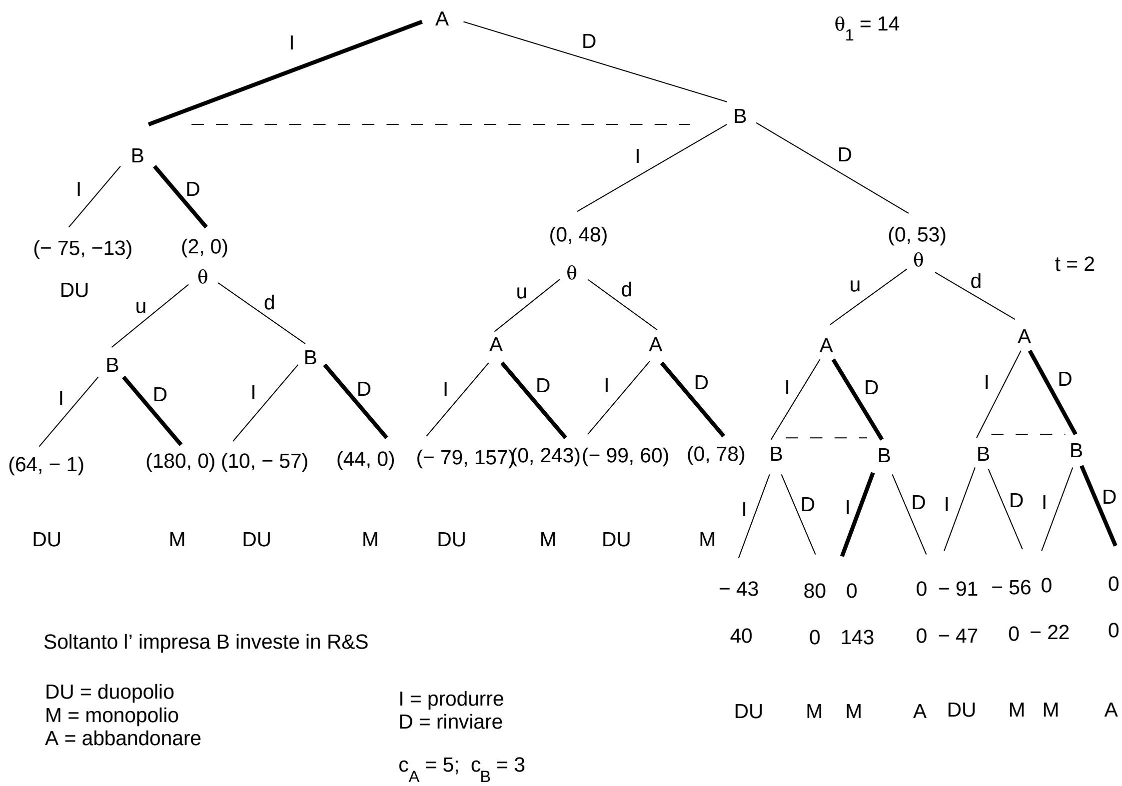

Figura 12: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di una diminuzione della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

