

LEZIONI DI MATEMATICA PER I MERCATI FINANZIARI

Dipartimento di Scienze Economiche
Università di Verona

VALUTAZIONE DI TITOLI OBBLIGAZIONARI E STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI DI INTERESSE

VALORE ATTUALE

Valore attuale (P) è il valore attualizzato/scontato di una somma (M) che verrà ricevuta ad una data futura, con l'attualizzazione effettuata utilizzando un tasso di interesse i

$$P = M \cdot (1 + i)^{-n}$$

Qual è il valore attuale di \$1000 che verranno incassati fra 5 anni, se il tasso di interesse è uguale a 7%?

$$P = \$1000 \cdot (1 + 0.07)^{-5} = \$712.98$$

Proprietà del valore attuale

Data una certa somma che verrà ricevuta in futuro, tanto più alto è il tasso di interesse, tanto minore è il valore attuale

Dato un certo tasso di interesse, tanto più lontana è la data in cui una certa somma verrà ricevuta, tanto minore è il valore attuale

Qual è il valore attuale di \$1000 che verranno incassati fra n anni, se il tasso di interesse è uguale a $i\%$?

$$n=5, i=7: \quad P = \$1000 \cdot (1 + 0.07)^{-5} = \$712.98$$

$$n=5, i=10: \quad P = \$1000 \cdot (1 + 0.10)^{-5} = \$620.92$$

$$n=8, i=7: \quad P = \$1000 \cdot (1 + 0.07)^{-8} = \$582.01$$

Valore attuale di una serie di pagamenti futuri

Il valore attuale di una serie di pagamenti futuri è dato dalla somma dei valori attuali di ogni singolo pagamento futuro (sia i il tasso di interesse uguale per ogni scadenza):

$$P = \frac{c_1}{1+i} + \frac{c_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c_n}{(1+i)^n} = \sum_{s=1}^n c_s \cdot (1+i)^{-s}$$

$$= c_1 \cdot v(0;1) + c_2 \cdot v(0;2) + \dots + c_n \cdot v(0;n) = \sum_{s=1}^n c_s \cdot v(0;s)$$

Qual è il valore attuale di un titolo generico che paga \$100 ogni anno per 5 anni, se il tasso di interesse è uguale a 8%?

$$P = \sum_{s=1}^5 \$100 \cdot (1 + 0.08)^{-s} = \$399.26$$

Titolo obbligazionario

A fronte del pagamento di un prezzo al tempo t da parte dell'acquirente, genera una serie di pagamenti futuri a favore dell'acquirente stesso

Pagamenti futuri:

- cedole, a scadenze prefissate (per es., \$5 ogni 6 mesi)
- valore nominale del titolo (\$100) alla scadenza finale



Prezzo di un titolo obbligazionario
=
Valore attuale dei pagamenti futuri del titolo

Titolo obbligazionario con cedole

Qual è il prezzo di un titolo obbligazionario con scadenza 5 anni, che paga una cedola annuale di \$10 e ha valore nominale di \$100, se il tasso di interesse è uguale a 9%?

$$P(\$10;5) = \sum_{s=1}^5 \$10 \cdot (1 + 0.09)^{-s} + \$100 \cdot (1 + 0.09)^{-5} = \$103.89$$

Titolo obbligazionario zero coupon (senza cedole)

Qual è il prezzo di un titolo obbligazionario con scadenza 2 anni, che non paga cedole e ha valore nominale di \$100, se il tasso di interesse è uguale a 9%?

$$P(0;2) = \$100 \cdot (1 + 0.09)^{-2} = \$84.17$$

TASSO INTERNO DI RENDIMENTO (T.I.R.)

Sopra: sono noti i pagamenti futuri, le date di pagamento e il tasso di interesse: si calcola il valore attuale (prezzo)

Ora: sono noti i pagamenti futuri, le date di pagamento e il prezzo (valore attuale): si calcola il tasso di interesse



Il tasso interno di rendimento (T.I.R.) è quel (singolo) tasso di interesse che eguaglia prezzo e valore attuale

$$P(c; n) = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c+M}{(1+i)^n} = \sum_{s=1}^n c \cdot (1+i)^{-s} + M \cdot (1+i)^{-n}$$

Qual è il T.I.R. di un titolo obbligazionario con scadenza 5 anni, che paga una cedola annuale di \$10 e ha valore nominale di \$100, se il prezzo di mercato del titolo è \$98?

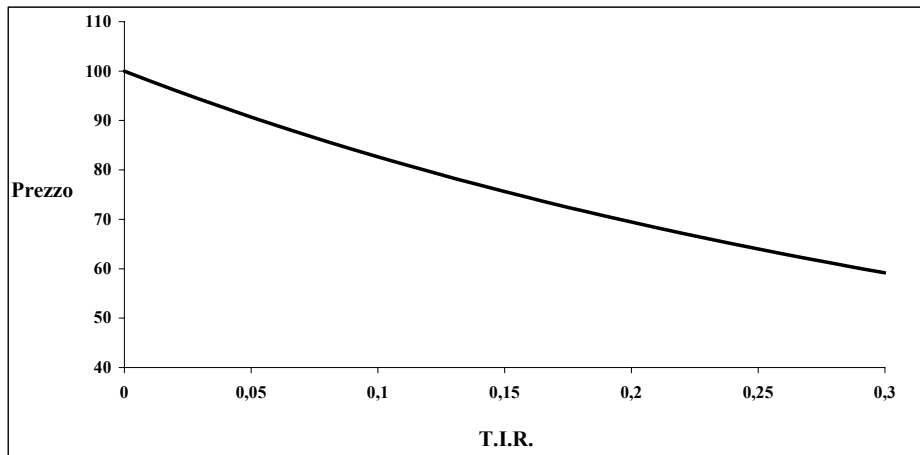
$$\$98 = \sum_{s=1}^5 \$10 \cdot (1+i)^{-s} + \$100 \cdot (1+i)^{-5}$$

Risposta: $i = 10.53\%$

Il calcolo è semplice per un titolo senza cedole

$$i = \left(\frac{M}{P(0; n)} \right)^{1/n} - 1$$

Relazione negativa tra prezzo e T.I.R.



