Leggi di capitalizzazione

Introduzione

- Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la definizione di fattore montante
$$M(t,s)=V(s)/V(t)$$
- Quando M(t,s) viene vista come funzione di t e di s, si chiama “legge di capitalizzazione”
- Studieremo le due leggi di capitalizzazione fondamentali: “semplice” e “composta”

La legge lineare

- In questo caso si pone

$$M(t,s) = 1 + i * (s-t)$$

- La costante i è il “tasso di interesse” sul periodo (t,t+1). (può essere giornaliero, mensile, annuale,…)
- IMPORTANTE: i e s-t devono essere espressi nella stessa unità temporale!!!

Valori equivalenti (rispetto alla legge lineare)

- (Capitalizzazione): Un capitale $V(t)$ disponibile in t equivale, rispetto alla l. lineare, a

$$V(s)=V(t) * M(t,s) = V(t) * (1 + i * (s-t))$$

- Per spostare "nel passato" si procede analogamente "scontando"

$$V(t) = V(s) / M(t,s) = V(s) * B(t,s) =$$
$$= V(s) / (1 + i * (s-t))$$

Tassi equivalenti (rispetto alla legge lineare)

- Per confrontare tra loro tassi riferiti ad unità temporali differenti è necessario esprimerli nella stessa base
- Es. se i_{12} è un tasso mensile, per ottenere il tasso annuo equivalente i si calcola il tasso annuo che produce lo stesso interesse in un mese, cioè si risolve

$$i * 1/12 = i_{12}$$

- Quindi

$$i = i_{12} * 12$$

Esempio 1: Conto corrente

- Un c.c. paga l'1.37% annuale. Il 5/7/2001 sono stati versati 100,000 Euro. A quanto ammonta l'interesse maturato al 15/09/2001?

(C. Esempio 1.1)

Esempio 2: Rateo di un BTP

- Il rateo di un BTP rappresenta gli interessi maturati fino al momento attuale t.
- Se un BTP che ha pagato l'ultima cedola in T pagherà la prossima in T2 e se C è l'ammontare della cedola, allora il rateo in t, T1 < t< T2 è dato da
- Rateo(t)=C*(t-T1)/(T2-T1)

Esempio pratico (C. Esempio 1.2)

- Un BTP con TAN=8,50% paga cedole in due rate semestrali il 01/01 ed il 01/07. Se il titolo è acquistato il 01/08/2001,con valuta al 03/08/2001 ad un corso secco pari a 109.470, a quanto ammonta l'esborso totale del compratore?

I tassi di riferimento del mercato: Libor e Euribor

- Sono tassi rilevati giornalmente per o.f. a pronti.
- Si riferiscono a periodi che vanno da 1 a 12 mesi.
- Sono espressi sempre su base annua.

Forward Rate Agreement (FRA)

- Il FRA è un contratto a termine tra due parti che si accordano all'istante t su un tasso di interesse i_{FRA} (tasso FRA) da applicare in un periodo futuro (T,s) su un capitale C.
- Se in T il tasso a pronti per il periodo (T,s) è i(T,s), il contratto prevede lo scambio di

$$C*(i_{FRA}-i(T,s)) \text{ in } s$$

- oppure, equivalentemente,

$$C*(i_{FRA}-i(T,s))*B(T,s) \text{ in } T$$

- NB: qui si è supposto che il tasso sia già espresso sulla base (T,s)

Esempio (FRA)

- Una società acquista un FRA 6x12 al 3.35% su un nozionale di 5 milioni di Euro. Alla scadenza viene rilevato un tasso Libor spot a sei mesi pari a 3.58%. Cosa accade?