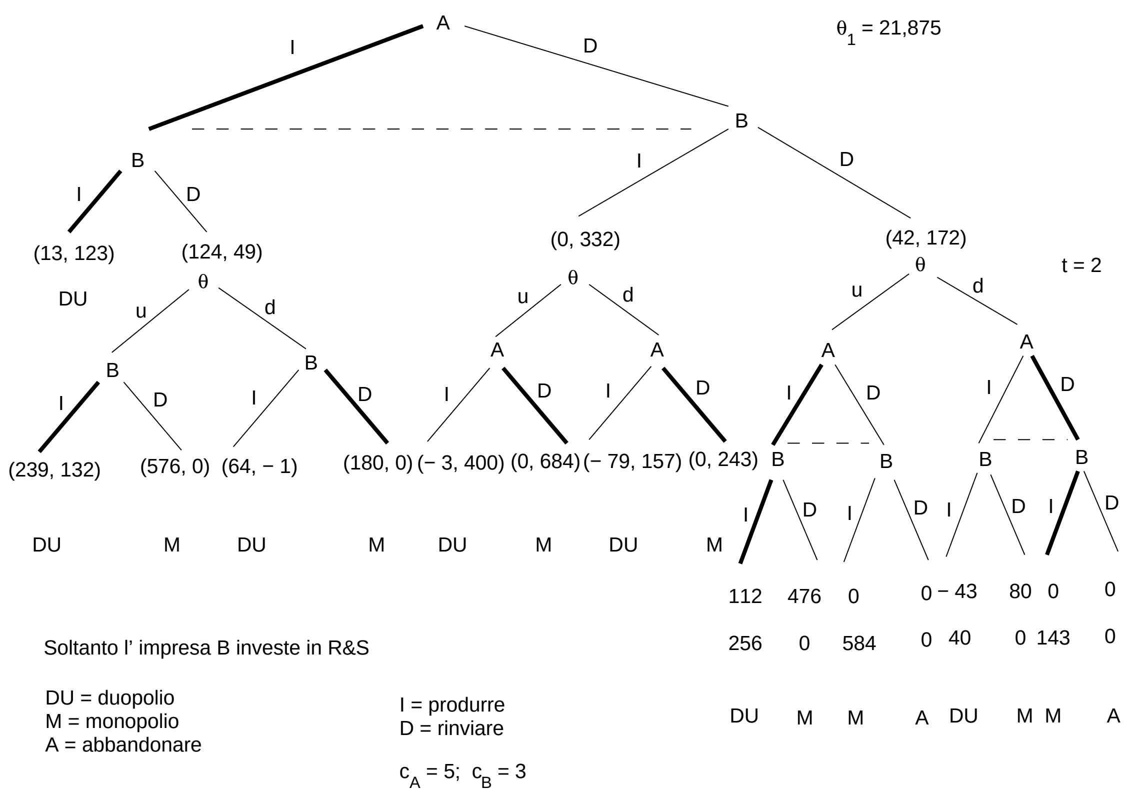

Figura 13: *in alto sono riportati i VAN delle due imprese, relativi alla fase produttiva ($t = 1$ e $t = 2$), nell'ipotesi di un aumento della domanda di mercato nel primo periodo; i rami in neretto indicano le strategie ottimali per A e B.*

A Determinazione dei payoff

Calcoliamo i valori attuali netti nel caso in cui soltanto l'impresa A investa in R&S conseguendo un risultato positivo. Ricordiamo che:

1. $c_A = 3, \;\; c_B = 5$;
2. $I = 100, \;\; K_A = 100$;
3. $r = 0,10, \;\; k = 0,13$;
4. $p = 0,41, \;\; \theta_t = 17,5$;
5. l'espressione $(A, B) =$ (I, I) significa che entrambe le imprese iniziano a produrre;
6. l'espressione $(A, B) =$ (I, D) significa che soltanto A inizia a produrre;
7. l'espressione $(A, B) =$ (D, I) significa che soltanto B inizia a produrre;
8. l'espressione $(A, B) =$ (D, D) significa che nessuna delle due imprese inizia a produrre;
9. si adotta il criterio del maxmin per individuare la strategia ottimale delle imprese considerate.

Esse decidono, in $t = 1$ o in $t = 2$, se iniziare o meno a produrre. Si hanno i seguenti sottogiochi:

1. **Sottogioco** 1.

   $\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; in $t = 1$ sia A che B decidono di non produrre (D, D) e nel periodo successivo $\theta_2 = \theta_0 \cdot d^2 = 17,5 \cdot (0,80)^2 = 11,2$.

   - Se in $t = 2$ entrambe le imprese abbandonano il progetto (D, D) si ha:

   $$VAN_A = VAN_B = 0\,;$$

- se in $t = 2$ soltanto B inizia a produrre (D, I), diventando monopolista, si ha:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(11,2 - 5)^2}{0,52}\, 0,6\, - 100 = -56\,;$$

- se invece in $t = 2$ soltanto A inizia a produrre (I, D), diventando così monopolista, si ha:

$$VAN_A = \frac{(11,2 - 3)^2}{0,52}\, 0,6 - 100 = -22$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se infine all'epoca $t = 2$ entrambe iniziano a produrre (I, I) si ha una struttura duopolistica:

$$VAN_A = \frac{(11,2 - 1)^2}{1,17}\, 0,6 - 100 = -47$$

$$VAN_B = \frac{(11,2 - 7)^2}{1,17}\, 0,6 - 100 = -91\,.$$

La strategia migliore per questo sottogioco è non produrre (D, D) ed il relativo payoff è $(0, 0)$.