La forma della curva prezzo/T.I.R. dipende dalla cedola e dal tempo a scadenza del titolo

Titoli obbligazionari solitamente pagano cedole semestrali



Relazione tra T.I.R. annuale e T.I.R. periodico

$$i = (1 + i_{1/m})^m - 1$$

oppure

$$i_{1/m} = (1 + i)^{1/m} - 1$$

m è la frequenza di pagamenti per anno

Qual è il T.I.R. di un titolo obbligazionario con scadenza 5 anni, che paga una cedola semestrale di \$5 e ha valore nominale di \$100, se il prezzo di mercato del titolo è \$98?

$$\$98 = \sum_{s=1}^{10} \$5 \cdot (1 + i_{1/2})^{-s} + \$100 \cdot (1 + i_{1/2})^{-10}$$

Risposta:

il T.I.R. periodico (semestrale) $i_{1/2}$ è uguale a

$$i_{1/2} = 5.26\%$$

e quindi il T.I.R. annuale i è uguale a

$$i = (1 + .0526)^2 - 1 = 10.80\%$$

CURVA DEI RENDIMENTI

Dati X titoli obbligazionari esistenti sul mercato, con diverse scadenze e diverse cedole, si calcola il T.I.R. di ognuno di questi titoli $(i_{(1)}, i_{(2)}, \dots, i_{(X)})$ e si costruisce un grafico che pone sull'asse delle ordinate i T.I.R. ottenuti per i vari titoli obbligazionari $(i_{(1)}, i_{(2)}, \dots, i_{(X)})$ e sull'asse delle ascisse le corrispondenti date di scadenza dei titoli obbligazionari (n_1, n_2, \dots, n_X)



Il grafico risultante rappresenta la curva dei rendimenti

MISURE DI SENSITIVITÀ DEI PREZZI

$$P = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c+M}{(1+i)^n}$$
$$= \sum_{s=1}^n c \cdot (1+i)^{-s} + M(1+i)^{-n}$$

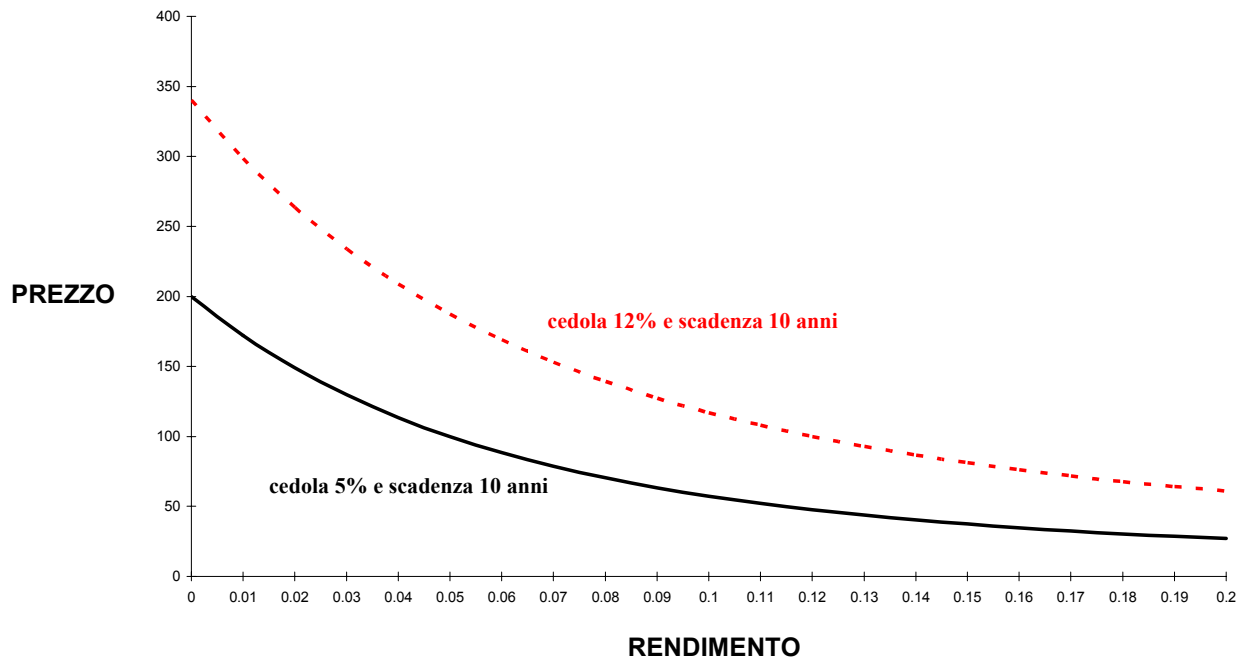
Prezzo di un titolo varia in direzione opposta rispetto alla variazione del tasso di rendimento