Basi finanziarie

$$\frac{Act}{Act};\frac{30}{360};\frac{Act}{360}\ldots$$

- Gli esempi 1.3 e 1.4 mostrano come sia importante conoscere la base per valutare l'interesse effettivo di una operazione

Il modello esponenziale

- Supponiamo che gli interessi maturati vengano via via reinvestiti allo stesso tasso
- $V(t+1)=V(t)(1+i)$
- $V(t+2)=V(t+1)(1+i)=V(t)(1+i)^2$
- $V(t+3)=V(t+2)(1+i)=V(t)(1+i)^3$
- …
- $V(t+m)=V(t)(1+i)^m$

Il modello esponenziale (cont.)

- In generale: $M(t,s)=(1+i)^{s-t}$
- La costante i rappresenta il tasso di interesse sul periodo (t,t+1).
- IMPORTANTE: esprimere i e t-s nella stessa base!
- Fattore di sconto: $B(t,s)=(1+i)^{-(s-t)}$

Valori equivalenti (rispetto alla legge esponenziale)

- (Capitalizzazione): Un capitale V(t) disponibile in t equivale, rispetto alla l. esponenziale, a

$$V(s)=V(t) * M(t,s) = V(t) * (1 + i)^{(s-t)}$$

- Per spostare "nel passato" si procede analogamente "scontando"

$$V(t) = V(s) / M(t,s) = V(s) * B(t,s) =$$
$$= V(s) / (1 + i)^{-(s-t)}$$

Intensità istantanea di interesse

- La legge esponenziale si esprime anche con

$$M(t,s)=\exp(\delta(s-t))$$

Cioè

$$\delta=\log(1+i)$$

ovvero

$$i=\exp(\delta)-1$$

δ si chiama <u>intensità istantanea di interesse</u>

Esempio (Legge esponenziale)

- Si investono 1,000,000 E in un deposito che paga il 3% annuo. Cosa si otterrà tra 5 anni?
- …se il tasso è 3% semestrale?
- Prendo in prestito 500,000 al 5,3% annuo per 4 anni e 8 mesi. Qual è l'interesse della o.f.? Ed il tasso di interesse?
- Non voglio pagare più di 620,000: quanto posso prendere in prestito?
- Qual è il tasso di interesse annuo che farebbe rimborsare esattamente 620,000?

Tassi equivalenti (rispetto alla legge esponenziale)

- Per confrontare tra loro tassi riferiti ad unità temporali differenti è necessario esprimerli nella stessa base
- Es. se i_{12} è un tasso mensile, per ottenere il tasso annuo equivalente i si calcola il tasso annuo che produce lo stesso interesse in un mese, cioè si risolve

$$(1+i)^{1/12} = 1+i_{12}$$

- Quindi

$$i = (1+i_{12})^{12}-1$$

Tassi equivalenti (cont.)

- Servono a confrontare tra loro o.f. su basi differenti.
- Esempio1: E’ più conveniente investire ad un tasso del 12% annuo o del 3% trimestrale?
- Esempio2: Investendo 950 Euro si ottengono 1000 Euro tra 260 giorni. Qual è il tasso equivalente su base annua rispetto alla legge lineare? E alla esponenziale?

Capitalizzazione periodica degli interessi

- I conti correnti accreditano gli interessi periodicamente.
- Se j è un interesse annuo nominale con capitalizzazione trimestrale, il montante in un anno è
  - $M(0,1)=(1+j/4)^4$

    ed il tasso annuo effettivo è $i(0,1)=M(0,1) - 1$

Scindibilità

- La legge di capitalizzazione esponenziale soddisfa la relazione

$$B(t,s)=B(t,T)B(T,s)$$

- L' attualizzazione su un periodo (t,s) si può scindere in due operazioni su periodi contigui.
- La legge lineare non è scindibile

Flussi e portafogli finanziari

- Un flusso finanziario è un insieme di importi V_1, V_2, …, V_m disponibili alle date t_1, t_2,…,t_m
- Per calcolare il valore in t di un f.f. si sommano i valori attuali dei singoli importi
  - $V(t)=V_1*B(t,t_1)+ V_2*B(t,t_2)+…+ V_m*B(t,t_m)$
- Un portafoglio finanziario è una combinazione lineare di flussi finanziari
- Esempio 1.20