2. **Sottogioco** 2.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; in $t = 1$ entrambe le imprese rinviano la produzione e nel periodo successivo $\theta_2 = \theta_0 \cdot d \cdot u = 17,5 \cdot 0,80 \cdot 1,25 = 17,5\,.$

- Se in $t = 2$ nessuna delle due imprese inizia a produrre (D, D) si ha:

$$VAN_A = VAN_B = 0\,;$$

- se in $t = 2$ soltanto B inizia a produrre (D, I), diventando monopolista, si ha:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-5)^2}{0,52}\ 0,6\ -100 = 80\,;$$

- se invece in $t = 2$ soltanto A inizia a produrre (I, D), diventando così monopolista, si ha:

$$VAN_A = \frac{(17,5-3)^2}{0,52}\ 0,6 - 100 = 143$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se infine all'epoca $t = 2$ entrambe iniziano a produrre (I, I) si ha una struttura duopolistica:

$$VAN_A = \frac{(17,5-1)^2}{1,17}\ 0,6 - 100 = 40$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-7)^2}{1,17}\ 0,6 - 100 = -43\,.$$

La strategia migliore è (I, D) con relativo payoff $(143, 0)$.

Tornando indietro all' epoca $t = 1$ si ha:

$$VAN_A = \frac{143\,(0,41)}{1,10} = 53$$

$$VAN_B = 0\,.$$

3. **Sottogioco** 3.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; in $t = 1$ soltanto B inizia a produrre (D, I) e $\theta_2 = \theta_0 \cdot d^{\,2} = 17,5 \cdot (0,80)^2 = 11,2\,.$

- Se in $t = 2$ l' impresa A non produce, B diventa monopolista:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(11,2-5)^2}{0,52}\ 0,6 = 44\,;$$

- se in $t = 2$ A inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(11,2+1)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 = -57$$

$$VAN_B = \frac{(11,2-7)^2}{1,04}\ 0,6 = 10\,.$$

La strategia migliore per A consiste nel non produrre. Il payoff è dunque $(0, 44)$.

4. **Sottogioco** 4.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; in $t = 1$ B inizia a produrre mentre A rinvia la decisione al periodo successivo (D, I); $\theta_2 = \theta_0 \cdot d \cdot u = 17,5 \cdot 0,80 \cdot 1,25 = 17,5\,.$

- Se in $t = 2$ l' impresa A non produce, B diventa monopolista:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-5)^2}{0,52}\ 0,6 = 180\,;$$

- se invece in $t = 2$ A inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(17,5+1)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 = -1$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-7)^2}{1,04}\ 0,6 = 64\,.$$

La strategia migliore per A consiste ancora nel non produrre ed il payoff è $(0, 180)$.

In $t = 1$ si ha quindi:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{180\,(0,41) + 44\,(0,59)}{1,10}\ - \ 100\ + \frac{(14\ -\ 5)^2}{4,52}\ 0,6 = 2\,.$$

5. **Sottogioco** 5.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; in $t = 2$ soltanto A inizia a produrre (I, D) e nel periodo successivo $\theta_2 = \theta_0 \cdot d^2 = 17,5 \cdot (0,80)^2 = 11,2$.

- Se in $t = 2$ B non inizia a produrre, A diventa monopolista:

$$VAN_A = \frac{(11,2 - 3)^2}{0,52}\,0,6 = 78$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se invece in $t = 2$ B inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(11,2 - 1)^2}{1,04}\,0,6 = 60$$

$$VAN_B = \frac{(11,2\ -\ 9)^2}{2,08}\,0,6\ - 100 = -99\,.$$

La strategia migliore per B è non produrre ed il relativo payoff è $(78, 0)$.

6. **Sottogioco** 6.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; in $t = 1$ soltanto A produce (I, D);
inoltre $\theta_2 = \theta_0 \cdot d \cdot u = 17,5 \cdot 0,80 \cdot 1,25 = 17,5$.