$$\Delta i > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta P < 0$$

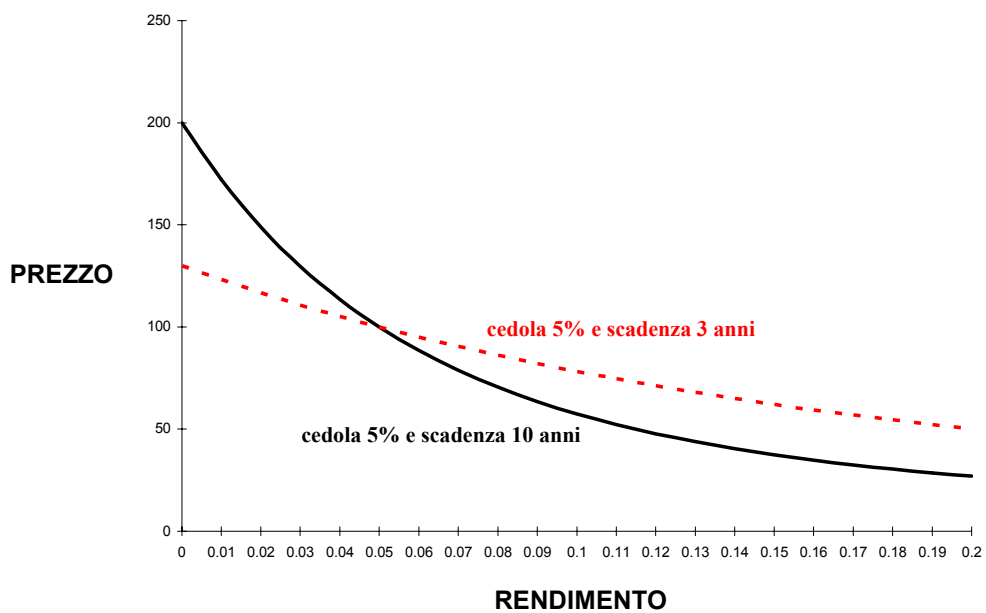
RELAZIONE PREZZO - RENDIMENTO

- relazione cambia da titolo a titolo, a seconda della cedola, della scadenza, del rendimento ...
- per variazioni molto piccole nel rendimento, relazione simmetrica
- per variazioni ampie nel rendimento, relazione non simmetrica: (aumento $\Delta P / P$) > (diminuzione $\Delta P / P$)
- dati la scadenza e il rendimento, tanto più bassa è la cedola, tanto maggiore è la sensibilità del prezzo (in termini di $\Delta\%$)
- dati la cedola e il rendimento, tanto maggiore è il tempo mancante alla scadenza, tanto maggiore è la sensibilità del prezzo (in termini di $\Delta\%$)

Titoli con stessa scadenza (10 anni) e diversa cedola (5% e 12%)



Titoli con stessa cedola (5%) e diversa scadenza (3 e 10 anni)



**Titolo obbligazionario con scadenza 3 anni, cedola
semestrale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 5%**

Prezzo corrente: \$100

T.I.R.	3%	4.75%	5%	5.25%	7%
Prezzo	110.83	101.28	100	98.74	90.47
		+ 1.28		- 1.26	
		<==== Δ simmetrica ====>			
	+ 10.83				- 9.53
	<===== Δ non simmetrica =====>				

	Variazione % del prezzo (T.I.R. i per tutti i titoli)			
Nuovo tasso (i)	cedola \$6 5 anni	cedola \$6 20 anni	cedola \$9 5 anni	cedola \$9 20 anni
4%	8.98%	27.36%	8.57%	25.04%
5%	4.38%	12.55%	4.17%	11.53%
5.99%	0.04%	0.12%	0.04%	0.11%
6.01%	- 0.04%	- 0.12%	- 0.04%	- 0.11%
7%	- 4.16%	- 10.68%	- 3.97%	- 9.89%
8%	- 8.11%	-19.79%	-7.75%	-18.40%

DURATION (DURATA MEDIA FINANZIARIA)

Differenti interpretazioni

- **Duration è la media aritmetica ponderata del tempo a scadenza degli importi futuri del titolo, con pesi dati dai valori attuali percentuali degli importi futuri: essa misura il tempo medio richiesto da un titolo, su base scontata, per ripagare l'investimento originale (durata media finanziaria)**
- **Duration riflette l'elasticità del prezzo al rendimento: essa misura la variazione percentuale del prezzo del titolo data una variazione percentuale del rendimento del titolo stesso**

$$D = \frac{1}{P} \left(\sum_{s=1}^n \frac{s \cdot c}{(1+i)^s} + \frac{n \cdot 100}{(1+i)^n} \right) =$$
$$= -(1+i) \cdot \frac{dP}{di} \frac{1}{P}$$

Da dove derivano queste espressioni?



1) Si consideri l'espressione per il prezzo di un titolo:

$$P = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c+100}{(1+i)^n}$$

2) Si prenda la derivata prima rispetto al rendimento:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{di} &= \frac{(-1) \cdot c}{(1+i)^2} + \frac{(-2) \cdot c}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(-n) \cdot (c+100)}{(1+i)^{n+1}} = \\ &= -\frac{1}{1+i} \left[\frac{c}{1+i} + \frac{2 \cdot c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{n \cdot (c+100)}{(1+i)^n} \right]\end{aligned}$$

3) Si definisca:

$$D \cdot P \equiv \frac{c}{1+i} + \frac{2 \cdot c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{n \cdot (c+100)}{(1+i)^n}$$

4) Si sostituisca sopra per ottenere le due espressioni

Qual è la duration di un titolo con scadenza 3 anni, cedola annuale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 5%?

Qual è il prezzo di questo titolo?

Calcolando il valore attuale si ottiene $P = \$100$

$$D = \frac{1}{100} \left(\sum_{s=1}^3 \frac{s \cdot 5}{(1+0.05)^s} + \frac{3 \cdot 100}{(1+0.05)^3} \right) = 2.86$$

Questo implica che:

- il tempo medio richiesto dal titolo per ripagare \$100 è 2.86 anni**
- per una variazione di 100 punti base nel T.I.R. ($\Delta i = 1\%$), il prezzo varia di $-(0.01/(1+0.05)) \cdot 2.86\% \cong -2.70\%$**

DURATION MODIFICATA

Variazione percentuale del prezzo di un titolo obbligazionario al variare del rendimento

$$DM = \frac{1}{1+i} \cdot D = -\frac{dP}{P} \frac{1}{di}$$

Qual è la duration modificata di un titolo obbligazionario con scadenza 3 anni, cedola annuale \$5, valore nominale \$100 e T.I.R. 5%?