- Se in $t = 2$ B non produce, A diventa monopolista:

$$VAN_A = \frac{(17,5 - 3)^2}{0,52}\,0,6 = 243$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se invece in $t = 2$ B inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(17,5\ -\ 1)^2}{1,04}\,0,6 = 157$$

$$VAN_B = \frac{(17,5\ -\ 9)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 = -79\,.$$

La strategia migliore per B consiste ancora nel non produrre e il payoff è $(243, 0)$.

In $t = 1$ si ha:

$$VAN_A = \frac{243\,(0,41) + 78\,(0,59)}{1,10}\ -\ 100\ +\ \frac{(14\ -\ 3)^2}{4,52}\ 0,6 = 48$$

$$VAN_B = 0\,.$$

7. **Sottogioco** 7.

   $\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14$; entrambe le imprese iniziano a produrre nel primo periodo:

   $$VAN_A = \frac{(14-1)^2}{1,17}\ 0,6\ - 100 = -13$$

   $$VAN_B = \frac{(14-7)^2}{1,17}\ 0,6\ - 100 = -75\,.$$

8. **Sottogioco** 8.

   $\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; in $t = 1$ sia A che B decidono di non produrre (D, D) e nel periodo successivo $\theta_2 = \theta_0 \cdot u \cdot d = 17,5 \cdot 1,25 \cdot 0,80 = 17,5\,.$

   - Se in $t = 2$ entrambe le imprese abbandonano il progetto (D, D) si ha:

     $$VAN_A = VAN_B = 0\,;$$

   - se in $t = 2$ soltanto B inizia a produrre (D, I), diventando monopolista, si ha:

     $$VAN_A = 0$$

     $$VAN_B = \frac{(17,5-5)^2}{0,52}\ 0,6\ - 100 = 80\,;$$

   - se invece in $t = 2$ soltanto A inizia a produrre (I, D), diventando così monopolista, si ha:

$$VAN_A = \frac{(17,5-3)^2}{0,52}\,0,6\, - 100 = 143$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se infine all' epoca $t = 2$ entrambe iniziano a produrre (I, I) si ha una struttura duopolistica:

$$VAN_A = \frac{(17,5-1)^2}{1,17}\,0,6 - 100 = 40$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-7)^2}{1,17}\,0,6 - 100 = -43\,.$$

La strategia migliore per questo sottogioco è (I, D) con relativo payoff $(143, 0)$.

9. **Sottogioco** 9.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; in $t = 1$ entrambe le imprese rinviano la produzione e nel periodo successivo $\theta_2 = \theta_0 \cdot u^2 = 17,5 \cdot (1,25)^2 = 27,34\,.$

- Se in $t = 2$ nessuna delle due imprese inizia a produrre (D, D) si ha:

$$VAN_A = VAN_B = 0\,;$$

- se in $t = 2$ soltanto B inizia a produrre (D, I), diventando monopolista, si ha:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(27,34-5)^2}{0,52}\,0,6\, - 100 = 476\,;$$

- se invece in $t = 2$ soltanto A inizia a produrre (I, D), diventando così monopolista, si ha:

$$VAN_A = \frac{(27,34-3)^2}{0,52}\,0,6\, - 100 = 584$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se infine all'epoca $t = 2$ entrambe iniziano a produrre (I, I) si ha una struttura duopolistica:

$$VAN_A = \frac{(27,34-1)^2}{1,17}\ 0,6\ -100 = 256$$

$$VAN_B = \frac{(27,34-7)^2}{1,17}\ 0,6\ -100 = 112\,.$$

La strategia migliore è (I, I) con relativo payoff $(256, 112)$.