$$DM = \frac{1}{1+0.05} \cdot D = 2.72$$

- **D e DM di un titolo obbligazionario con cedola sono minori del tempo alla scadenza del titolo**
- **D di un titolo obbligazionario zero coupon (senza cedole) è uguale al tempo alla scadenza del titolo**

$$D = \frac{1}{P} \frac{n \cdot 100}{(1+i)^n} = \frac{1}{P} n \cdot P = n$$

- **DM di un titolo obbligazionario zero coupon (senza cedole) è minore del tempo alla scadenza del titolo**

$$DM = \frac{n}{1+i} < n$$

- **Tanto minore è la cedola di un titolo obbligazionario, tanto maggiori sono la D e DM di esso**

Due titoli obbligazionari con scadenza 3 anni, uno con cedola annuale \$5 e uno con cedola annuale \$3, entrambi con valore nominale \$100 e T.I.R. 5%

$$D_{5\%} = 2.86$$

$$DM_{5\%} = 2.72$$

$$D_{3\%} = 2.91$$

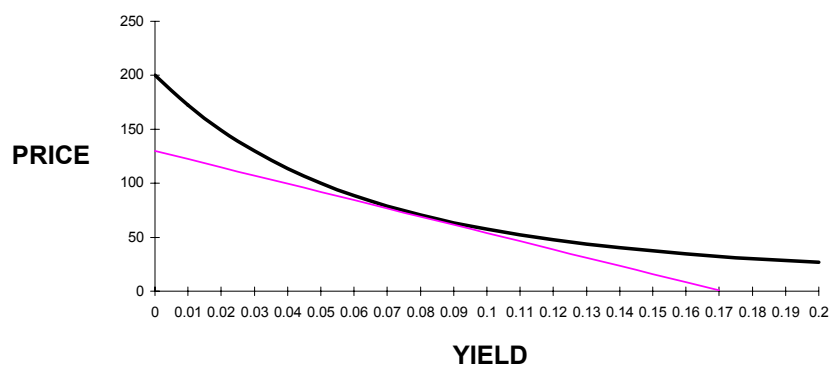
$$DM_{3\%} = 2.77$$

CONVESSITA'

Per piccole variazioni di i , DM fornisce una buona approssimazione della variazione percentuale di P

$$\frac{dP}{P} = -DM \cdot di$$

DM collegata alla linea tangente della relazione $P \Leftrightarrow i$



Tuttavia, le misure di duration non catturano l'effetto della convessità di un titolo (effetto di secondo ordine), ovvero le sue variazioni di prezzo quando i rendimenti variano di un ammontare non trascurabile

DURATION \Rightarrow approssimazione lineare

CONVESSITÀ \Rightarrow approssimazione quadratica

Miglior approssimazione al prezzo del titolo utilizzando i primi due termini di un'espansione in serie di Taylor

$$dP = \frac{dP}{di} di + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{di^2} (di)^2 + \varepsilon$$

Si definisca la convessità con l'espressione:

$$CX \equiv \frac{1}{P} \left(\sum_{s=1}^n \frac{s(s+1) \cdot c}{(1+i)^{s+2}} + \frac{n(n+1) \cdot 100}{(1+i)^{n+2}} \right) = \frac{d^2 P}{di^2} \frac{1}{P}$$

Misure di duration e convessità considerate insieme forniscono una migliore approssimazione della variazione effettiva del prezzo per ampie variazioni dei rendimenti

$$\frac{dP}{P} = -DM \cdot di + \frac{1}{2} \cdot CX \cdot (di)^2 + \varepsilon$$

**Titolo obbligazionario con scadenza 5 anni, cedola annuale
\$10, valore nominale \$100 e T.I.R. 9%**

$$P = 103.89, \quad DM = 3.84, \quad CX = 19.83$$

T.I.R. sale al 10% (+1%)

$$(dP)_{effettiva} = -3.89$$

$$-(DM \cdot di) \cdot P = -3.991$$

$$(P/2) \cdot CX \cdot (di)^2 = 0.103$$

errore di approssimazione

$$\varepsilon = (-3.991 + 0.103) - (-3.89) = 0.002$$

**Titolo obbligazionario con scadenza 5 anni, cedola annuale
\$10, valore nominale \$100 e T.I.R. 9%**

Periodo s	Importi	VA	VA $\cdot s$	VA $\cdot s \cdot (s+1)$
1	10	9.1743	9.17431	18.3486
2	10	8.4168	16.8336	50.5008
3	10	7.7218	23.1655	92.6620
4	10	7.0842	28.3370	141.6850
5	110	71.4924	357.4623	2144.7740
	<i>somma</i>	<i>103.8897</i>	<i>434.9727</i>	<i>2447.9700</i>
	Duration	$D = 434.9727/103.8897 = 4.1868$		
	Duration modificata	$DM = 4.1868/1.09 = 3.8412$		
	Convessità	$CX = \frac{2447.97}{(1.09)^2 \cdot 103.8897} = 19.8326$		

DURATION E CONVESSITÀ DI UN PORTAFOGLIO DI TITOLI OBBLIGAZIONARI

Duration (e DM) di un portafoglio

Media ponderata duration (DM) dei titoli del portafoglio

$$D(\Pi) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot D_j \quad ; \quad DM(\Pi) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot DM_j$$

Convessità di un portafoglio

Media ponderata convessità dei titoli del portafoglio

$$CX(\Pi) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot CX_j$$

COPERTURA DAL RISCHIO DI TASSO DI INTERESSE



Immunizzazione

Tecnica “Duration matching”

Formare un portafoglio di attività e passività tale che:

$$DM \text{ attività} = DM \text{ passività}$$



Questo elimina il rischio di tasso di interesse: variazioni parallele (relativamente piccole) dei tassi sono così perfettamente immunizzate

Esempio di portafoglio immunizzato

$$(i = 5\%)$$

Passività:

Titolo a 4 anni con cedola annuale 8% ($DM_P = 3.43$)

Attività:

Titolo a 1 anno con cedola annuale 6% ($DM_{A1} = 0.95$)

Titolo a 5 anni con cedola annuale 5% ($DM_{A2} = 4.33$)



Trovare le quote w_1 e w_2 delle attività tali per cui:

$$DM \text{ attività} = DM \text{ passività}$$



$$w_1 \cdot 0.95 + w_2 \cdot 4.33 = 3.43$$

$$w_1 + w_2 = 1$$



$$w_1 = 27\% \text{ e } w_2 = 73\%$$



$$\begin{aligned} d\Pi_A &= (-di) \cdot (w_1 \cdot DM_{A1} + w_2 \cdot DM_{A2}) \\ &= (-di) \cdot DM_P = d\Pi_P \end{aligned}$$

STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI DI INTERESSE

Tasso interno di rendimento



Stesso tasso di interesse per ogni scadenza $s, s = 1, \dots, n,$
 i

Struttura per scadenza



Differente tasso di interesse per ogni scadenza $s, s = 1, \dots, n,$
 $y(s)$

$$\begin{aligned} P(c; n) &= \frac{c}{1 + y(1)} + \frac{c}{(1 + y(2))^2} + \dots + \frac{c + M}{(1 + y(n))^n} \\ &= \sum_{s=1}^n c \cdot (1 + y(s))^{-s} + M(1 + y(n))^{-n} \end{aligned}$$

$y(s)$: tasso a pronti per la scadenza s

**Ogni pagamento futuro disponibile alla data s viene
attualizzato con un tasso di interesse (tasso a pronti)
specifico per quella data $\Rightarrow y(s)$**

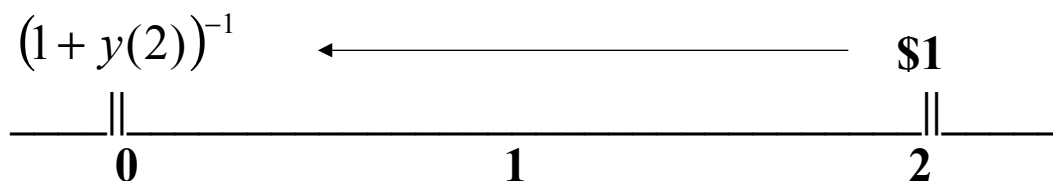
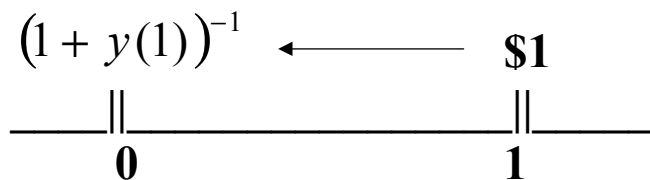
Date n scadenze $s, s = 1, 2, \dots, n$, e i corrispondenti tassi a pronti $(y(1), y(2), \dots, y(n))$ si costruisce un grafico che pone sull'asse delle ordinate i tassi a pronti calcolati per le varie scadenze $(y(1), y(2), \dots, y(n))$ e sull'asse delle ascisse le relative scadenze $(1, 2, \dots, n)$



Il grafico risultante rappresenta la struttura per scadenza dei tassi di interesse

$v(0; s) \equiv (1 + y(s))^{-s}$: **fattore di attualizzazione (sconto) per la scadenza s**

Ognuno degli n fattori di sconto può essere interpretato come il valore attuale di un titolo zero coupon (senza cedole) con scadenza s , valore nominale unitario e T.I.R. $y(s), s = 1, 2, \dots, n$



..... e così via fino alla scadenza n

I prezzi di n titoli obbligazionari zero coupon relativi alle scadenze $s = 1, 2, \dots, n$ si ottengono quindi come:

$$P(0;1) = \frac{1}{(1 + y(1))^1}$$

$$P(0;2) = \frac{1}{(1 + y(2))^2}$$

.....

$$P(0;n) = \frac{1}{(1 + y(n))^n}$$

Poiché il valore attuale di una serie di pagamenti futuri è dato dalla somma dei valori attuali di ogni singolo pagamento futuro, per un titolo obbligazionario con cedola costante c e valore nominale M , il prezzo può essere espresso come:

$$\begin{aligned} P(c; n) &= c \cdot P(0;1) + c \cdot P(0;2) + \dots + c \cdot P(0;n) + M \cdot P(0; n) \\ &= \frac{c}{(1 + y(1))^1} + \frac{c}{(1 + y(2))^2} + \dots + \frac{c + M}{(1 + y(n))^n} \end{aligned}$$

Prezzo di un titolo obbligazionario con cedole

=

Somma ponderata dei prezzi di titoli zero coupon con valore nominale unitario, con pesi dati dalle cedole

Tassi a pronti $y(s)$, $s = 1, 2, \dots, n$,



Struttura per scadenza dei tassi di interesse



**Relazione tra T.I.R. di titoli obbligazionari zero coupon
(tassi a pronti) e tempo alla scadenza dei titoli stessi**

Struttura per scadenza dei tassi di interesse “piatta”



Tassi a pronti tutti uguali a unico T.I.R. (costante)

$$y(1) = y(2) = \dots = y(n) = i$$

Il T.I.R. di un titolo obbligazionario con scadenza 3 anni, che paga una cedola annuale di \$5, ha un valore nominale di \$100 e prezzo corrente \$97 è $i = 6.125\%$

Per lo stesso titolo si ottiene un identico prezzo utilizzando, per esempio, i seguenti tassi a pronti:

$$y(1) = 7.5\%$$

$$y(2) = 5\%$$

$$y(3) = 6.14\%$$

$$\begin{aligned} \$97 &= \sum_{s=1}^3 \$5 \cdot (1+i)^{-s} + \$100 \cdot (1+i)^{-3} \\ &= \sum_{s=1}^3 \$5 \cdot (1+y(s))^{-s} + \$100 \cdot (1+y(3))^{-3} \end{aligned}$$

TEOREMA DI NON ARBITRAGGIO

In un mercato di titoli obbligazionari uno soltanto dei seguenti casi è vero:

⇒ Ci sono opportunità di arbitraggio

oppure

⇒ Esiste un insieme comune di tassi a pronti (fattori di sconto) in grado di uguagliare prezzo e valore attuale per ogni titolo obbligazionario