Tornando indietro all' epoca $t = 1$ si ha:

$$VAN_A = \frac{256\,(0,41)\ +\ 143\,(0,59)}{1,10} = 172$$

$$VAN_B = \frac{112\,(0,41)}{1,10} = 42\,.$$

10. **Sottogioco** 10.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; in $t = 1$ soltanto B inizia a produrre (D, I) e $\theta_2 = \theta_0 \cdot u \cdot d = 17,5 \cdot 1,25 \cdot 0,80 = 17,5\,.$

- Se in $t = 2$ l' impresa A non produce, B diventa monopolista:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-5)^2}{0,52}\ 0,6 = 180\,;$$

- se in $t = 2$ A inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(17,5+1)^2}{2,08}\ 0,6\ -100 = -1$$

$$VAN_B = \frac{(17,5-7)^2}{1,04}\ 0,6 = 64\,.$$

La strategia migliore per A è non produrre ed il relativo payoff è $(0, 180)$.

11. **Sottogioco** 11.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; in $t = 1$ B inizia a produrre mentre A rinvia la decisione al periodo successivo (D, I); $\theta_2 = \theta_0 \cdot u^2 = 17,5 \cdot (1,25)^2 = 27,34\,.$

- Se in $t = 2$ l'impresa A non produce, B diventa monopolista:

$$VAN_A = 0$$

$$VAN_B = \frac{(27,34 - 5)^2}{0,52}\ 0,6 = 576\,;$$

- se in $t = 2$ A inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(27,34 + 1)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 = 132$$

$$VAN_B = \frac{(27,34 - 7)^2}{1,04}\ 0,6 = 239\,.$$

La strategia migliore per A consiste nel produrre ed il relativo payoff è $(132, 239)$.

All'epoca $t = 1$ si ha:

$$VAN_A = \frac{132\,(0,41)}{1,10} = 49$$

$$VAN_B = \frac{239\,(0,41) + 180\,(0,59)}{1,10}\ - 100\ + \frac{(21,875\ - 5)^2}{4,52}\ 0,6 = 124\,.$$

12. **Sottogioco** 12.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; in $t = 1$ soltanto A inizia a produrre (I, D) e nel periodo successivo $\theta_2 = \theta_0 \cdot u \cdot d = 17,5 \cdot 1,25 \cdot 0,80 = 17,5\,.$

- Se in $t = 2$ B non inizia a produrre, A diventa monopolista:

$$VAN_A = \frac{(17,5 - 3)^2}{0,52}\ 0,6 = 243$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se invece in $t = 2$ B inizia a produrre si ha:

$$VAN_A = \frac{(17,5\ -\ 1)^2}{1,04}\ 0,6 = 157$$

$$VAN_B = \frac{(17,5\ -\ 9)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 = -79\,.$$

La strategia migliore per B è non produrre e il payoff è $(243, 0)$.

13. **Sottogioco** 13.

$\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; in $t = 1$ soltanto A produce (I, D); inoltre $\theta_2 = \theta_0 \cdot u^2 = 17,5 \cdot (1,25)^2 = 27,34\,.$

- Se in $t = 2$ B non produce, A diventa monopolista:

$$VAN_A = \frac{(27,34 - 3)^2}{0,52}\ 0,6 = 684$$

$$VAN_B = 0\,;$$

- se invece in $t = 2$ B inizia a produrre, si ha:

$$VAN_A = \frac{(27,34\ -\ 1)^2}{1,04}\ 0,6 = 400$$

$$VAN_B = \frac{(27,34\ -\ 9)^2}{2,08}\ 0,6\ - 100 = -3\,.$$

La strategia migliore per B consiste ancora nel non produrre e il payoff è $(684, 0)$.

In $t = 1$ si ha:

$$VAN_A = \frac{684\,(0,41) + 243\,(0,59)}{1,10}\ - 100\ +\ \frac{(21,875\ -\ 3)^2}{4,52}\ 0,6 = 332$$

$$VAN_B = 0\,.$$

14. **Sottogioco** 14.

    $\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875$; entrambe le imprese iniziano a produrre nel primo periodo:

$$VAN_A = \frac{(21,875-1)^2}{1,17}\ 0,6\ - 100 = 123$$

$$VAN_B = \frac{(21,875-7)^2}{1,17}\ 0,6\ - 100 = 13\,.$$

All' epoca $t = 1$ i due possibili sottogiochi sono (vedi figure 10 e 9):

1. **Sottogioco** a

   $\theta_1 = \theta_0 \cdot u = 17,5 \cdot 1,25 = 21,875\,.$

   - Se $(A, B) =$ (I, I) il payoff è $(123, 13)$;
   - se $(A, B) =$ (I, D) il payoff è $(332, 0)$;
   - se $(A, B) =$ (D, I) il payoff è $(49, 124)$;
   - se $(A, B) =$ (D, D) il payoff è $(172, 42)$.