Questo implica che, dati X titoli obbligazionari, si ha un insieme unico (ovvero, comune a tutti i titoli) di tassi a pronti $y(1), y(2), \dots, y(n)$ tale per cui:

$$P(c_A; n) = \frac{c_{(A)}}{1 + y(1)} + \frac{c_{(A)}}{(1 + y(2))^2} + \dots + \frac{c_{(A)} + 100}{(1 + y(n))^n}$$

$$P(c_B; n) = \frac{c_{(B)}}{1 + y(1)} + \frac{c_{(B)}}{(1 + y(2))^2} + \dots + \frac{c_{(B)} + 100}{(1 + y(n))^n}$$

.....

$$P(c_X; n) = \frac{c_{(X)}}{1 + y(1)} + \frac{c_{(X)}}{(1 + y(2))^2} + \dots + \frac{c_{(X)} + 100}{(1 + y(n))^n}$$

Assenza di opportunità di arbitraggio

implica

che non si possono usare combinazioni di titoli per replicare i pagamenti futuri di altri titoli a minor costo

(esempio)

Esempio 1

Titolo	Prezzo	Pagamenti futuri	
		Periodo 1	Periodo 2
A	99.0	110	0
B	100.4	12	112
C	90.2	6	106

C'è la possibilità di arbitraggio ?

Esempio 1 (continua)

Valore attuale pagamenti futuri

Titolo	Prezzo	Valore attuale pagamenti futuri		
		Periodo 1		Periodo 2
A	99.0 =	$110 \cdot v(0;1)$	+	$0 \cdot v(0;2)$
B	100.4 =	$12 \cdot v(0;1)$	+	$112 \cdot v(0;2)$
C	90.2 =	$6 \cdot v(0;1)$	+	$106 \cdot v(0;2)$

Per $y(1)=11.11\%$ ($v(0;1) = 0.9$)

e $y(2)=11.80\%$ ($v(0;2) = 0.8$)

prezzo = valore attuale per ogni titolo



Non c'è arbitraggio

Esempio 2

Valore attuale pagamenti futuri

Titolo	Prezzo	Valore attuale pagamenti futuri		
		Periodo 1		Periodo 2
A	99.0 =	$110 \cdot 0.9$	+	$0 \cdot 0.8$
B	100.4 =	$12 \cdot 0.9$	+	$112 \cdot 0.8$
D	95.0 =	$8 \cdot 0.9$	+	$108 \cdot 0.8$

**Non c'è soluzione per $y(1)$ e $y(2)$ (ovvero per $v(0;1)$ e $v(0;2)$)
tale per cui tutti i valori attuali sono uguali ai rispettivi prezzi**



Arbitraggio

Esempio 2 (continua)

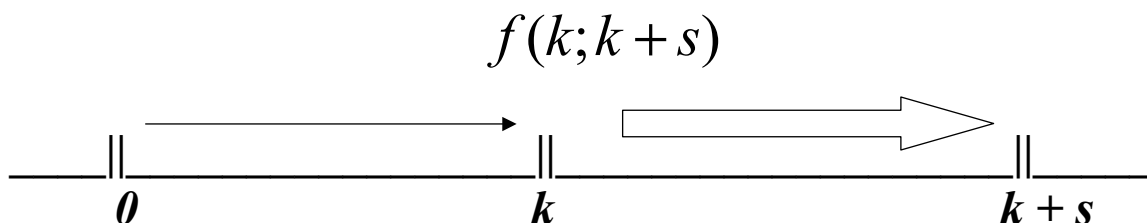
un possibile arbitraggio: usa A e B per replicare D

Pagamenti futuri

Transazione	Quantità	Titolo	Periodo 0	Periodo 1	Periodo 2
Acquisto	9.643	B	(-968.000)	(+116.000)	(+1.080.000)
Vendita	325	A	(+32.000)	(-36.000)	(0)
Saldo			- 936.000	+ 80.000	+ 1.080.000
Vendita	10.000	D	+ 950.000	- 80.000	- 1.080.000
Profitto di arbitraggio			+ 14.000	0	0

TASSI A TERMINE

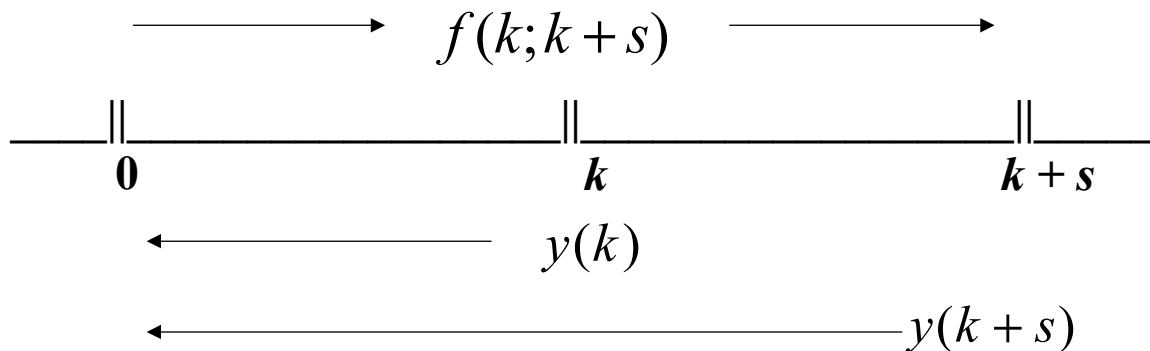
Tasso a termine è il tasso di interesse fissato alla data 0 per un'operazione finanziaria che inizia alla data $k \geq 0$ e termina alla data $k+s \geq k$



Tassi a termine detti anche tassi impliciti o tassi forward, perché, in assenza di arbitraggio, possono venire implicitamente determinati dai tassi a pronti

Dato un insieme di tassi a pronti, è possibile calcolare i tassi a termine impliciti nella struttura per scadenza

$$f(k; k + s) = \left[\frac{(1 + y(k + s))^{k+s}}{(1 + y(k))^k} \right]^{\left(\frac{1}{s}\right)} - 1$$



Qual è il tasso a termine $f(1;2)$ per un'operazione finanziaria che inizia tra 1 anno e termina tra 2 anni, dato che i tassi a pronti a 1 anno e a 2 anni sono, rispettivamente, $y(1)=11.11\%$ e $y(2)=11.80\%$?