   La strategia migliore per questo sottogioco è (I, I) con payoff pari a $(123, 13)$.

2. **Sottogioco** b

   $\theta_1 = \theta_0 \cdot d = 17,5 \cdot 0,80 = 14\,.$

   - Se $(A, B) =$ (I, I) il payoff è $(-13, -75)$;
   - se $(A, B) =$ (I, D) il payoff è $(48, 0)$;
   - se $(A, B) =$ (D, I) il payoff è $(0, 2)$;
   - se $(A, B) =$ (D, D) il payoff è $(53, 0)$.

   In questo caso la strategia migliore è (D, D) con payoff pari a $(53, 0)$.

In $t = 0$ i valori attuali netti sono dunque (vedi figura 8):

$$VAN_A = \frac{123\,(0,41)\ +\ 53\,(0,59)}{1,10} - 100 = -26$$

$$VAN_B = \frac{13\,(0,41)}{1,10} = 5\,.$$

Procedendo in modo analogo a quanto appena illustrato si ha che se soltanto B investe con esito positivo in R&S, i VAN all'epoca $t = 0$ risultano (vedi figura 11):

$$VAN_A = 5$$

$$VAN_B = -26\,.$$

Se entrambe investono con successo in R&S si ha (vedi figura 5):

$$VAN_A = -67$$

$$VAN_B = -67\,.$$

Infine, se nessuna delle due imprese investe in R&S si ha (vedi figura 2):

$$VAN_A = 17$$

$$VAN_B = 17\,.$$

Riferimenti bibliografici

[1] Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein, 1979, *Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics $7, 3$ (September), pp. $229 - 263$.

[2] Dixit, A. K. and R. S. Pindyck, 1994, *Investment under Uncertainty*, Princeton, NJ, Princeton University Press.

[3] Dixit, A. K., 1979, *A Model of Duopoly Suggesting a Theory of Entry Barriers*, Bell Journal of Economics, 10, 1 (Spring), pp. 20 - 32.

[4] Dixit, A. K., 1980, *The Role of Investment in Entry Deterrance*, Economic Journal 90 (March), pp. 95-106.

[5] Hall, J.C., 2001, *Introduzione ai mercati dei futures e delle opzioni*, Prentice-Hall International.

[6] Kester, W. C., 1984, *Today's Options for Tomorrow's Growth*, Harvard Business Review 62, 2 (March-April), pp. $153 - 160$.

[7] Kulatilaka, N. and E. Perotti, 1992, *Strategic Investment Timing Under Uncertainty*, Working paper, Boston University.

[8] McDonald, R. L. and D. R. Siegel, 1986, *The Value of Waiting to Invest*, Quarterly Journal of Economics $101, 4$ (November), pp. $707 - 727$.

[9] Padalino, R., *Opzioni reali e Investimenti in Ricerca e Sviluppo*, Quaderno n. 7/2004 del Dipartimento di Scienze Economiche, Matematiche e Statistiche, Università degli Studi di Foggia, Maggio 2004.

[10] Smit, H.T. J., 1996, *Growth Options and Strategy Analysis*, Ph.D. Dissertation, Erasmus University Rotterdam.

[11] Smit, H.T.J. and L.A. Ankum, 1993, *A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy Under Competition*, Financial Management 22, 3 (Autumn), pp. 241 – 250.

[12] Smit, H.T.J. and L. Trigeorgis, 1997, *R&D Option Strategies*, Working paper.

[13] Smit, H.T.J. and L. Trigeorgis, 2004, *Strategic Investment: Real Options and Games*, Princeton University Press.

[14] Trigeorgis, L., 1988, *A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting*, Advances in Futures and Options Research 3, pp. 145 – 167.

[15] Trigeorgis, L., 1991a, *Anticipated Competitive Entry and Early Preemptive Investment in Deferrable Projects*, Journal of Economics and Business 43, 2 (May), pp. 143 – 156.