In assenza di arbitraggio:

$$f(1;2) = \left[\frac{(1 + 0.1180)^2}{1 + 0.1111} \right] - 1 = 12.50\%$$

Perché “in assenza di arbitraggio”?



Assenza di arbitraggio implica che

Montante di un'operazione finanziaria che consiste nell'investire \$100 per 2 anni al tasso $y(2)$

=

Montante di un'operazione finanziaria che consiste nell'investire \$100 per 1 anno al tasso $y(1)$ e nel reinvestire il ricavato al tasso a termine $f(1;2)$ per un ulteriore anno

$$\text{\$}100 \cdot (1.1180)^2 = \text{\$}100 \cdot (1.1111) \cdot (1.1250) = \text{\$}125$$

Se $f(1;2) \neq 12.50\% \Rightarrow$ **possibilità di arbitraggio**

Esempio

$$y(1) = 11.11\% \quad y(2) = 11.80\% \quad f(1;2) \equiv 14.30\%$$

Operazione Periodo 0 Periodo 1 Periodo 2

Indebitamento 2 anni	+ 100	0	- 125
Investimento 1 anno	- 100	+ 111.11	
Re-investimento 1 anno		- 111.11	+ 127
Guadagno / Perdita	0	0	+ 2

STRUTTURA A TERMINE (IMPLICITA) DEI TASSI DI INTERESSE

Date n scadenze s , $s = 1, 2, \dots, n$, e i tassi a termine $f(1;2), f(2;3), \dots, f(n-1, n)$ si costruisce un grafico che pone sull'asse delle ordinate i tassi a termine calcolati per le varie scadenze e sull'asse delle ascisse le relative scadenze $(1, 2, \dots, n)$



Il grafico risultante rappresenta la struttura a termine (implicita) dei tassi di interesse

TITOLI OBBLIGAZIONARI A TASSO VARIABILE

Obbligazioni con cedola che varia nel tempo, secondo un prefissato meccanismo di indicizzazione.

Le cedole vengono determinate all'inizio di ogni periodo di riferimento (ad esempio, ogni 6 mesi oppure ogni anno) sulla base di un tasso di riferimento (ad esempio, il tasso sui BOT a 6 mesi oppure il tasso sui BOT a 1 anno).

Ne consegue che, al momento dell'acquisto, è nota solamente la prima cedola che verrà pagata. Le cedole successive diventeranno note in seguito, sulla base dei valori che assumerà il tasso di riferimento

Esempio di meccanismo di indicizzazione

0	0.5	1
Tasso sui BOT a 6 mesi: $y(0;0.5) = 5\%$	Tasso sui BOT a 6 mesi: $y(0;0.5) = 4.8\%$
Calcolo della cedola da pagarsi tra 6 mesi	Calcolo della cedola da pagarsi tra 6 mesi
$c_{0.5} = (y(0.5) / 2) \cdot \text{€}100$ $= \text{€}2.5$	$c_1 = (y(0.5) / 2) \cdot \text{€}100$ $= \text{€}2.4$

Cedola da pagarsi alla scadenza s , $s = 0.5, 1, 1.5, \dots, n$, determinata sulla base del tasso a 6 mesi registrato sul mercato alla scadenza precedente

Valutazione di titoli obbligazionari a cedola variabile

Per determinare il prezzo di un titolo a tasso variabile sarebbe necessario “prevedere” le cedole future da attualizzare, così da poter applicare lo stesso meccanismo di valutazione che si utilizza per un titolo a cedola fissa

$$P(c_s; n) = \frac{c_1}{1 + y(1)} + \frac{c_2}{(1 + y(2))^2} + \dots + \frac{c_n + 100}{(1 + y(n))^n}$$

La “previsione” delle cedole future richiede una “previsione” circa il valore che assumerà il tasso di riferimento alle date future in cui saranno fissate le cedole

Applicando il principio di non-arbitraggio, una “previsione” di tale tasso coerente con la struttura per scadenza dei tassi a pronti osservata al tempo 0 (data di valutazione) implica l’utilizzo dei tassi a termine

	Previsore al tempo 0
c_1	$y(1) \cdot \text{€}100$ (osservato)
c_2	$f(1;2) \cdot \text{€}100$
c_3	$f(2;3) \cdot \text{€}100$
c_4	$f(3;4) \cdot \text{€}100$
.....
c_n	$f(n-1;n) \cdot \text{€}100$

Sostituendo nell’equazione di valutazione, si ottiene:

$$P(c_s; n) = \frac{y(1) \cdot 100}{1 + y(1)} + \frac{f(1;2) \cdot 100}{(1 + y(2))^2} + \frac{f(2;3) \cdot 100}{(1 + y(3))^3} + \dots + \frac{f(n-1;n) \cdot 100 + 100}{(1 + y(n))^n}$$

Data la definizione di tasso a termine (per il caso $s = 1$)

$$f(k; k + 1) = \left[\frac{(1 + y(k + 1))^{k+1}}{(1 + y(k))^k} \right] - 1$$

si ottiene che l'espressione per il prezzo di un titolo a tasso variabile si semplifica notevolmente, come segue:

$$P(c_s; n) = \frac{y(1) \cdot 100 + 100}{1 + y(1)} = \frac{c_1 + 100}{1 + y(1)}$$

ovvero, si ricava che il prezzo di un titolo a tasso variabile è dato dal valore, attualizzato per un periodo, della prima cedola (nota) e del valore nominale dell'obbligazione.

Dalla formula di sopra, si evince che il valore di un titolo a tasso variabile alla data di stacco della cedola è, in questo caso, pari al suo valore nominale (€100)

In un qualsiasi altro istante temporale, compreso tra due date di stacco della cedola, il valore dell'obbligazione sarà differente dal suo valore nominale.

Ad esempio, il valore del titolo a 3 mesi dal pagamento della prossima cedola è dato da:

$$P(c_s; n) = \frac{c_1 + 100}{(1 + y(0.25))^{0.25}} \neq 100$$

Il CCT con data di scadenza 1 febbraio 2010 prevede il pagamento di cedole semestrali indicizzate in base al seguente meccanismo:

- Tasso BOT a 6 mesi registrato all'inizio del periodo di riferimento (1 febbraio e 1 agosto) + spread di 0.15%.

Considerando che il tasso sui BOT a 6 mesi registrato il 1/8/2003 è stato del 2.20% annuo, qual è il prezzo del CCT al 1 novembre 2003, data in cui $y(0.25) = 2.10\%$?

$$\begin{aligned} P(c_s; 6.25) &= \frac{(2.20\%/2 + 0.15\%) \cdot 100 + 100}{(1 + y(0.25))^{0.25}} \\ &= \frac{1.25 + 100}{(1 + 0.021)^{0.5}} = 100.73 \end{aligned}$$

BOOTSTRAP

Tecnica che permette di estrapolare la struttura per scadenza dei tassi a pronti dai prezzi dei titoli obbligazionari osservati sul mercato

Si ipotizzi di osservare sul mercato $2 \cdot n$ titoli zero coupon con scadenza, rispettivamente, 0.5, 1, 1.5, , 2, ..., n anni e $2 \cdot k$ titoli con cedola fissa con scadenza, rispettivamente, $n+0.5, n+1, n+1.5, n+2, \dots, n+k$ anni

In totale, si ipotizza quindi di osservare titoli che coprono tutte le scadenze semestrali comprese tra 0.5 e $n+k$ anni

I tassi a pronti relativi alle $2*n$ scadenze di titoli zero coupon si ricavano invertendo le relazioni di prezzo

$$P(0;0.5) = \frac{100}{(1 + y(0.5))^{0.5}}$$

$$P(0;1) = \frac{100}{(1 + y(1))^1}$$

.....

$$P(0;n) = \frac{100}{(1 + y(n))^n}$$

Si ottengono così i tassi a pronti relativi alle scadenze comprese tra 0.5 e n anni

$$y(0.5) = \left(\frac{100}{P(0;0.5)} \right)^{\frac{1}{0.5}} - 1$$

$$y(1) = \left(\frac{100}{P(0;1)} \right)^{\frac{1}{1}} - 1$$

.....

$$y(n) = \left(\frac{100}{P(0;n)} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Questi tassi vengono utilizzati per calcolare i tassi a pronti relativi alle successive scadenze $n+0.5$, $n+1$, $n+1.5$, $n+2$, ..., $n+k$ anni mediante una procedura ricorsiva.

In particolare, si procede calcolando inizialmente il tasso a pronti per la scadenza $n+0.5$

$$P(c_{n+0.5}; n + 0.5) = \frac{c_{n+0.5}}{(1 + y(0.5))^{0.5}} + \frac{c_{n+0.5}}{1 + y(1)} + \dots$$

$$+ \frac{c_{n+0.5}}{(1 + y(n))^n} + \frac{c_{n+0.5} + 100}{(1 + y(n + 0.5))^{n+0.5}}$$

Infatti, dato che i tassi $y(0;0.5)$, $y(0;1)$, ..., $y(0;n)$ sono già stati calcolati, l'unica incognita in questa equazione è rappresentata dal tasso $y(0;n+0.5)$

Esempio

Dato un mercato composto da due titoli zero coupon, aventi prezzo di mercato $P(0;0.5) = €99$ e $P(0;1) = €97$ (ovvero, $n=1$), e da un titolo con cedola fissa di €2, scadenza 1.5 anni e prezzo $P(0;1.5) = €100$, si determini la struttura dei tassi a pronti per le scadenze disponibili.

Il primo stadio è costituito dal calcolo dei tassi a pronti per le scadenze 0.5 e 1, facilmente ottenibili invertendo la relazione di prezzo per i titoli zero coupon.

Nel secondo stadio, si utilizzano i tassi così calcolati nella relazione di prezzo del titolo con cedola per ricavare il tasso a pronti relativo alla scadenza 1.5

$$y(0.5) = \left(\frac{100}{99} \right)^{0.5} - 1 = 2.03\%$$

$$y(1) = \left(\frac{100}{97} \right) - 1 = 3.09\%$$

$$\begin{aligned} y(1.5) &= \frac{c_{1.5} + 100}{P(c_{1.5}; 1.5) - \frac{c_{1.5}}{(1 + y(0.5))^{0.5}} + \frac{c_{1.5}}{(1 + y(1))^1}} \\ &= \frac{2 + 100}{101 - \frac{2}{(1.0203)^{0.5}} + \frac{2}{1.0309}} = 3.35\% \end{aligned}$$

Fine esempio

Quindi, si procede utilizzando tale tasso a pronti, insieme agli $2*n$ tassi precedentemente calcolati, per determinare il tasso a pronti relativo alla scadenza $n+1$, che è l'unica incognita nella seguente equazione

$$\begin{aligned} P(c_{n+1}; n + 1) &= \frac{c_{n+1}}{(1 + y(0.5))^{0.5}} + \frac{c_{n+1}}{1 + y(1)} + \dots \\ &+ \frac{c_{n+1}}{(1 + y(n))^n} + \frac{c_{n+1}}{(1 + y(n + 0.5))^{n+0.5}} + \\ &+ \frac{c_{n+1} + 100}{(1 + y(n + 1))^{n+1}} \end{aligned}$$

... e così via; si continua ad applicare la stessa procedura fino a ricavare il tasso a pronti relativo alla scadenza $n+k$